

CÁLCULO VETORIAL E TENSORIAL - LISTA 7

PROF. ROLDÃO DA ROCHA - CMCC/UFABC

<http://professor.ufabc.edu.br/~roldao.rocha>

1) Defina coordenadas parabólicas pelas transformações

$$\begin{aligned}x &= uv \cos \theta \\y &= uv \sin \theta \\z &= \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad u \in [0, \infty), v \in [0, \infty), \theta \in [0, 2\pi).\end{aligned}\tag{1}$$

1. Defina os versores \hat{u} , \hat{v} e $\hat{\theta}$ como aqueles que apontam nas direções de crescimento das respectivas variáveis. (Tais versores são os vetores $\mathbf{e}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\mathbf{e}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, $\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$ normalizados.)
2. Calcule o jacobiano e o elemento de volume dV nessas coordenadas.
3. Calcule as transformações inversas $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ e $\theta = \theta(x, y, z)$.
4. Calcule a métrica em coordenadas parabólicas. A métrica é ortogonal?
5. Calcule os fatores de escala h_u , h_v e h_θ .
6. Calcule o gradiente, o divergente, o rotacional e o laplaciano nessas coordenadas.

2) (Aqui r, θ denotam coordenadas cilíndricas.) Ondas eletromagnéticas transversas (ou seja, não possuem componente $\hat{\mathbf{k}}$) em um guia de onda possuem campo elétrico $\mathbf{E} = \mathbf{E}(r, \theta)e^{i(kz - \omega t)}$ e indução magnética $\mathbf{B} = \mathbf{B}(r, \theta)e^{i(kz - \omega t)}$. Ambos os campos satisfazem a equação de Laplace

$$\nabla^2 \mathbf{E}(r, \theta) = \mathbf{0} = \nabla^2 \mathbf{B}(r, \theta).$$

a) Mostre que $\mathbf{E} = \hat{r}E_0 \frac{a}{r} e^{i(kz - \omega t)}$ e $\mathbf{B} = \hat{\theta}E_0 \frac{a}{r} e^{i(kz - \omega t)}$ são soluções da equação de Laplace. Aqui a é o raio do condutor e E_0 e B_0 são amplitudes constantes.

b) Assumindo-se que o interior do guia de onda é um ambiente de vácuo, verifique que as equações de Maxwell são satisfeitas se

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{k}{\omega} = \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\omega}{k} \right) = \frac{1}{c}.$$

3) Mostre que

$$-i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i \frac{\partial}{\partial \theta},$$

em coordenadas esféricas.