

Universidade Federal do ABC - UFABC
3ª Lista de Cálculo Vet. e Tens. - Diurno
Prof. Márcio Silva **1º Trim. /2009**

1. Calcule o fluxo do campo vetorial $F(x, y, z) = (xz, yz, -z^2)$ para fora da superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z^2 = 1 + x^2 + y^2, \ 2 \leq z \leq 3\}$
2. Um campo escalar ϕ satisfaz $\|\nabla\phi\|^2 = 4\phi$ e $\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) = 10\phi$. Calcule $\iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$, onde S é a esfera S^2 e n é a normal à esfera.
3. Seja $\vec{E}(x, y, z) = \frac{q}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, onde q é uma constante não-nula.
 - (a) Calcule $\nabla \cdot \vec{E}$;
 - (b) Calcule o fluxo de $\vec{E}$ através da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com normal $\vec{n}$ apontando para fora da esfera;
 - (c) Calcule o fluxo de $\vec{E}$ através da superfície esférica $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$, com normal $\vec{n}$ apontando para fora da esfera.
4. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^3$ e seja $\vec{u}$ um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^1$ em Ω . Suponha que

$$\iint_{\sigma} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0,$$

para toda superfície esférica σ , com normal exterior $\vec{n}$, contida em Ω . Prove que $\vec{u}$ é solenoidal em Ω .

5. Seja $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$. Seja σ a fronteira do conjunto

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\},$$

com normal $\vec{n}$ apontando para fora de K . Mostre que $\iint_{\sigma} \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$.

6. Seja $\vec{F}$ um campo de classe $\mathcal{C}^1$ num aberto contendo a fronteira do cubo $\{0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1\}$. Seja $\vec{n}$ a normal apontando para fora do cubo. Mostre que $\iint_{\sigma} \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$.

7. Use o Teorema de Stokes para mostrar as igualdades:

- (a) $\int_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = 0$, onde C é a curva de intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $y = z$;
- (b) $\int_C ydx + zdy + xdz = \pi a^2 \sqrt{3}$, onde C é a curva de intersecção da esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ com o plano $x + y + z = 0$.
- (c) $\int_C -y^2 dx + xdy + z^2 dz = \pi$, onde C é a curva de intersecção do plano $y + z = 2$ e do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

8. Mostre que o fluxo do campo vetorial $\vec{F} = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \text{sen}(xy))$, sobre a superfície S dada pela fronteira da região delimitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e pelos planos $z = 0, y = 0$ e $y + z = 2$, em relação à normal exterior, é igual a $\frac{184}{35}$.