Cálculo Vetorial e Tensorial - 2015.1
Lista 9: Contra- e Covariância e Relatividade

1. Dada a bese $\vec{e}_1 = -4\vec{i}_1 + 2\vec{i}_2$, $\vec{e}_2 = 3\vec{i}_1 + 3\vec{i}_2$ e $\vec{e}_3 = 2\vec{i}_3$, onde $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$ e $\vec{i}_3$ são uma base ortonormal, encontre as componentes contravariantes e covariantes do vetor que junta a origem ao ponto (1,1,1).

2. Exprima o produto escalar triplo $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ em termos das componentes contravariantes e covariantes dos vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$.

3. Dado um sistema S com base ortonormal $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$ e $\vec{i}_3$, considere o tensor de segunda ordem com componentes $A_{ik} = A^{ik} = A_i{}^k = A^i{}_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   Seja S' um novo sistema com base $\vec{e}_1 = \vec{i}_1$, $\vec{e}_2 = \vec{i}_1 + \vec{i}_2$, $\vec{e}_3 = \vec{i}_1 + \vec{i}_2 + \vec{i}_3$. Exprima as componentes covariantes, contravariantes e mixtas deste tensor no sistema S'.

4. Se A_{ikl} é um tensor covariante de terceira ordem e B^{pqmn} um tensor contravariante de quarta ordem, prove que $A_{ikl}B^{klmn}$ é um tensor mixto de terceira ordem (com um índice covariante e dois índices contravariantes).

5. Sejam q_1, q_2 e q_3 coordenadas relacionadas a coordenadas retangulares x_1, x_2 e x_3 (base ortonormal $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$ e $\vec{i}_3$) pelas fórmulas $q_1 = x_1 + x_2$, $q_2 = x_1 - x_2$ e $q_3 = 2x_3$.
   (a) Prove que q_1, q_2 e q_3 são retangulares também;
   (b) Encontre os vetores da base correspondente;
   (c) Encontre o tensor métrico g_{ik};
   (d) Encontre as componentes covariantes e contravariantes dos vetores $2\vec{i}_1$, $\vec{A} = \vec{i}_1 + \vec{i}_2$ e $\vec{B} = 2\vec{i}_1 - 3\vec{i}_3$
   (e) Calcule $G = \det(g_{ik})$
   (f) Encontre as componentes de $\vec{A} \times \vec{B}$ em ambos os sistemas de coordenadas

6. Dada uma função escalar $\Phi = \Phi(x^1, x^2, x^3)$, as quantidades $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^i \partial x^k}$ formam um tensor?

7. Encontre alguns dos símbolos de Christoffel da sua escolha para coordenadas cilíndricas e esféricas.

8. Mostre, que a inversa da transformação de Lorentz (TL) para a velocidade $\vec{u} = (u, 0, 0)$ é a TL para $-\vec{u} = (-u, 0, 0)$, e que a transformação covariante é a inversa da transformação contravariante.

9. Um observador numa plataforma espacial, cujo comprimento próprio é 100 m, mede a velocidade de uma nave que passa por ele e acha 0.5 c. Por meio de um arranjo experimental que permite medir as posições das extremidades da nave simultaneamente, determina 60 m de comprimento dela.
(a) Qual é o comprimento da nave em repouso?
(b) Qual é o comprimento da plataforma para o piloto da nave?
(c) Qual é o intervalo de tempo no relógio da nave entre as duas medidas realizadas pelo observador da estação?
(d) Para o observador na plataforma, quanto tempo leva a nave a passar por ele?
(e) Para o piloto, quanto tempo leva a plataforma a passar por ele?

10. Dois sinais luminosos são enviados do mesmo local no laboratório, com um intervalo de três anos entre eles.
(a) Qual a distância espacial entre estes dois eventos em um referencial no qual estes eventos estão separados por 5 anos?
(b) Qual a velocidade deste referencial em relação ao laboratório?

11. Dois sinais luminosos são enviados no laboratório separados espacialmente por 5 anos luz e uma separação temporal de 4 anos. Qual a distância entre estes dois eventos em um referencial inercial em que eles ocorrem simultaneamente?

12. Mostre que, para velocidades baixas, $v \ll c$, $E_{\text{cin}} = (\gamma - 1)mc^2$ e $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ tendem aos seus valores clássicos (newtonianos), $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}mv^2$ e $\vec{p} = m\vec{v}$, e para velocidades perto daquela da luz, $v \to c$, a ∞ (um dos motivos, por aqueles partículas com massa não podem alcançar a velocidade da luz).

13. Demonstre que o produto escalar $F^\alpha v_\alpha$ da quadriforça com a quadrivelocidade é igual a zero e que, como consequência, o produto escalar da força comum pela velocidade comum é igual à taxa de aumento da energia total relativística.

14. Uma certa transformação de Lorentz é repesentada pela matriz:

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & -u\gamma\cos\theta & u\gamma\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u\gamma & 0 & \gamma\cos\theta & -\gamma\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & 0 & \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

onde $\gamma = (1 - u^2)^{-1/2}$. Interprete físicamente a transformação.

15. Através das leis de transformações de um tensor chegue nas transformações para as componentes do Tensor eletromagnético. A partir destas escreva as TL para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.