

Sumário

1	Derivada covariante	1
2	Símbolo de Christoffel	3
3	Equação de Einstein	5

I

DERIVADA COVARIANTE

QUANDO estamos em relatividade geral temos que tomar cuidado com a variação de vetores e sua bases quando se desloca pela superfície. Se imaginarmos um vetor correndo em uma superfície curva temos que a base do vetor ira "apontar" a cada momento em uma direção e sentido. Assim o vetor ira se modificar conforme houver variação do vetor. Para isso, temos que usar a derivada covariante, onde a mesma é definida como :

$$V = V^\mu e_\mu$$
$$\nabla_\nu V = (\partial_\nu V^\mu) e_\mu + V^\mu \partial_\nu e_\mu$$

A variação da base no segundo termo na direita da equação acima é o que chamaremos de conexão

$$\partial_\nu e_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda$$
$$\partial_\nu e_\mu = (\text{Alguns coeficientes}) e_\lambda$$

Os coeficientes são quem conectam as bases quando variamos vetor pela superfície.

Exemplo: Para um vetor que tem componentes escrita em coordenadas polares, temos

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_\theta = -r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y$$

Se derivarmos a base \mathbf{e}_r temos:

$$\partial_\theta \mathbf{e}_r = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y$$

$$\Rightarrow \partial_\theta \mathbf{e}_r = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}}$$

Assim, o coeficiente $1/r$ é o que conecta as duas bases quando se "desloca" pela superfície.

2

SÍMBOLO DE CHRISTOFFEL

No capítulo anterior descrevemos a derivada para um vetor contravariante $V = V^\mu e_\mu$, porém para um covetor, ou seja, $\omega = \omega_\mu \theta^\mu$ que vive no espaço dual, o sinal na derivada covariante será negativo. Como não gosto de aceitar as coisas vou demonstrar:

A base satisfaz

$$\begin{aligned}e^\mu e_\nu &= \delta_\nu^\mu \\ \partial_\lambda (e^\mu e_\nu) &= 0 \\ \partial_\lambda e^\mu (e_\nu) + e^\mu \partial_\lambda e_\nu &= 0 \\ \partial_\lambda e^\mu (e_\nu) + e^\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\rho e_\rho &= 0 \\ \partial_\lambda e^\mu (e_\nu) + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho e^\mu e_\rho &= 0 \\ \partial_\lambda e^\mu (e_\nu) + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \delta_\rho^\mu &= 0 \\ (\partial_\lambda e^\mu)(e_\nu) &= -\Gamma_{\lambda\nu}^\mu \\ \partial_\lambda e^\mu (\delta_\nu^\rho) &= -\Gamma_{\lambda\nu}^\mu e^\rho \\ \partial_\lambda e^\mu &= -\Gamma_{\lambda\nu}^\mu e^\rho\end{aligned}$$

Então,

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\mu\rho} = 0$$

Fazendo os casos cíclicos, temos:

1)

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\mu\rho}$$

2)

$$\partial_\mu g_{\lambda\nu} = \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho g_{\lambda\rho}$$

3)

$$\partial_\nu g_{\mu\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^\rho g_{\rho\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho g_{\mu\rho}$$

Somando (1) e (2) e subtraindo (3):

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda} = 2\Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu}$$

Multiplicando por $g^{\sigma\nu}$, obtemos

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\nu} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda}) \quad (2.1)$$

3

EQUAÇÃO DE EINSTEIN

A dinâmica do espaço-tempo é determinada por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

O tensor de Ricci é definido por

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \quad (3.2)$$

Agora que sabemos que o símbolo de Christoffel é escrito como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (3.3)$$

A equação de Einstein pode ser compreendida como uma relação profunda entre a geometria do espaço-tempo e o conteúdo de matéria e energia presente nele. O lado esquerdo da equação, composto pelo tensor de Ricci, pelo escalar de Ricci, pela métrica e pela constante cosmológica, descreve a curvatura e a estrutura geométrica do espaço-tempo. O tensor de Ricci, em particular, mede como o volume de uma pequena esfera de partículas em queda livre muda à medida que ela se move através do espaço-tempo, revelando como a presença de massa e energia faz com que trajetórias inicialmente paralelas conwinjam ou divirjam. O

escalar de Ricci é simplesmente uma versão condensada dessa curvatura, representando a curvatura média em todas as direções. A métrica, por sua vez, é a ferramenta fundamental que nos permite medir distâncias e intervalos de tempo nesse espaço-tempo curvo, enquanto a constante cosmológica atua como uma espécie de "repulsão cósmica" associada à energia escura.

O lado direito da equação contém o tensor energia-momento, que codifica toda a informação sobre a distribuição de matéria, energia, pressão e tensão no espaço. A constante gravitacional de Newton aparece como fator de proporcionalidade, estabelecendo a intensidade da interação gravitacional. A equação como um todo nos diz, de maneira elegante e precisa, que a curvatura do espaço-tempo em cada ponto é diretamente determinada pela quantidade de matéria e energia presente naquele ponto, materializando a famosa frase de John Wheeler: "A matéria diz ao espaço-tempo como se curvar, e o espaço-tempo diz à matéria como se mover".

Para entender o tensor de Ricci mais profundamente, precisamos compreender os símbolos de Christoffel, que são os componentes da conexão afim. Eles funcionam como uma espécie de "força fictícia" que aparece naturalmente quando trabalhamos com coordenadas curvas, indicando como os vetores da base mudam quando nos movemos de um ponto a outro no espaço-tempo. Se o espaço-tempo for perfeitamente plano, como no caso do espaço de Minkowski da relatividade restrita em coordenadas cartesianas, todos os símbolos de Christoffel são zero. A expressão do tensor de Ricci em termos dos símbolos de Christoffel envolve derivadas e produtos desses símbolos, capturando como a curvatura se manifesta através das variações e interações dessas "torções" nas coordenadas.

Uma analogia útil para visualizar esses conceitos é imaginar o espaço-tempo como um grande colchão de molas. A métrica representa a rigidez desse colchão em cada direção, determinando como as distâncias são medidas. Os símbolos de Christoffel seriam como as torções e tensões locais entre as molas vizinhas. O tensor de Ricci indicaria o quanto o colchão está esticado ou comprimido em cada região. Finalmente,

a equação de Einstein nos diria que, ao colocarmos pesos sobre esse colchão, a deformação resultante será proporcional à massa desses pesos, exatamente como observamos na gravidade.