Universidade Federal do ABC - UFABC
$2^{\underline{a}}$ Lista de Cálc. Vet. e Tens. - Diurno
Prof. Márcio Silva $1^{\underline{o}}$ Trim. /2009

Parte Técnica: para treinar cálculos de integral de linha

1. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo dos respectivos caminhos indicados:

   (a) $F(x,y) = (x^2 - 2xy)\overrightarrow{i} + (y^2 - 2xy)\overrightarrow{j}$, entre os pontos $(-1,1)$ e $(1,1)$ ao longo da parábola $y = x^2$;

   (b) $F(x,y) = (y^2 - z^2)\overrightarrow{i} + 2yz\overrightarrow{j} - x^2\overrightarrow{k}$, ao longo da trajetória $\gamma(t) = t\overrightarrow{i} + t^2\overrightarrow{j} + t^3\overrightarrow{k}$, $t \in [0,1]$;

   (c) $F(x,y,z) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + (xz - y)\overrightarrow{k}$, ao longo do segmento de reta que liga $(0,0,0)$ e $(1,2,4)$;

   (d) $F(x,y,z) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + (xz - y)\overrightarrow{k}$, ao longo da trajetória $\gamma(t) = t^2\overrightarrow{i} + 2t\overrightarrow{j} + 4t^2\overrightarrow{k}$, $t \in [0,1]$.

2. Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, onde C é o quadrado de vértices (1,0), (0,1), (-1, 0) e (0,-1), percorrido no sentido anti-horário.

3. Calcule $\displaystyle\int_\gamma dx + ydy + dz$, onde γ é a intersecção do plano $y = x$ com a superfície $z = x^2 + y^2$, $z \leq 2$, sendo o sentido de percurso do ponto $(-1,-1,2)$ para o ponto $(1,1,2)$.

   Parte Conceitual: para trabalhar seu raciocínio...

4. Mostre que existem naturais m e n para os quais a forma diferencial

$$3x^{m+1}y^{n+1}dx + 2x^{m+2}y^n dy$$

   é exata.

5. Considere a forma diferencial $u(x,y)P(x,y)dx + u(x,y)Q(x,y)dy$, onde P, Q e u são supostas de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Prove que uma condição necessária para que a forma diferencial seja exata em Ω é que

$$\frac{\partial u}{\partial y}P - \frac{\partial u}{\partial x}Q = u\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) \quad \text{em} \quad \Omega.$$

6. Determine $u(x,y)$ que só depende de x tal que $(x^3 + x + y)u(x,y)dx - xu(x,y)dy$ seja exata.

   Resultados interessantes....

7. Suponha $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ num aberto $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Prove que $\overrightarrow{F} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j}$ é irrotacional se, e somente se,

$$\oint_\gamma Pdx + Qdy = 0,$$

   para toda curva γ, fechada, simples, orientada positivamente e fronteira de um compacto $K \in \Omega$ de $\mathbb{R}^2$.

8. Prove que se $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}$ for constante sobre $Im\gamma$ então o fluxo de $\overrightarrow{F}$ através de γ é o produto de $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}$ pelo comprimento de γ, onde $\overrightarrow{n}$ é a normal a γ.

9. Seja $\overrightarrow{F}(x,y) = \dfrac{x}{(x^2+y^2)^\alpha}\overrightarrow{i} + \dfrac{y}{(x^2+y^2)^\alpha}\overrightarrow{j}$. Determine α para que $\overrightarrow{F}$ seja solenoidal.

10. Sejam $f(x,y)$ e $g(x,y)$ duas funções a valores reais, de classe $\mathcal{C}^2$, no aberto Ω de $\mathbb{R}^2$. Seja $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ uma curva regular, fechada, simples, orientada no sentido anti-horário, fronteira de um compacto K, com interior não vazio e contido em Ω. Seja $\overrightarrow{n}$ a normal exterior a K. Prove que:

   (a) $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\partial g}{\partial \overrightarrow{n}} ds = \iint_K \Delta g \; dxdy$ $\left(\dfrac{\partial g}{\partial \overrightarrow{n}}\right.$ é a derivada direcional de g na direção $\overrightarrow{n}$ e Δg é o laplaciano de $\left.g\right)$.

   (b) $\displaystyle\oint_\gamma f\frac{\partial g}{\partial \overrightarrow{n}} ds = \iint_K (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \; dxdy$ (**Primeira identidade de Green**).

   (c) $\displaystyle\oint_\gamma f\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n}} ds = \iint_K (f\Delta f + \|\nabla f\|^2) \; dxdy$

   (d) $\displaystyle\oint_\gamma \left(f\frac{\partial g}{\partial \overrightarrow{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n}}\right) ds = \iint_K (f\Delta g - g\Delta f) \; dxdy$ (**Segunda identidade de Green**).

11. Seja $\nu : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ no aberto Ω e sejam γ e K como no exercício anterior. Prove que se $\Delta\nu = 0$ no interior de K e $\nu(\gamma(t)) = 0$ em [a,b], então $\nu(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in K$.

Aplicações dos conceitos de integral de linha

12. Experimentos mostram que uma corrente estacionária I em um fio comprido produz um campo magnético $\overrightarrow{B}$ que é tangente a qualquer circunferência contida num plano perpendicular ao fio e cujo centro pertence ao eixo do fio. A Lei de Ampère relaciona a corrente elétrica aos seus efeitos magnéticos e afirma que

$$\int_C \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{r} = \mu_0 I,$$

onde I é a corrente total que passa através de qualquer superfície limitada por uma curva fechada C e μ_0 é uma constante chamada de permeabilidade de espaço livre. Tomando C como uma circunferência com raio r, mostre que a magnitude $B = \|\overrightarrow{B}\|$ do campo magnético a uma distância r do centro do fio é

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

13. (a) Suponha que $\overrightarrow{F}$ represente o campo força inverso quadrado, isto é,

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = \frac{c\overrightarrow{r}}{\|\overrightarrow{r}\|^3},$$

para alguma constante c, onde $\overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$. Encontre o trabalho feito pela força $\overrightarrow{F}$ para mover um objeto de um ponto P_1 ao longo de um caminho até um ponto P_2, em termo das distâncias d_1 e d_2 destes pontos à origem.

(b) Um exemplo de um campo força inverso quadrado é o campo gravitacional $\overrightarrow{F} = -(mMG)\overrightarrow{r}/\|\overrightarrow{r}\|^3$. Encontre o trabalho feito pelo campo gravitacional quando a Terra se move do afélio (em uma distância máxima de $1,52.10^8$ Km do Sol) para o periélio (em uma distância mínima de $1,47.10^8$ Km do Sol). Use os valores $m = 5,97.10^{24}$ Kg, $M = 1,99.10^{30}$ Kg e $G = 6,67.10^{-11}$ $N.m^2/Kg^2$.

14. A integral de linha de um campo vetorial F sobre um caminho γ em relação ao comprimento de arco é definida por:

$$\int_\gamma F(X)ds = \int_a^b F(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt.$$

Calcule a integral de limha em relação ao comprimento de arco $\int_\gamma 2xds$, onde γ é o caminho formado pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de (0,0) a (1,1), seguido de um segmento de reta C_2 de (1,1) a (2,2).

15. Um fio delgado no espaço pode ser pensado como a imagem de uma curva $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Se $\delta(x,y,z)$ é a densidade linear (massa por unidade de comprimento) do fio no ponto (x,y,z), a massa do fio é definida pela integral de linha da densidade em relação ao comprimento de arco $M = \int_\gamma \delta(x,y,z)ds$. Calcule a massa de um fio dado pela imagem da curva $\gamma(t) = (t,t,t)$, $t \in [0,2]$, de densidade linear $\delta(x,y,z) = xyz$.

Parte Técnica: para treinar o Teorema de Green

16. Use o Teorema de Green para avaliar as integrais de linha ao longo das curvas dadas orientadas positivamente.

(a) $\oint_\gamma x^2y^2dx + 4xy^3dy$; γ é o triângulo com vértices (0,0), (1,3) e (0,3).

(b) $\oint_\gamma (y+e^{\sqrt{x}})dx+(2x+cos(y^2))dy$; γ é a fronteira da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$.