Universidade Federal do ABC

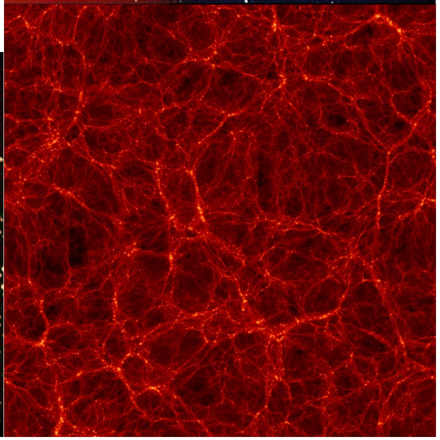
Física Contemporânea

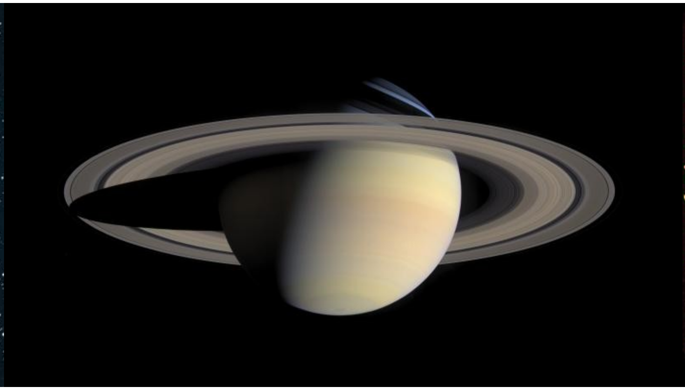
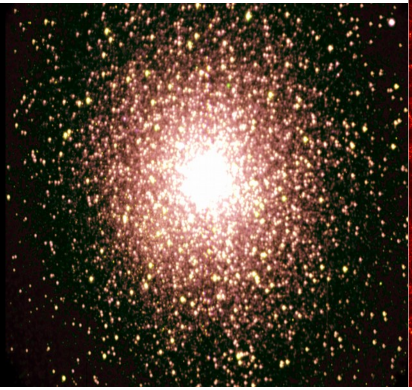
02. Leis de Kepler, Leis de Newton, Gravitação, Transformação de Lorentz

Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/Astro.html





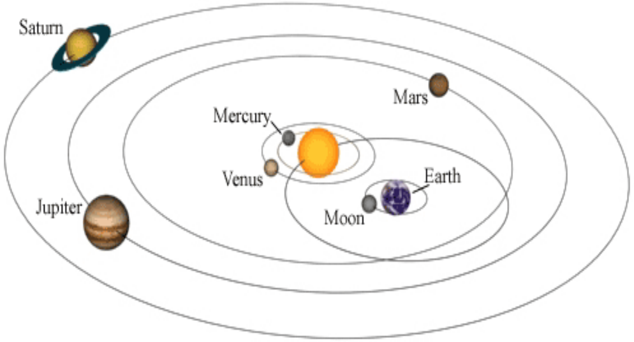
Tycho Brahe

1546-1601, astrônomo dinamarquês, último grande observador da era “pré-telescópio”, fez e compilou as melhores medidas de posições de planetas até então, que mais tarde seriam usados por Kepler
(três slides pra frente).

Também desenvolveu um modelo cosmológico, naquele o Sol gira em torno da Terra, e os planetas em torno do Sol para manter a Terra no centro.

Em 1572 descobriu uma Supernova
(=> Aula Estágios Finais), o que estava em conflito com a crença da época,
de que o céu era invariável.

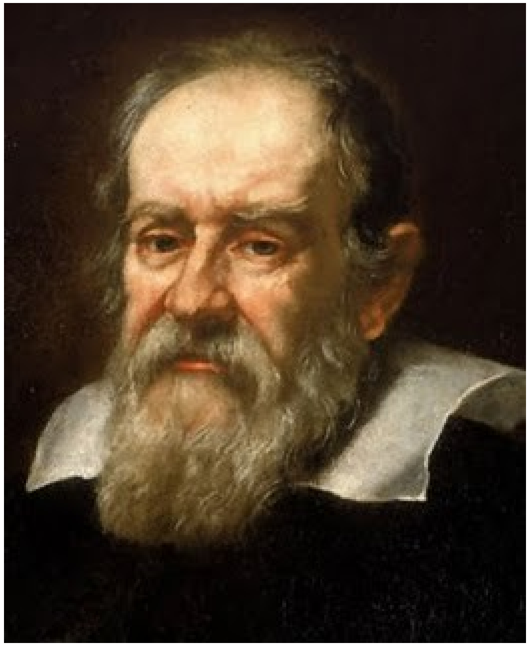
Tycho Brahe



Modelo de Tycho Brahe

As Observações de Galileu

Galileu Galilei (1564-1642) foi o primeiro
a apontar um telescópio pro céu,
e é considerado o pai da
astronomia observacional moderna.


Galileu Galilei

Ele observou pela primeira vez (1609-10):
- As crateras da Lua,
- As manchas solares,
- As fases da Vênus,
- As Luas de Júpiter,

corroborando o modelo heliocêntrico
de Copérnico.

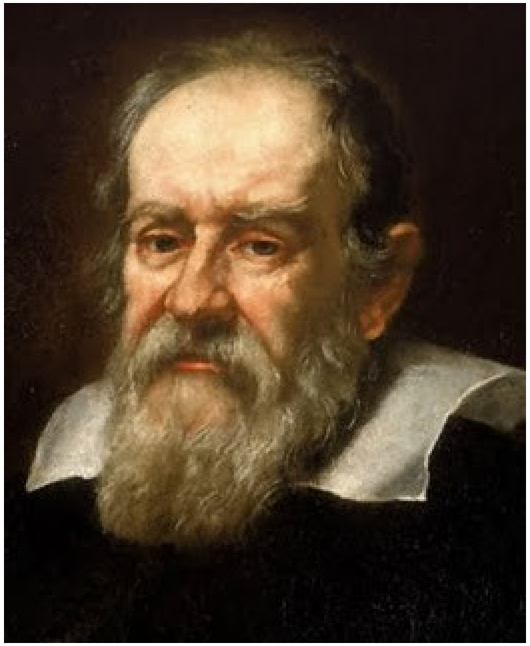

A luneta de Galileu

Além disso, ele observou que a Via Láctea não é
simplesmente uma nuvem, mas consiste de estrelas,
e fez contribuições importantes para a mecânica.

As Observações de Galileu

1616 foi forçado pela igreja católica a renunciar o seu apóio para o modelo copernicano.

1632 publicou a obra *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, que também apoia o modelo copernicano.
De novo, ele teve que renunciar e a igreja colocou o *Diálogo* no index.



Galileu Galilei

Só foi absolvido em 1992 pelo papa João Paulo II.

As Leis de Kepler

Como mencionado na aula anterior, as previsões das posições dos planetas pelo modelo copernicano não eram tão boas assim. Isto, por que Copérnico não abriu mão de movimentos circulares uniformes.

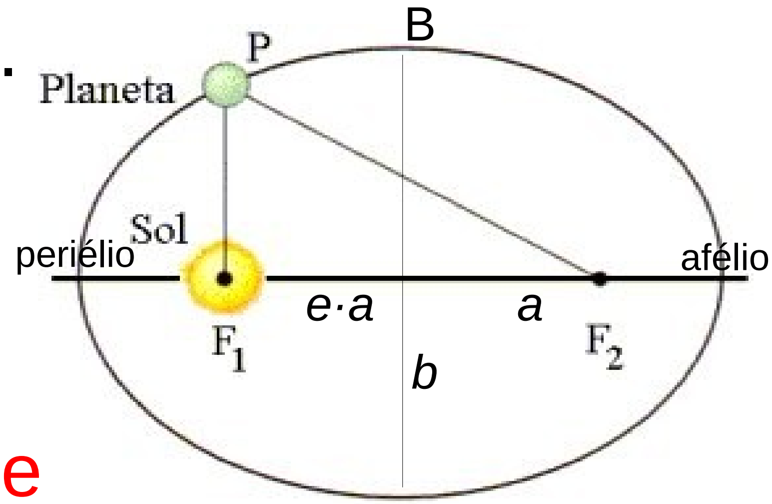
Quem conseguiu fazer o modelo bater melhor com os dados foi o astrônomo alemão Johannes Kepler, aluno de Tycho Brahe, sugerindo órbitas elípticas e estabelecendo três leis quantitativos sobre o movimento dos planetas (1609).

Johannes Kepler

Estes leis também dão uma dica quanto às causas físicas destes movimentos.

As Leis de Kepler

Primeira Lei de Kepler: Os planetas descrevem órbitas elípticas, com o Sol num dos focos.

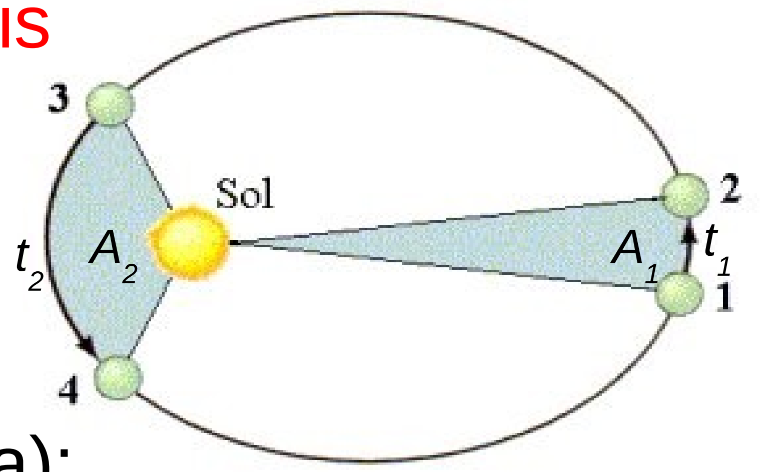


Alguns nomes e propriedades de elipses:

a, *b* = semi-eixos maior e menor,
$b/a = \sqrt{1-e^2}$, onde *e* = excentricidade
(0 para círculos, 1 para “retas”),
distância centro-foco: $e \cdot a = \sqrt{a^2-b^2}$,
posição do planeta mais próxima do Sol: periélio (perihélio)
posição mais distante: afélio (aphélio)
Área: πab
Para qualquer ponto P na elipse vale: $F_1P + F_2P = 2a$
=> O ponto B fica à distância *a* de cada um dos focos

As Leis de Kepler

Segunda Lei de Kepler (lei das áreas):
A linha Sol-planeta varre áreas iguais
em tempos iguais.
no desenho:
se $t_1 = t_2$, então $A_1 = A_2$

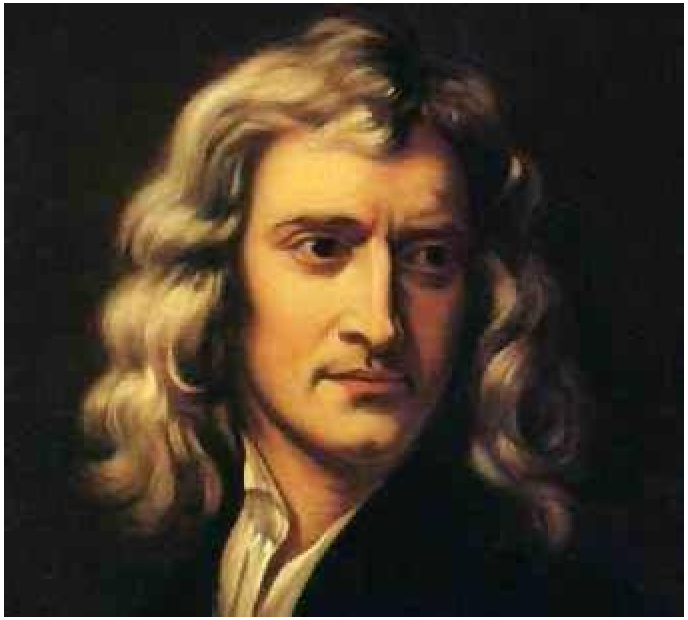


Terceira Lei de Kepler (lei harmônica):
Os quadrados dos períodos de revolucão, T, são proporcionais aos cubos das distâncias médias, ou semi-eixos maiores, a, do Sol aos planetas:
$T^2 = k \cdot a^3$, onde k é uma constante de proporcionalidade.

As Leis de Kepler também valem para os corpos menores orbitando o Sol (asteroides, cometas, TNOs ...).

Mecânica Newtoniana

Baseado nos conceitos de inércia e aceleração, introduzidos por Galileu, o físico e matemático Sir Isaac Newton (1642-1727), publicou na sua obra prima, *Philosophiae Naturalis Principia Matematica* (1687) as três leis fundamentais da mecânica, ou Leis de Newton (=> Fenômenos Mecânicos):



Sir Isaac Newton

1. Se $F = 0$, então $\mathbf{v}$ = constante (lei de inércia)
2. $\mathbf{F}_{tot}$ ou $\mathbf{F}_{res} = m \cdot \mathbf{a}$
3. $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ (actio = reactio)

Mecânica Newtoniana

Supondo, que as Leis de Kepler são válidas também para planetas hipotéticos em órbitas circulares (elipses com excentricidade zero), elas podem ser usadas para descobrir a forma da lei que o Sol aplica nos planetas e que mantém eles na órbita, a Lei da Gravitação:

Interpretando o círculo (raio r) como caso especial de uma elipse, os dois focos coincidem no centro do círculo (o Sol fica no centro da órbita), $e = 0$ e $a = b = r$

A segunda lei de Kepler implica em um movimento circular uniforme.

=> A força tem que ser a força centrípeta, apontando pro Sol e de módulo (m é a massa do planeta):

$$F = F_{\text{centrípeta}} = mv^2/r$$

Mecânica Newtoniana

Para o movimento circular uniforme, o periodo é
$T = 2\pi r/v$

Pela terceira lei de Kepler: $T^2 = 4\pi^2 r^2/v^2 = k\cdot r^3$

Multiplicando os dois lados por mv^2/kr^4:

$4\pi^2 m/kr^2 = k' \cdot m/r^2 = mv^2/r = F$ (onde $k' = 4\pi^2/k$)

=> A força é proporcional a m e a $1/r^2$.

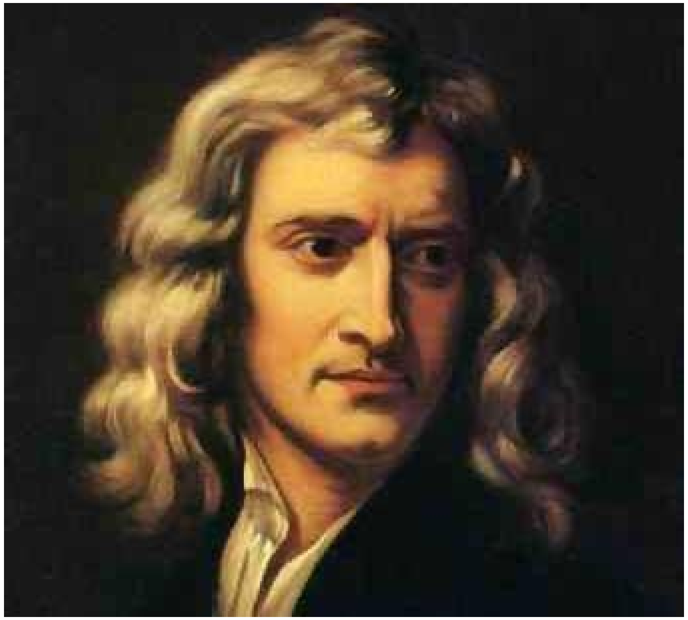
Pela terceira Lei de Newton, o planeta também aplica uma força da mesma natureza no Sol, lógicamente proporcional à massa do Sol M e também proporcional a $1/r^2$.
Ainda pela terceira Lei de Newton, a força procurada deve ser igual em módulo a esta força, então também proporcional a M.

Mecânica Newtoniana

=> A procurada lei da gravitação deve ser da forma:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

vetorial: $\mathbf{F} = -\frac{GMm\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$



Sir Isaac Newton

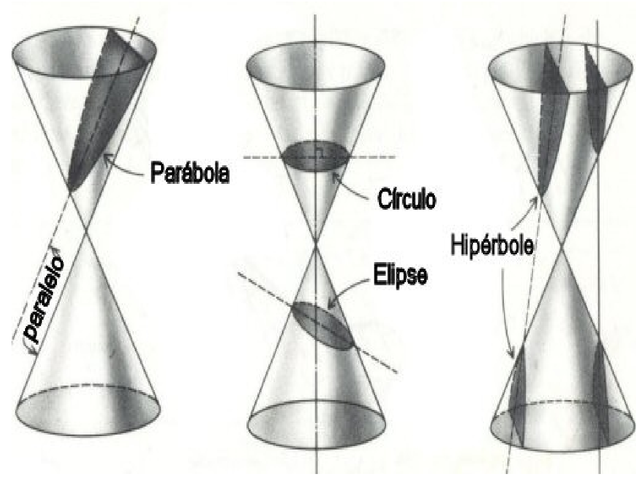
onde $G = k'/M = 4\pi^2/Mk = 6.673 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

é a constante gravitacional universal,
lei também encontrada pelo Newton.
(e ele ainda inventou o cálculo infinitesimal, e fez contribuições pra ótica, entre outros.)

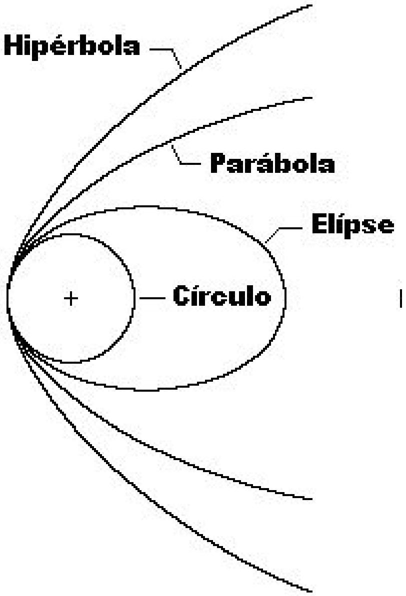
Mecânica Newtoniana

Usando as Leis de Newton + a lei da gravitação, dá pra calcular a órbita geral de um corpo de baixa massa, *m*, no campo gravitacional de uma massa maior, *M*
(=> Carroll & Ostlie, p. 39-45).

Obtém-se que a órbita é cônica (a interseção entre um plano e um cone):



=>



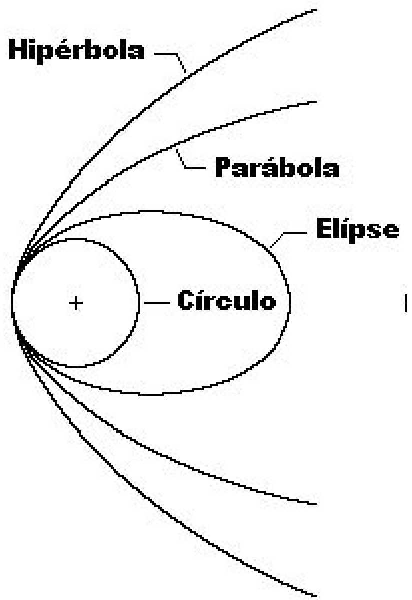
Mecânica Newtoniana

A órbita é elíptica (ou circular), parabólica ou hiperbólica, dependendo da energia total do corpo/sistema:

$E = U + K$, onde

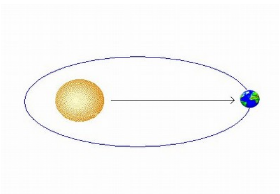
$U = -GMm/r$ = energia potencial,

$K = mv^2/2$ = energia cinética

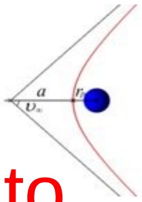


Mecânica Newtoniana

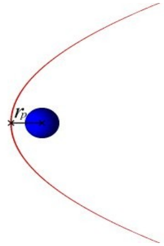
A órbita é elíptica (ou circular), se E é negativa (na verdade, $E = -MmG/2a$, => já) => $K < |U|$, ou a velocidade é menor que a velocidade de escape, $v_{esc} = \sqrt{2GM/r}$, => o corpo não consegue escapar do campo gravitacional da massa maior => estado ligado, caso dos planetas (1ª lei de Kepler), asteroides, cometas periódicos, luas de planetas, satélites, etc.



Ela é hiperbólica, se E é positiva => $v > v_{esc}$ => o corpo vem do infinito e escapa para o infinito, caso de cometas não-periódicos, ...,



e parabólica no caso limite quando $E = 0$ => $v = v_{esc}$ => o corpo também vai pro infinito.



Mecânica Newtoniana

As Leis de Newton também podem ser usadas para mostrar a conservação do momento angular orbital do planeta em relação ao Sol (na verdade, isto vale para qualquer força central),

para deduzir as Leis de Kepler,
i. e. a segunda Lei de Kepler se revela uma outra formulação da conservação do momento angular,

e para calcular os momento angular orbital, energias total, potencial gravitacional média (no tempo) e cinética média:

$L = |\mathbf{L}| = |m \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{v}| = m \cdot b \cdot \sqrt{GM/a},$

$E = -MmG/2a$

$\langle U \rangle = -MmG/a$

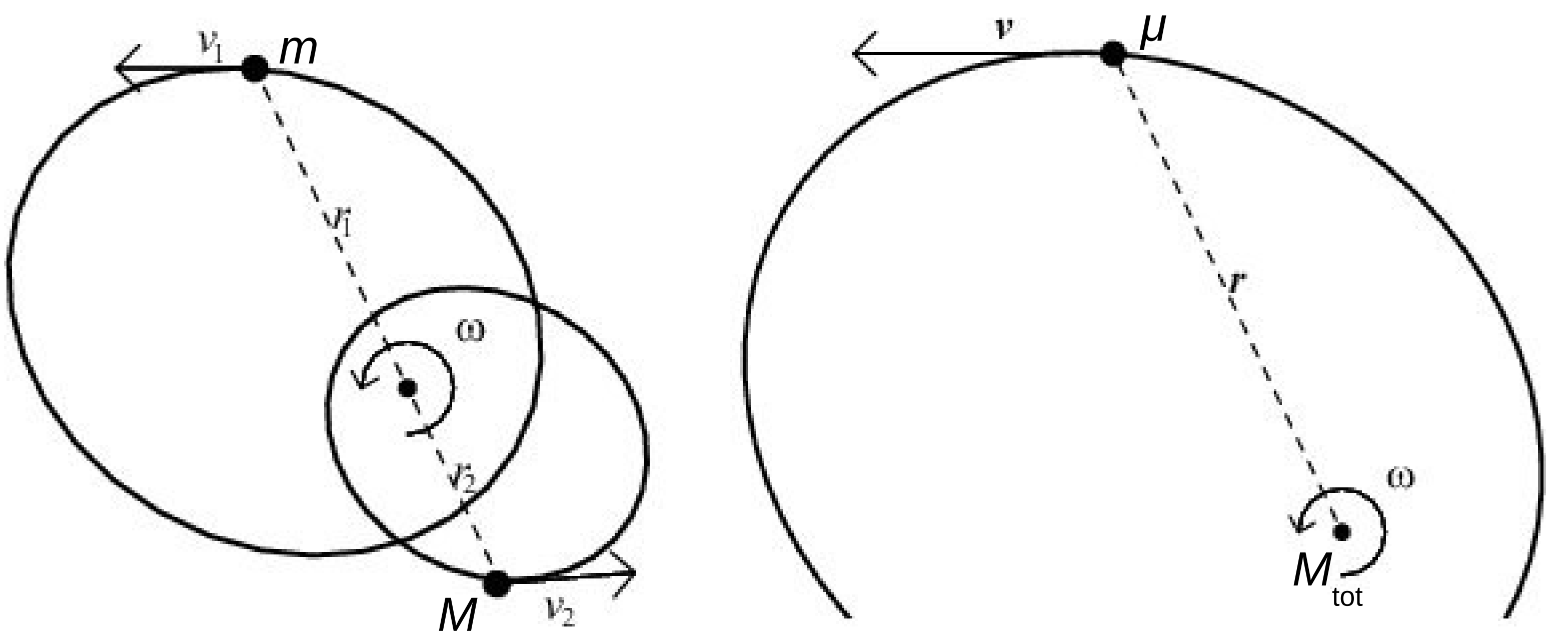
$\langle K \rangle = MmG/2a$

(=> quadro)

Mecânica Newtoniana

Na verdade, a menor massa não orbita a maior massa, mas ambos orbitam o centro de massa.

Felizmente, matematicamente, isto pode ser tratado como um corpo de massa μ orbitando uma massa imóvel M_{tot},



isto é, podemos usar todas as fórmulas vistas nos slides anteriores, substituindo m por μ e M por M_{tot},

Mecânica Newtoniana

onde $\mu = mM/(M+m)$ é chamada massa reduzida,
(ou $1/\mu = (M+m)/mM = 1/m + 1/M$)
$M_{tot} = M+m$, $\mathbf{r}_1 = (\mu/m)\cdot\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_2 = -(\mu/M)\cdot\mathbf{r}$ => $r_1 + r_2 = r$

Se $m \ll M$, como no caso dos planetas do sistema solar e o Sol, (o planeta de maior massa do sistema solar é o Júpiter, com menos de 0.001 vezes a massa do Sol)

então $\mu \to m$, $M_{tot} \to M$, $\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_2 \to 0$,
o erro que fizemos é desprezível.

O fato que a massa maior se movimenta também pode ser importante na detecção de exoplanetas (planetas em torno de outras estrelas que o Sol), em sistemas planeta-lua e em estrelas binárias (sistemas de duas estrelas).

O Teorema do Virial

Tinhamos visto que, para duas massas em órbita elíptica,

$-2\langle K \rangle = \langle U \rangle$, ou
$\langle E \rangle = ½ \cdot \langle U \rangle$

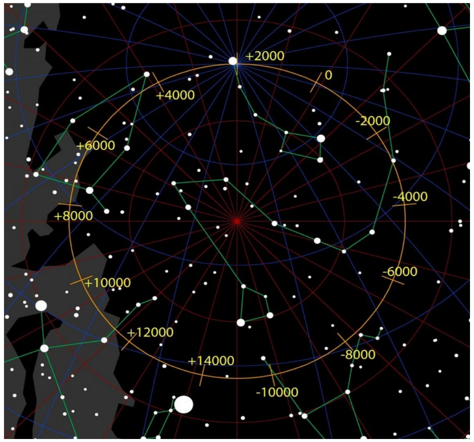
Na verdade, isto vale para qualquer sistema de partículas / corpos / ... gravitacionalmente ligado e em equilíbrio (se diz equilíbrio virial), sendo $\langle K \rangle$ a energia cinética total do sistema, $\langle U \rangle$ a energia potencial total e $\langle E \rangle$ a energia mecânica total, todas em média no tempo. (quadro) => Teorema do Virial.

É útil para determinar as massas totais de conjuntos de partículas, estrelas, galáxias, ...; estimar a energia produzida em estrelas; estimar a massa mínima de uma nuvem de gás para colapsar, estimar a energia transferida na colisão de galáxias, ...

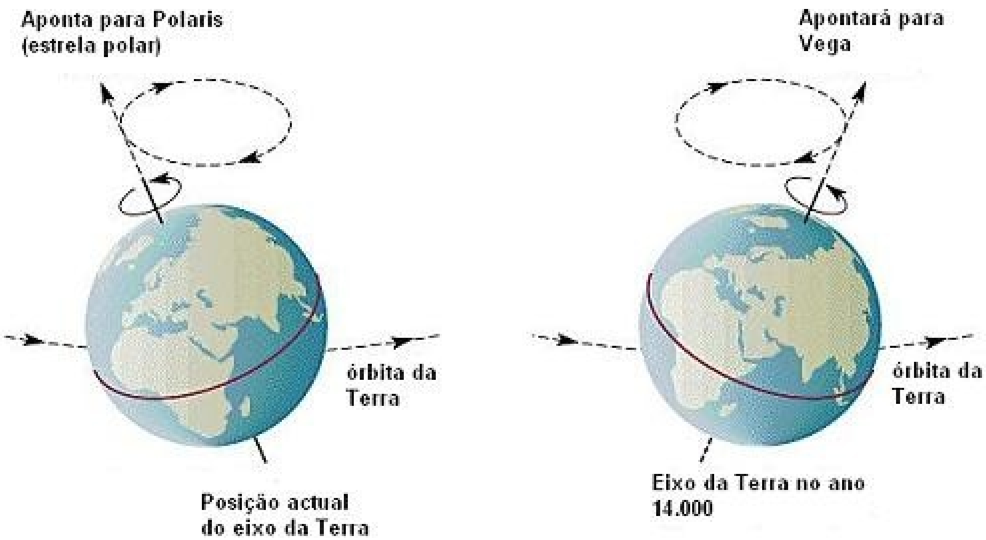
A Precessão Lunisolar

Só falta explicar a precessão lunisolar de 26'000 anos.

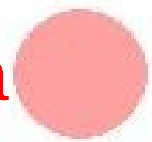
Lembrete

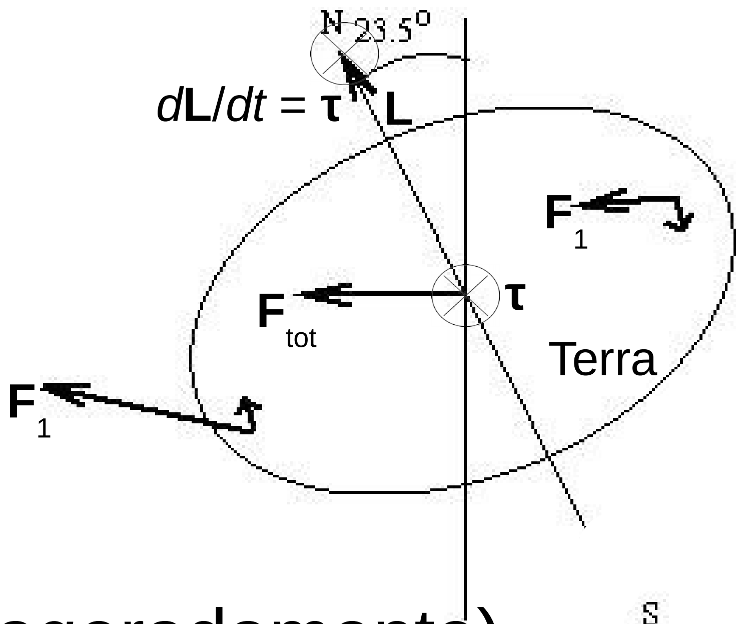


Na verdade, é a mudança da direção do eixo de rotação da Terra, melhor: do momento angular da rotação da Terra.

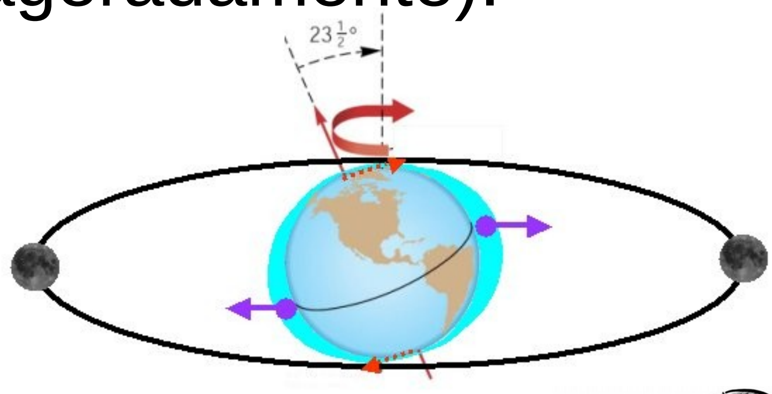


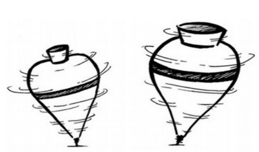
A Precessão Lunisolar

O torque **τ** responsável por esta mudança do momento angular **L** é devido à atração assimétrica que a Lua  (e o Sol => nome) aplica(m) na Terra, que é achatada pela própria rotação, como mostra a figura ao lado (exageradamente).



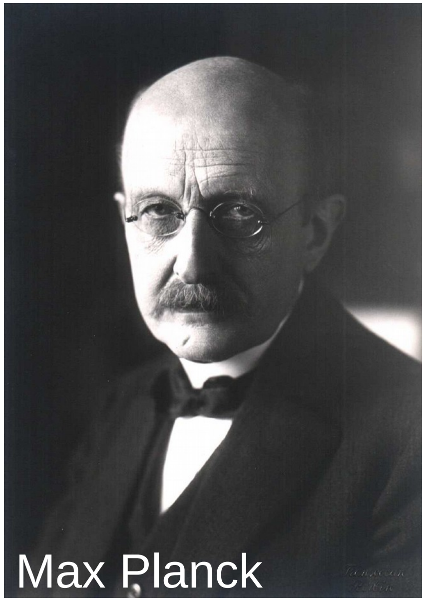
Como o torque é sempre perpendicular ao eixo de rotação, ele muda a direção, mas não o módulo de **L**.



É o mesmo efeito que faz girar o eixo de um pião. 

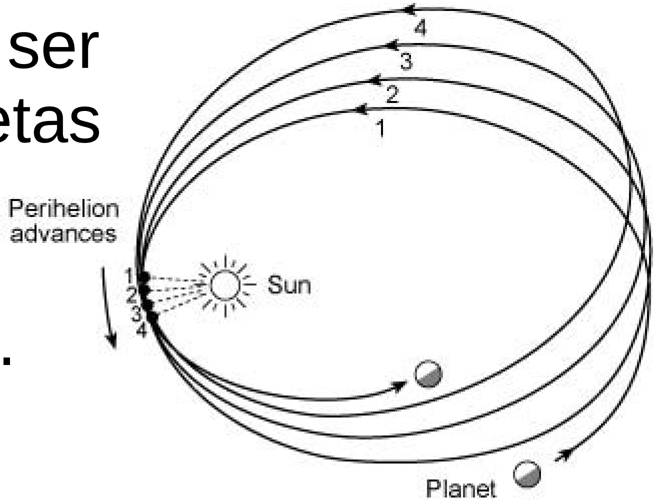
Relatividade

Em 1874, um dos professores de Max Planck, Philip Jolly, desaconselhou o aluno dele de estudar física, por que “não tinha mais nada para ser descoberto”.



Max Planck

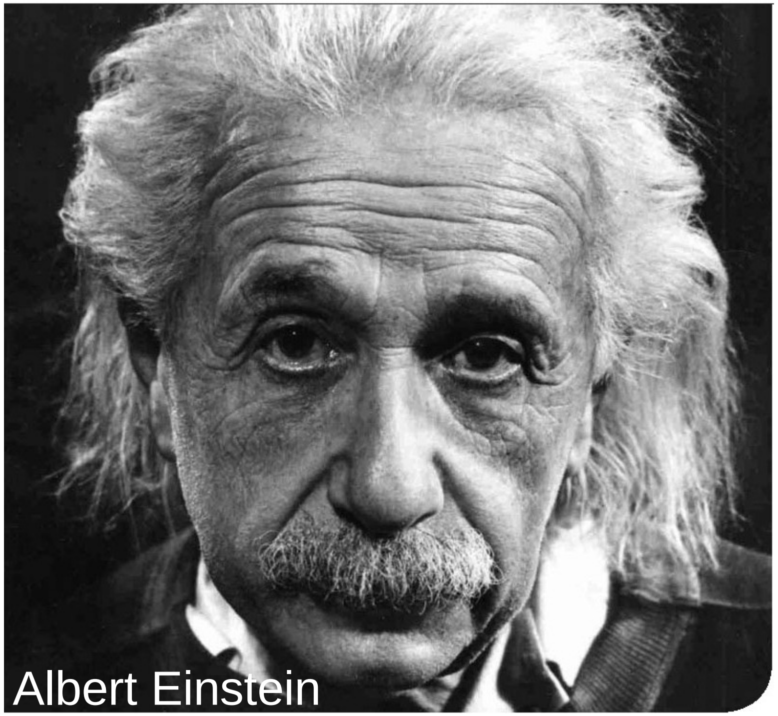
Só tinha alguns detalhes ainda não explicadas, como a fonte de energia do Sol (=> aula Sol), e o excesso da precessão do periélio da órbita de Mercúrio (43''/século; a precessão total é de 9'34''/século, mas os demais 8'49'' podiam ser explicados pela influência dos outros planetas e pela forma oblata do Sol), problemas, cuja resolução levou a um novo ramo da física, a Teoria da Relatividade de Einstein.



O próprio Max Planck acabou se tornando um dos fundadores da mecânica quântica.

Relatividade

A Teoria da Relatividade foi desenvolvida por Albert Einstein de 1905 (Relatividade Restrita) a 1915 (Relatividade Geral).



Albert Einstein

Ela afirma que as propriedades (geometria, eixo do tempo) de espaço e tempo dependem da situação do observador, do seu estado de movimento (velocidade, aceleração), e a sua posição em relação a massas altas.

Espaço e Tempo na Mecânica Newtoniana

Para entender melhor a necessidade desta nova teoria, é bom olhar pros conceitos de tempo e espaço da mecância newtoniana:

- Tempo: absoluto, homogêneo e isotrópico,
  i. e. igual em todos os lugares e em todas as direções
  - flui uniformemente, independente da posição e do
    estado de movimento do observador
    no sentido passado -> futuro

- Espaço: absoluto, homogêneo, isotrópico e euclidiano,
  tb. igual em todos os lugares e em todas as direções,
  a distância mais curta entre dois pontos é a reta

Sistema de Referência ou Referencial

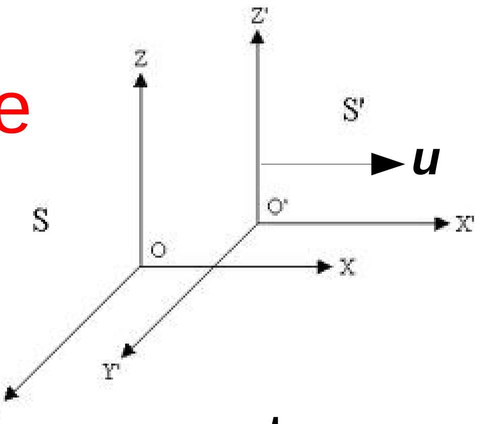
Sistema, naquele as Leis de Newton são válidas (exemplo: o Referencial Universal, ligado às galáxias).

Se um sistema A é um referencial, então B é um referencial, caso A e B se movimentam com velocidade constante um em relação ao outro.

=> Um laboratório na Terra não é um referencial, já que a Terra gira em torno do seu eixo e do Sol, que gira em torno do centro Galáctico, ...
=> Aceleração em relação ao Referencial Universal ~0.01 m/s^2.
Para aplicações com acelerações » 0.01 m/s^2, um laboratório na Terra pode ser usado como referencial.

A Transformação de Galileu

Considerando um sistema de inércia *S*'
se movimentando com velocidade constante
u = (u,0,0) em relação a um sistema *S*,
as origens dos dois sistemas coincidindo
em $t = 0$.



=> pode-se transformar as coordenadas de um ponto
r = (x,y,z) e o tempo usando a seguinte transformação:

$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$

=> $x' = x - ut$

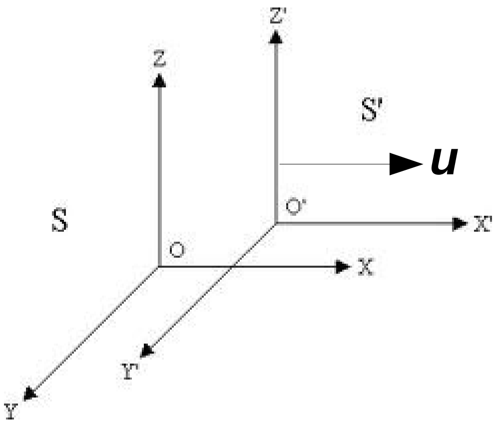
$y' = y$

$z' = z$

$t' = t$ (simultaneidade e tempo absolutos),

que é a transformação de Galileu.

A Transformação de Galileu



Velocidades se transformam assim:

$\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt' = d(\mathbf{r}\text{-}\mathbf{u}t)/dt = d\mathbf{r}/dt\text{-}\mathbf{u}t/dt = \mathbf{v}\text{-}\mathbf{u}$

=> $v_x' = v_x - u$

$v_y' = v_y$

$v_z' = v_z$

e acelerações: $\mathbf{a}' = d\mathbf{v}'/dt' = d(\mathbf{v}\text{-}\mathbf{u})/dt = d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a}$

=> Acelerações e, com isto, as Leis de Newton são invariantes na Transformação de Galileu.

=> Princípio de invariância de Galileu:

As leis fundamentais da Física são as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais.

Todos os sistemas de referência inerciais são equivalantes.

Não há um sistema de referência absoluto.

A Transformação de Galileu

Porém (final do século XIX):

Para as Leis do Eletromagnetismo, o princípio de invariância de Galileu parece falhar.
Exemplo: A força magnética $\mathbf{F} = q\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ aplicada em uma carga muda numa Transformação de Galileu.

=> As Leis do Eletromagnetismo parecem funcionar só em um determinado sistema de referência, que chamaram de éter.
Em particular, ondas eletromagnéticas devem se propagar pelo éter com a velocidade
$c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = 299\,792\,458$ m/s,
que pode ser derivada das Leis de Maxwell.

=> Conflito com o Princípio de invariância de Galileu.

O Experimento de Michelson-Morley

Em 1887 Michelson e Morley tentaram medir a velocidade da Terra em relação ao éter, comparando a velocidade da luz em direções perpendiculares da rosa de vento.

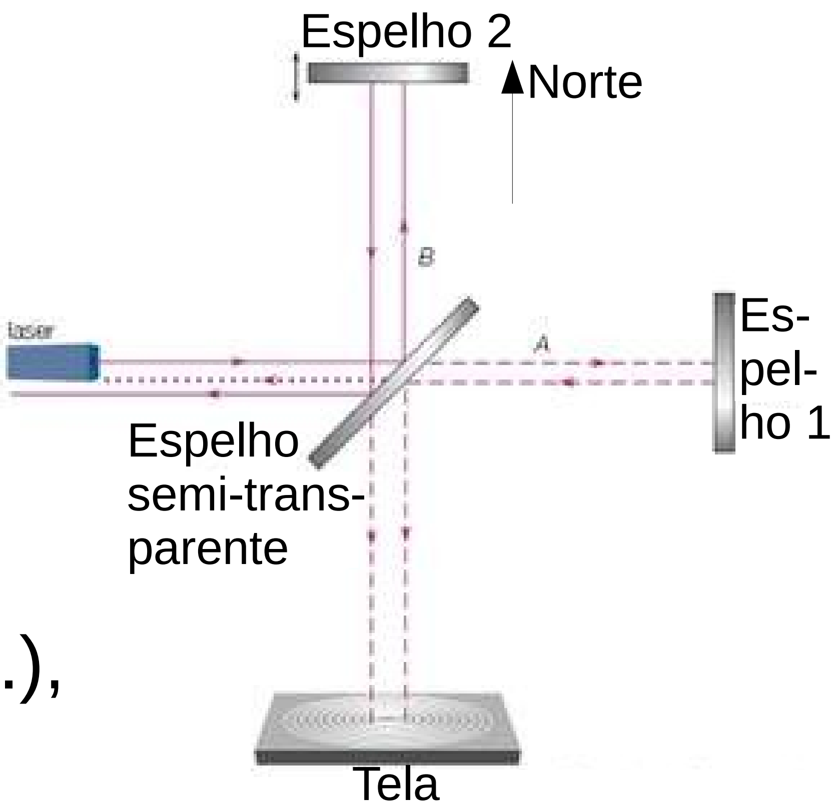
Albert Abraham Michelson

Edward Williams Morley

O Experimento de Michelson-Morley

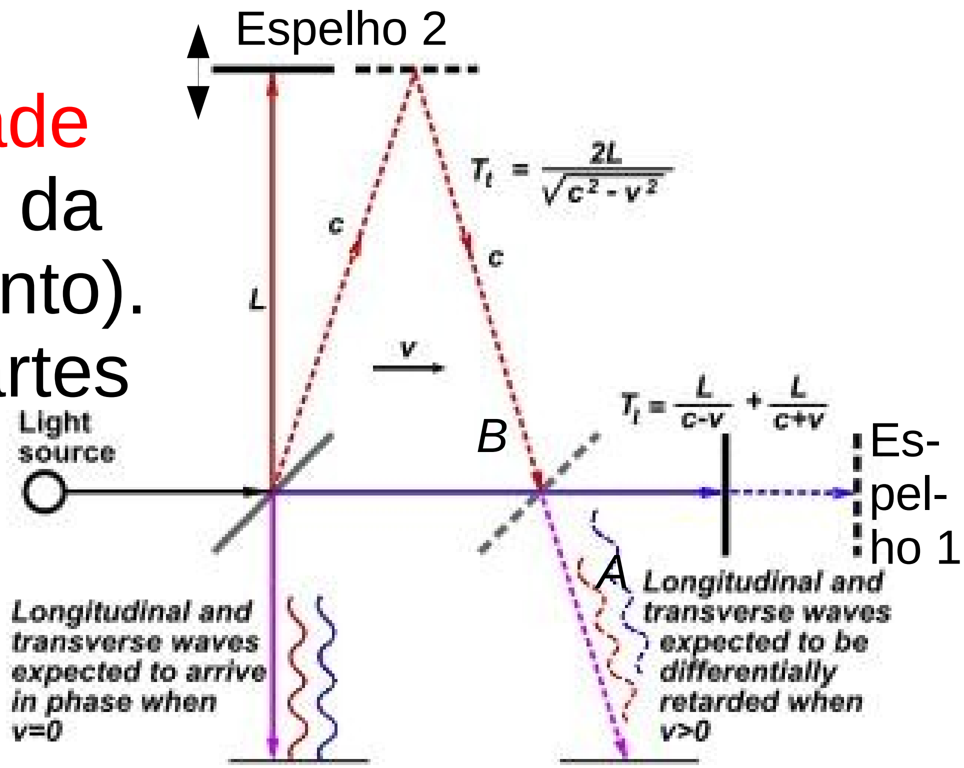
Eles usaram um interferômetro, cujo um braço viaja junto com a superfície da Terra (na direção leste-oeste), e o outro, com comprimento ajustável, perpendicular a este (norte-sul).

Luz coerente dividido no espelho semi-transparente (e.s.t.), fazendo caminhos *A* e *B*, e se re-juntando depois, deveria produzir um padrão de interferência na tela, dependendo da diferença entre os caminhos (óticos), Δs.



O Experimento de Michelson-Morley

Calculamos os tempos de percurso, onde v é a velocidade do interferômetro (da rotação da Terra na latitude do experimento). Só precisamos calcular as partes e.s.t. - espelho 1 ou 2 - e.s.t., já que os raios fazem o resto do caminho juntos:



$t_A = L/(c\text{-}v) + L(c+v)$

t_B (calculado a partir da componente na direção N-S)

$= 2 \cdot L/(c^2\text{-}v^2)^{½}$

diferença: $\Delta t = t_A - t_B = L/(c\text{-}v) + L(c+v) - 2 \cdot L/(c^2\text{-}v^2)^{½}$

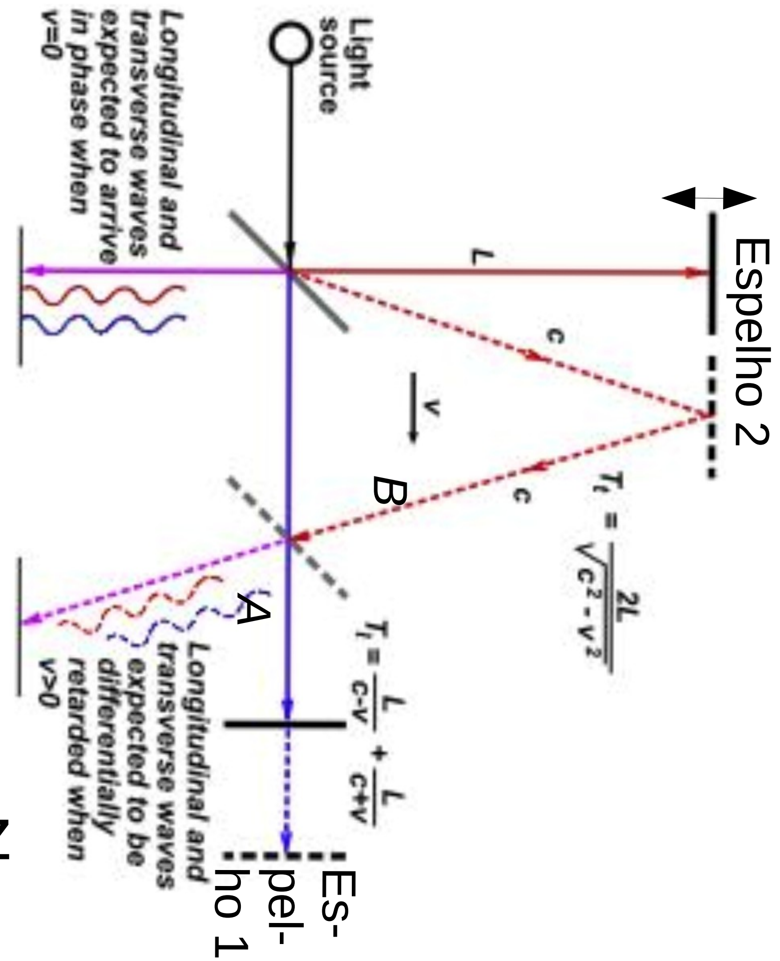
$= 2 \cdot L/(c^2\text{-}v^2) \cdot ((c+v)/2 + (c\text{-}v)/2 - (c^2\text{-}v^2)^{½}) = 2 \cdot L/(c^2\text{-}v^2) \cdot (c - (c^2\text{-}v^2)^{½})$

$\approx 2 \cdot L/c^2 \cdot (c - [c - ½v^2/c]) = Lv^2/c^3$

O Experimento de Michelson-Morley

diferença: $\Delta t = Lv^2/c^3$

Ajustando o espelho 2 até não ter padrão de interferência e girando o interferômetro por 90°, deveria surgir um padrão que corresponde a uma diferença de percurso do dobro deste valor.



Para braços de 1 m, um laser com c.d.o. λ ~ 500 nm, ou $\nu \sim 6 \cdot 10^{14}$ Hz e $v \sim 3 \cdot 10^4$ m/s:

$\Delta t = 0.04\ \nu^{-1}$, ou $\Delta s = 0.04\ \lambda$, ou $\Delta N = 0.04$.

Diferença pequena, mas deve gerar um padrão de interferência detectável.

O Experimento de Michelson-Morley

Porém, Michelson e Morley não acharam diferença de padrão nemhum!

Fizeram o experimento aumentando o tamanho dos braços, em vários horários e épocas do ano, mas nada!

Albert Abraham Michelson

Edward Williams Morley

A luz se propaga com a mesma velocidade para sul, norte, oeste e leste!

Não se detecta movimento da Terra em relação ao éter!

Os Postulados de Einstein

Isto levou Einstein a fazer os seguintes dois postulados para a nova teoria:

- O Princípio da Relatividade: As leis da física são as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais.

- A Constância da Velocidade da Luz: A luz se movimenta pelo vácuo com uma velocidade constante c, que é independente do movimento da fonte da luz, ou do observador.

Outra condição:

- Princípio de correspondência: Para velocidades baixas, $u \ll c$, a nova teoria deve tender à teoria newtoniana.

=> Encontrar novas Transformações que garantem isto.

Atividade
Relógio de Luz

Física Contemporânea

Universidade Federal do ABC

FIM PRA HOJE