Universidade Federal do ABC - UFABC
5ª Lista de Cálc. Vet. e Tens. - Diurno
Prof. Márcio Silva 1º Trim. /2009

1. Defina coordenadas parabólicas pelas transformações:

$$\begin{cases} x = uvcos\theta, \\ y = uvsin\theta, \\ z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad u \in [0, \infty), v \in [0, \infty), \theta \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

   (a) Defina os versores $\hat{u}, \hat{v}$ e $\hat{\theta}$ como aqueles que apontam nas direções de crescimento das respectivas variáveis. (Tais versores são os vetores $\hat{u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \hat{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ e $\hat{\theta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$ normalizados)
   (b) Calcule as transformações inversas $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z)$ e $\theta = \theta(x, y, z)$.
   (c) Calcule a métrica em coordenadas parabólicas. A métrica é ortogonal?
   (d) Calcule os fatores de escala h_u, h_v e h_θ
   (e) Calcule o jacobiano e o elemento de volume dV nessas coordenadas.
   (f) Calcule o gradiente, o divergente, o rotacional e o laplaciano nessas coordenadas.

2. Fixado um número ϕ, arbitrário, mostre que

$$(u_1, u_2) = (x_1 cos\phi - x_2 sen\phi, x_1 sen\phi + x_2 cos\phi)$$

   são componentes de um tensor cartesiano de primeira ordem em duas dimensões.

3. Mostre que os T_{ij} dados por

$$T = [T_{ij}] = \begin{pmatrix} x_2^2 & -x_1x_2 \\ -x_1x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}$$

   são componentes de um tensor cartesiano de segunda ordem.

4. Use a regra do quociente para mostrar que a matriz

$$\begin{pmatrix} y^2 + z^2 - x^2 & -2xy & -2xz \\ -2yx & x^2 + z^2 - y^2 & -2yz \\ -2zx & -2zy & x^2 + y^2 - z^2 \end{pmatrix}$$

   formam as componentes de um tensor cartesiano de segunda ordem.
   Sugestão: Contraia duas vezes a matriz com o produto exterior de (x, y, z) com ele mesmo.

5. Simplifique as expressões:

   (a) δ_{ii};
   (b) $\delta_{ij}\delta_{ij}$;
   (c) $\epsilon_{ijk}\delta_{kn}$;
   (d) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}$.

6. Use a identidade $\epsilon - \delta$ para simplificar:

(a) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{jik}$;

(b) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{jki}$.

7. Use métodos de tensores para mostrar as seguintes identidades vetoriais:

   (a) $(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$;

   (b) $\nabla \times (\phi u) = \phi \nabla \times u + (\nabla \phi) \times u$;

   (c) $\nabla \cdot (u \times v) = v \cdot (\nabla \times u) - u \cdot (\nabla \times v)$

   (d) $\nabla \times (u \times v) = (v \cdot \nabla)u - (u \cdot \nabla)v + u\nabla \cdot v - v\nabla \cdot u$.

8. Use notação indicial para provar que:

   (a) $\nabla \times \nabla \phi = 0$;

   (b) $\nabla \cdot \nabla \times \overrightarrow{F} = 0$.

9. Use notação indicial para representar as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \qquad \frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2.$$

10. **(Símbolo da permutação ϵ ou tensor alternante)** Defina a permutação ϵ generalizada como:

$$\epsilon^{ijk\ldots l} = \epsilon_{ijk\ldots l} = \begin{cases} 1, & \text{se } ijk\ldots l \text{ for uma permutação par dos inteiros } 123\ldots n; \\ -1, & \text{se } ijk\ldots l \text{ for uma permutação ímpar dos inteiros } 123\ldots n; \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

    Calcule ϵ_{612453}.

11. Dê as formas indiciais dos Teoremas de Green (Stokes no plano), Gauss (divergência) e Stokes. Dê também a forma indicial da Primeira Identidade de Green.

12. Num certo sistema de unidades, a tensão eletromagnética M_{ij} é dada por

$$M_{ij} = E_iE_j + B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(E_kE_k + B_kB_k),$$

    onde os campos elétrico e magnético, E e B, são tensores de primeira ordem. Mostre que M_{ij} é um tensor de segunda ordem.

13. Mostre que a aceleração de uma partícula de posição (x_1, x_2, x_3) é representada pelas componentes de um tensor de primeira ordem no espaço. Este tensor é isotrópico?

14. A todo tensor anti-simétrico A_{ij} de segunda ordem em três dimensões podemos associar um pseudotensor p_i dado por

$$p_k = \frac{1}{2}\epsilon_{klm}A_{lm}.$$

    Chamamos p_k de o **dual** a A_{jk}. Mostre que se $p_k = \frac{1}{2}\epsilon_{klm}A_{lm}$ então $A_{ij} = \epsilon_{ijk}p_k$.
    Sugestão: Contraia ϵ_{ijk} com p_k e use a identidade $\epsilon - \delta$.

15. Considere o tensor cartesiano de segunda ordem cujas componentes são dadas $T_{ij} = \delta_{ij} - 3x_ix_j$. Mostre que este tensor é simétrico e avalie as seguintes integrais sobre a esfera unitária: $\int T_{ij}dS$ e $\int T_{ik}T_{kj}dS$.