CÁLCULO VETORIAL E TENSORIAL - LISTA 3

PROF. ROLDÃO DA ROCHA - CMCC/UFABC

http : //professor.ufabc.edu.br/~ roldao.rocha

1. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo dos respectivos caminhos indicados:
   (a) $f(x,y) = (x^2 - 2xy)\hat{\mathbf{i}} + (y^2 - 2xy)\hat{\mathbf{j}}$, entre os pontos $(-1,1)$ e $(1,1)$ ao longo da parábola $y = x^2$. (resp.: $-14/15$).
   (b) $f(x,y) = (y^2 - z^2)\hat{\mathbf{i}} + 2yz\hat{\mathbf{j}} - x^2\hat{\mathbf{k}}$, ao longo da trajetória $\alpha(t) = t\hat{\mathbf{i}} + t^2\hat{\mathbf{j}} + t^3\hat{\mathbf{k}}$, $t \in [0,1]$.
   (c) $f(x,y,z) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + (xz - y)\hat{\mathbf{k}}$, ao longo do segmento de reta que liga (0,0,0) e (1,2,4).
   (d) $f(x,y,z) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + (xz - y)\hat{\mathbf{k}}$, ao longo da trajetória $\alpha(t) = t^2\hat{\mathbf{i}} + 2t\hat{\mathbf{j}} + 4t^2\hat{\mathbf{k}}$, $t \in [0,1]$.

2. Calcule $\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ onde C é o quadrado de vértices (1,0), (0,1), $(-1,0)$ e (0,-1), no sentido anti-horário (Resp.: 0).

3. Calcule $\int_C 2x ds$, onde C é formada pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de (0,0) a (1,1), seguido de um segmento de reta vertical C_2 de (1,1) a (2,2) (resp.: $\frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 2$).

4. Defina o conjunto $T = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)\,|, y = 0, x \leq 0\}$. Se $(x,y) \in T$, considere $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$. Prove que θ é dado por

$$\theta = \begin{cases} \text{atan}\frac{y}{x}, & \text{se} \quad x > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se} \quad x = 0, \\ \text{atan}\frac{y}{x} + \pi, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

   Mostre que

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

5. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo dos respectivos caminhos indicados:
   (a) $f(x,y) = (x^2 - 2xy)\hat{\mathbf{i}} + (y^2 - 2xy)\hat{\mathbf{j}}$, entre os pontos $(-1,1)$ e $(1,1)$ ao longo da parábola $y = x^2$. (resp.: $-14/15$).
   (b) $f(x,y) = (y^2 - z^2)\hat{\mathbf{i}} + 2yz\hat{\mathbf{j}} - x^2\hat{\mathbf{k}}$, ao longo da trajetória $\alpha(t) = t\hat{\mathbf{i}} + t^2\hat{\mathbf{j}} + t^3\hat{\mathbf{k}}$, $t \in [0,1]$.
   (c) $f(x,y,z) = x^2\hat{\mathbf{i}} - y\hat{\mathbf{j}} + (xz - y)\hat{\mathbf{k}}$, ao longo do segmento de reta que liga (0,0,0) e (1,3,8).
   (d) $f(x,y,z) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + (xz - y)\hat{\mathbf{k}}$, ao longo da trajetória $\alpha(t) = t^2\hat{\mathbf{i}} + 2t\hat{\mathbf{j}} + 4t^2\hat{\mathbf{k}}$, $t \in [0,1]$.

6. Calcule $\int_C x^3 ds$, onde C é formada:
   (a) pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de (0,0) a (1,1), seguido de um segmento de reta vertical C_2 de (1,1) a (2,2).
   (b) pela elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.