Universidade Federal do ABC - UFABC
4ª Lista de Cálc. Vet. e Tens. - Diurno
Prof. Márcio Silva 1º Trim. /2009

1. Se $\overrightarrow{F}$ é uma força dada por $\overrightarrow{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^n(x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k})$, determine:
   (a) $\nabla \cdot \overrightarrow{F}$;
   (b) $\nabla \times \overrightarrow{F}$;
   (c) um potencial escalar $\phi(x, y, z)$ tal que $\overrightarrow{F} = -\nabla\phi$;
   (d) para qual valor de n o potencial escalar diverge em ambos na origem e no infinito?

2. A origem do sistema de coordenadas cartesianas está no centro da Terra. Suponha que a Lua esteja sobre o eixo z a uma distância R da Terra (centro-a-centro). A força de maré exercida pela Lua sobre uma partícula na superfície da Terra (ponto (x, y, z)) é dada por
$$\overrightarrow{F} = GMm\big(-\frac{x}{R^3}, -\frac{y}{R^3}, \frac{2z}{R^3}\big)$$
Encontre o potencial escalar para esta força de maré.

3. Um fio comprido no qual passa uma corrente I produz uma indução magnética $\overrightarrow{B}$ dada por
$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\big(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\big)$$
Encontre um potencial vetor magnético $\overrightarrow{A}$.

4. Seja $\overrightarrow{B}$ o campo vetorial dado por $\overrightarrow{B} = \nabla u \times \nabla v$, onde u e v são funções escalares.
   (a) mostre que $\overrightarrow{B}$ é solenoidal;
   (b) mostre que $\overrightarrow{A} = \frac{1}{2}(u\nabla v - v\nabla u)$ é um potencial vetor para $\overrightarrow{B}$.

5. Considere as seguintes equações de Maxwell:
$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \text{onde } \overrightarrow{E} \text{ é o campo elétrico.}$$
$$\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0, \text{onde } \overrightarrow{B} \text{ é a indução magnética.}$$
   (a) Por que existe um potencial vetor eletromagnético $\overrightarrow{A}$ para $\overrightarrow{B}$, isto é, $\overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A}$?
   (b) Mostre que $\overrightarrow{A}$ não é único. Sugestão: considere $\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A} + \nabla\psi$, onde ψ é uma função escalar.
   (c) Mostre que $\nabla \times \overrightarrow{E} = -\nabla \times \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$. Mostre que isto implica que existe uma função escalar ϕ tal que $\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} - \nabla\phi$.
   (d) Sejam $\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A} + \nabla\psi$ e $\phi' = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}$. Mostre que $\overrightarrow{E'} = \overrightarrow{E}$.
   Conclusão: $\overrightarrow{E}$ e $\overrightarrow{B}$ ficam invariantes pelas transformações de Gauge (ou calibre) $\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A} + \nabla\psi$ e $\phi' = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}$.

6. Seja $H(x, y, z) = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$ um campo vetorial. Determine campos F e G, F solenoidal e G irrotacional tais que $H = F + G$.

7. Seja $\overrightarrow{V}$ um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^1$ em um aberto simplesmente conexo Ω de $\mathbb{R}^3$. Considere as seguintes afirmações sobre $\overrightarrow{V}$:
(i) $\nabla \times \overrightarrow{V} = 0$ e $\overrightarrow{V} = \nabla \times \overrightarrow{U}$, para algum campo vetorial $\overrightarrow{U}$ de classe $\mathcal{C}^1$ em Ω;
(ii) existe um campo escalar ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ em Ω e tal que $\overrightarrow{V} = \nabla\phi$ e $\Delta\phi = 0$ em Ω.

   (a) Prove que (i) implica (ii);

   (b) Complete a frase com uma palavra para cada lacuna e de modo a expressar em palavras o resultado provado neste exercício:
   Um campo vetorial que é ao mesmo tempo .... e .... em Ω é o gradiente de uma função .... em Ω.

8. Seja $H(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ um campo vetorial. Mostre que H é solenoidal e irrotacional. Pela questão anterior, segue que H é o gradiente de uma função harmônica. Determine uma função que realiza esta propriedade.