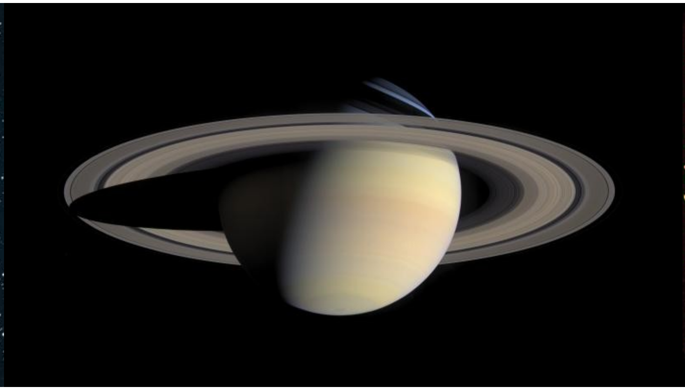
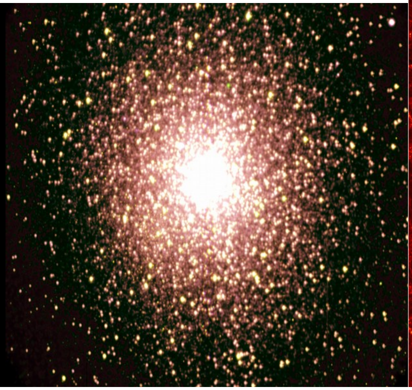
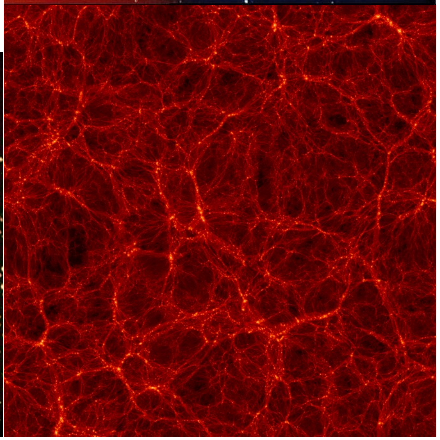
Física Contemporânea

03. Fenômenos da Relatividade Restrita e da Luz

Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/Astro.html



Lembrete: Os Postulados de Einstein

Isto levou Einstein a fazer os seguintes dois postulados para a nova teoria:

- O Princípio da Relatividade: As leis da física são as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais.

- A Constância da Velocidade da Luz: A luz se movimenta pelo vácuo com uma velocidade constante c, que é independente do movimento da fonte da luz, ou do observador.

Outra condição:
- Princípio de correspondência: Para velocidades baixas, $u \ll c$, a nova teoria deve tender à teoria newtoniana.

=> Encontrar novas Transformações que garantem isto.

Simultaneidade

Na mecânica Newtoniana, o tempo é absoluto, isto é, se um evento ocorre no tempo *t* em um referencial, ele ocorre no tempo *t* em todos os referencias.
Se um outro evento também ocorre no tempo *t* no primeiro referencial, ou seja, é simultâneo ao primeiro evento, ele ocorre no tempo *t* em todos os referencias.

=> Os dois eventos são simultâneos em todos os referencias.

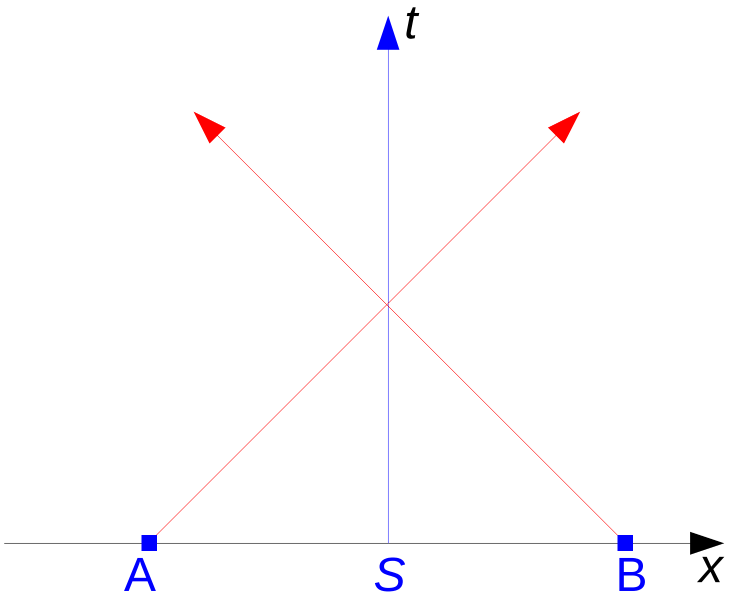
=> A simultaneidade também é absoluta.

E na Relatividade (Restrita)?

Simultaneidade

Primeiro temos que definir simultaneidade

A → *S* ← B



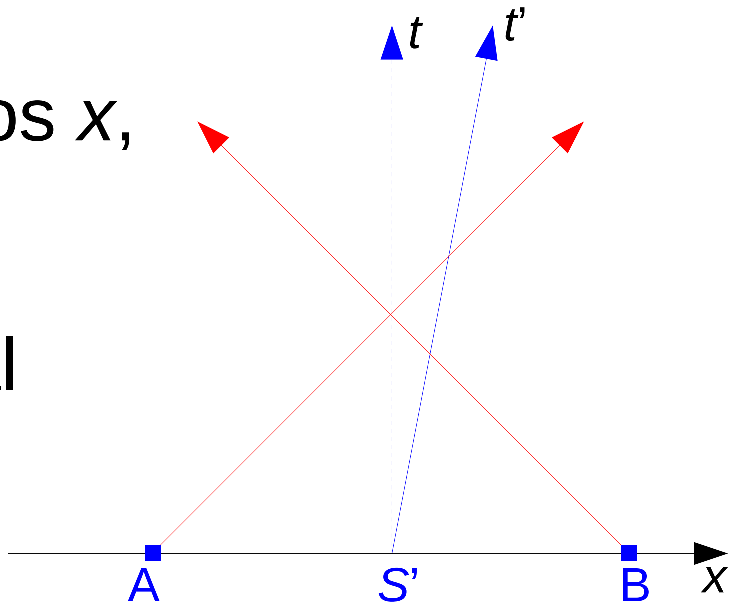
!!! Atenção, o eixo do tempo é vertical, e o dos *x*, horizontal

Parece uma definição razoável, dizer que “Dois eventos A e B são simultâneos, se sinais (por exemplo, de som) provenientes deles e propagando-se com a mesma velocidade atingirem um observador *S* equidistante a eles (exatamente no meio entre eles) no mesmo instante.”

Desta maneira podemos sincronizar relógios em todas as posições e assim definir o tempo que vale para o espaço inteiro (melhor: para o referencial inteiro).

Simultaneidade

Se um outro observador *S'* está em movimento em relação a *S*, i. e. com velocidade *u* na direção dos *x*, ele não receberá os dois sinais ao mesmo tempo, mas isto não significa nada, já que, no referencial dele, os sinais não estavam se propagando com a mesma velocidade.

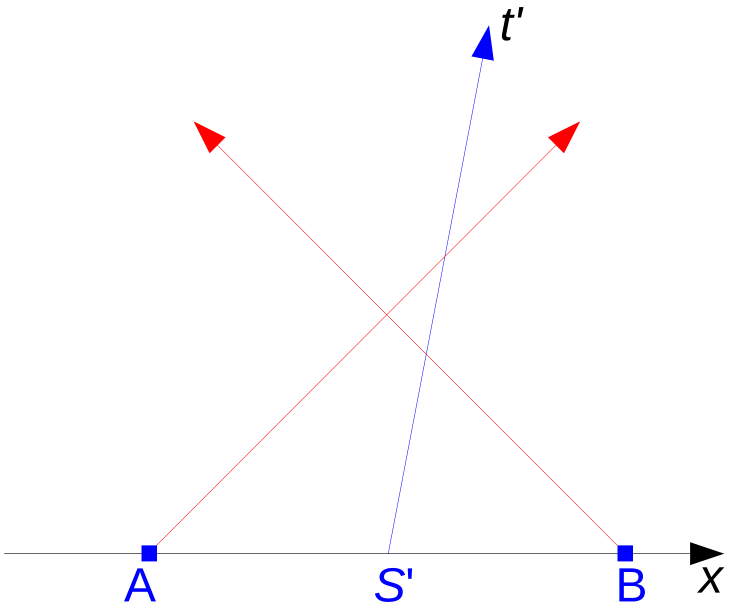


Simultaneidade

Peraí, mas se os sinais são sinais de luz, eles estão se propagando, sim, com a mesma velocidade, *c*, no referencial de *S*'.

No referencial de *S*', os eventos não são simultâneos!

Na Relatividade, simultaneidade não é absoluta, e o tempo, também não!

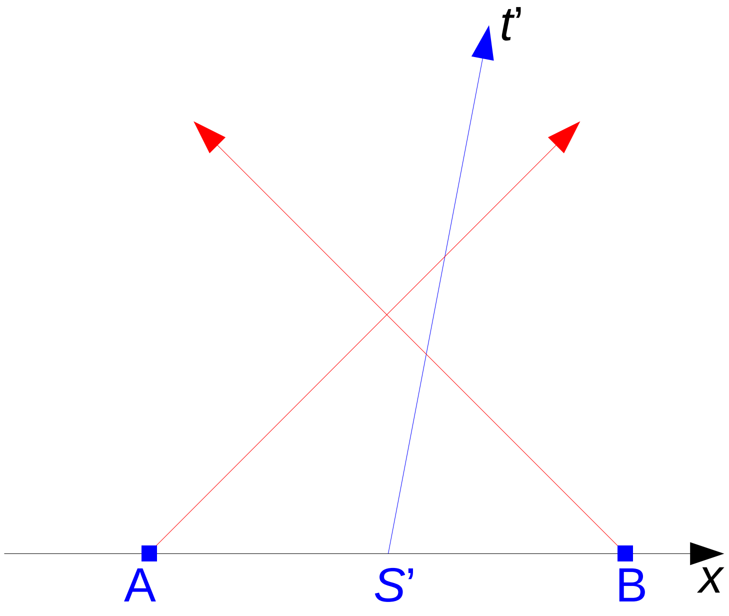


Dois eventos que são simultâneos em um referencial não necessariamente o são em um outro referencial.

Cada referencial tem seu próprio (eixo de) tempo.

Simultaneidade

No caso, se colocamos relógios em A e B, sincronizados no referencial *S*, em *S*' o relógio B (aquele mais no direção de **u** em relação ao outro) é adiantado em relação ao relógio A.



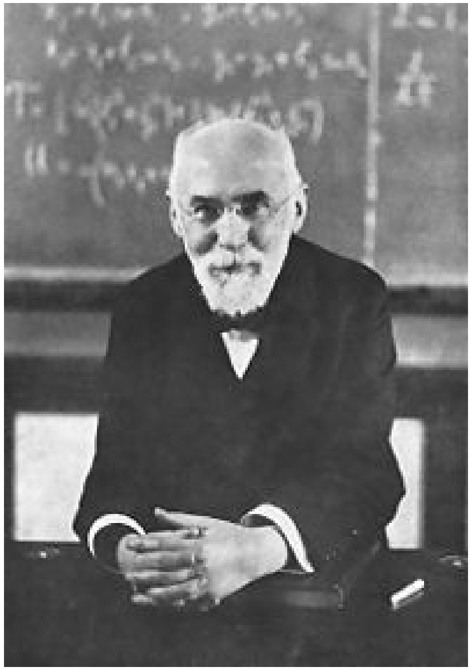
Uma vez que conhecemos as transformações, será fácil determinar, por quanto o relógio B é adiantado.

A Transformação de Lorentz

Na Relatividade Restrita, a transformação de coordenadas na troca de referencial, i. e. no caso “Sistema *S*' se movimentando com **u** = (*u*,0,0) em relação a *S*” é realizada pela Transformação de Lorentz (1904):

Esta transformação é às vezes chamada *boost* pela velocidade **u** (neste caso, na direção dos *x*).

Conseguimos achar estas transformações pelo experimento mental do relógio de luz (=> aula anterior).



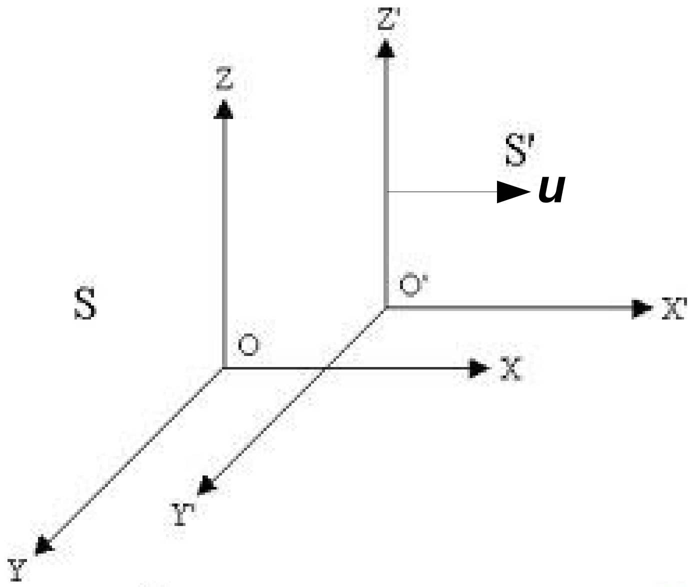
Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)

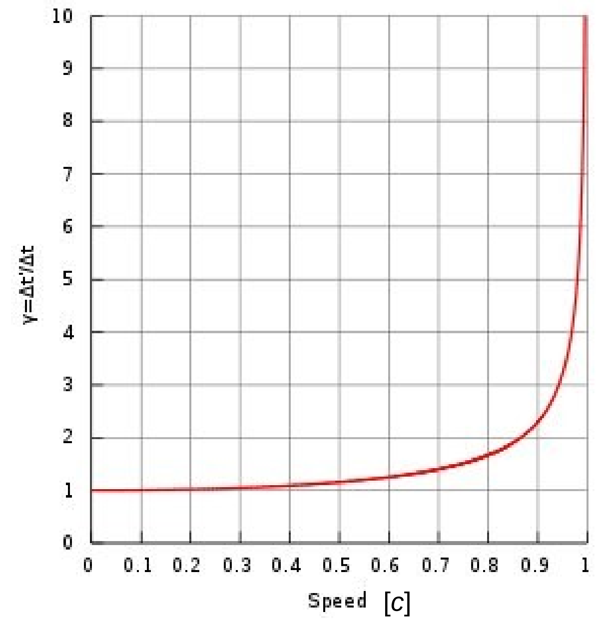
A Transformação de Lorentz

Sistema *S*' se movimentando com **u** = (*u*,0,0) em relação a *S*.

Demos uma olhada na Transformação de Lorentz:

$x' = \gamma\cdot(x-ut)$
$y' = y$
$z' = z$
$t' = \gamma\cdot(t-ux/c^2)$,
onde $\gamma := 1/\sqrt{1-u^2/c^2} = 1/\sqrt{1-\beta^2}$
$=$ fator de Lorentz, $\beta := u/c$
$\gamma(u=0) = 1$
$\gamma(u=c) = \infty$





A Transformação de Lorentz

Exercício: mostre que, aplicando esta transformação em (x',y',z',t') usando $-u$ em lugar de u, obtém-se (x,y,z,t) de volta.

=> A transformação inversa é a mesma,
substituindo u por $-u$, como deveria ser,
já que S se movimenta com $-\mathbf{u}$ em relação a S'.

Exercício 2: Mostre que, para $u \ll c$, esta transformação se torna a transformação de Galileu.

A Transformação de Lorentz

E a Invariância da Velocidade da Luz?

Pela maneira, como achamos a transformação (pelo relógio de luz), ela deveria garantir a invariância de c, pelo menos na geometria do relógio de luz.

E em outras direções, por exemplo, na direção dos x?

tomando um fóton, que estava na origem de S e S' em $t = 0$, viajando na direção $+x$.

Após um tempo t, ele está em ($x=ct$,0,0).

E no sistema S': $t' = \gamma\cdot(t-ux/c^2)$, $x' = \gamma\cdot(x-ut)$
=> neste sistema, o fóton viajou com velocidade
$x'/t' = \cancel{\gamma}(x-ut)/\cancel{\gamma}(t-ux/c^2) = (ct-ut)/(t-uct/c^2) = c$
Também com c!

A Transformação de Lorentz

E a Invariância da Velocidade da Luz?

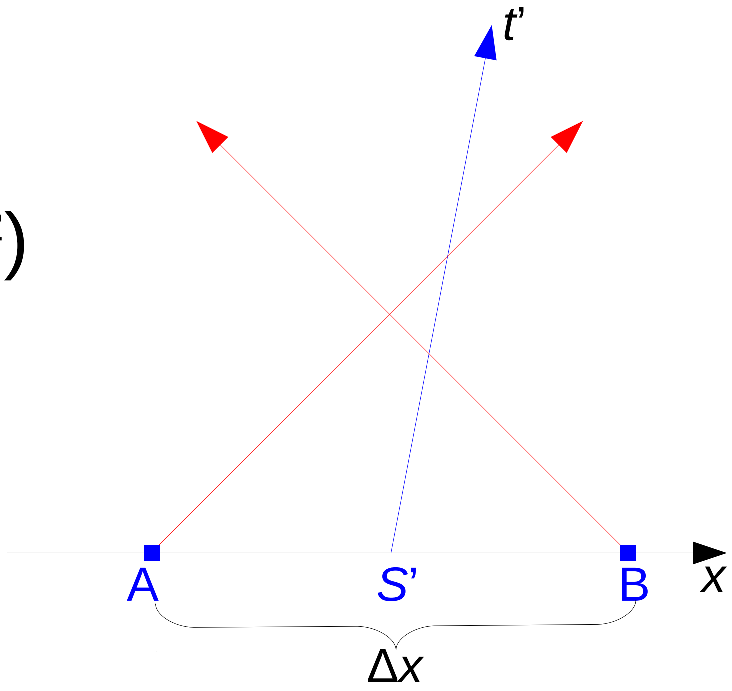
Exercício: Mostre a invariância da velocidade da luz para luz viajando na direção -*x* e na direção *y*.

Para direções quaisqueres é um pouco mais laboroso (=> vide quadro).

A Transformação de Lorentz

Voltando pros relógios A e B,
B é adiantado em relação a A
por:

$$-(t_B' - t_A') = \gamma(t_A - ux_A/c^2) - \gamma(t_B - ux_B/c^2)$$
$$= \gamma(t_A - t_B) + \gamma(ux_B/c^2 - ux_A/c^2)$$
$$= \gamma u/c^2 \cdot (x_B - x_A) = \gamma u/c^2 \cdot \Delta x$$
$$= \gamma u/c^2 \cdot \gamma\Delta x' = \gamma^2 u/c^2 \cdot \Delta x'$$



=> Quanto maior são $u = |\mathbf{u}|$ e a distância entre os relógios (na direção de **u**), tanto mais eles são desincronizados em S'.

A Transformação de Lorentz

A transformação de Lorentz geral é dada por
- um *boost* por uma velocidade **u** em uma direção qualquer (que torna as transformações de *x*, *y* e *z* mais chatas),
- mais uma rotação do sistema de coordenadas (como aprendida na geometria analítica),
- e um possível deslocamento da origem (adição de um vetor, caso as origens dos dois sistemas não coincidem em $t = 0$).

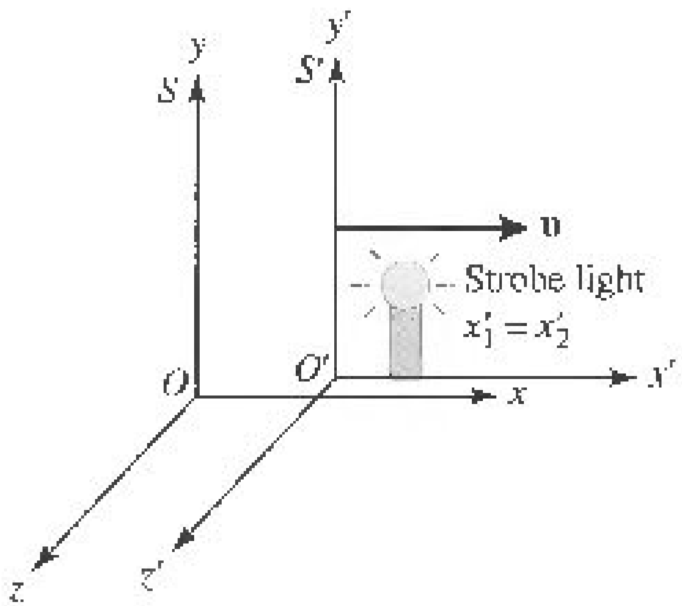
=> Matematicamente laboroso

Felizmente, a maioria dos fenômenos interessantes podem ser ilustrados usando a geometria adotada até agora: um *boost* na direção dos x, sem rotação ou deslocamento. Continuaremos usando esta geometria quase sempre.

Relatividade Restrita

Dilatação do Tempo

Supondo uma lâmpada que viaja junto com *S*' (*S*' é seu sistema de repouso), e que pisca duas vezes em t_1' e t_2':



Em *S*: $\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \cdot (t_2' - t_1' + (x_2' - x_1')u/c^2)$

mas $x_2' - x_1' = 0$, já que *S*' viaja junto.

$\Rightarrow \Delta t = \gamma \cdot (t_2' - t_1') = \gamma \Delta t' \geq t'$

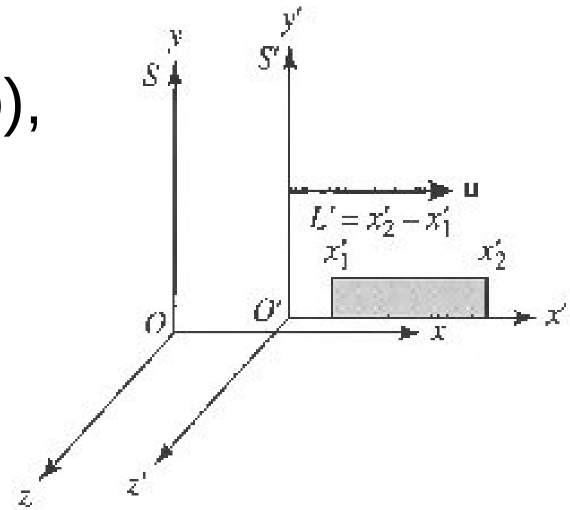
Em *S* passa mais tempo entre os pulsos.
=> Dilatação do tempo.

O sistema de repouso é aquele, naquele o tempo entre os dois eventos é o mais curto.
O tempo deste sistema, *t*', é o tempo próprio da lâmpada.

Relatividade Restrita

Contração de Comprimentos

Supondo uma barra com comprimento L' viajando junto com S' (seu sistema de repouso), L' obviamente é $x_2'-x_1'$, a distância entre suas extremidades no instante $t_1' = t_2' = 0$.



$\Rightarrow L' = x_2'-x_1' = \gamma\cdot(x_2-x_1 - u(t_2-t_1))$

Para saber o comprimento em S, L, temos que medir x_2-x_1 em S ao mesmo tempo, quando $t_1 = t_2$

$\Rightarrow L' = \gamma\cdot(x_2-x_1 - u\cancel{(t_2-t_1)}) = \gamma L \Rightarrow L = \gamma^{-1}L' \leq L'$

=> L é mais curto que L'.

=> Contração do comprimento.

O sistema de repouso é aquele, naquele L é o mais comprido.

O tempo deste sistema, t', é o tempo próprio da barra.

Relatividade Restrita

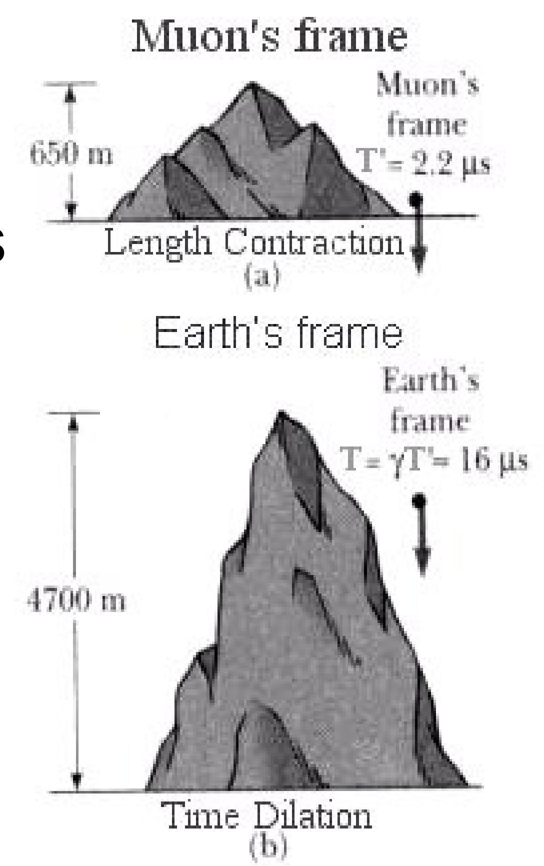
Dilatação do Tempo e Contração de Comprimentos

Formulado de jeito popular:
"relógios em movimento rodam mais lentamente", resp.
"réguas em movimento são mais curtas".

Os dois efeitos são complementares.

Exemplo: múons, μ, têm tempo de vida de 2.2 μs.
=> Os μ cósmicos, produzidos por raios cósmicos no topo da atmosfera da Terra, e descendo com velocidade $0.9952 \cdot c$, deveriam ter decaído até chegar na Terra, mas eles sobrevivem e são detectadas por causa da Dilatação do Tempo.

No referencial deles, a sobrevivência se deve à Contração do Caminho até a Terra.



Relatividade Restrita

Transformação de Lorentz de Velocidades

Conseguimos calcular a transformação de velocidades. Sendo **v** uma velocidade (de um corpo ou partícula) em *S*, e **v**', a transformada de Lorentz de **v**, isto é, a velocidade do corpo ou partícula em *S*', e **u** = (u,0,0), a velocidade relativa entre *S* e *S*' (como sempre) obtemos (=> quadro):

$$v_x' := \Delta x'/\Delta t' = (v_x - u) / (1-uv_x/c^2)$$
$$v_y' := \Delta y'/\Delta t' = v_y / \gamma(1-uv_x/c^2)$$
$$v_z' := \Delta z'/\Delta t' = v_z / \gamma(1-uv_x/c^2)$$

Relatividade Restrita

Transformação de Lorentz de Velocidades

A transformação inversa é a mesma, trocando u por $-u$ (como sempre):

$$v_x = (v_x' + u) / (1+uv_x'/c^2)$$
$$v_y = v_y' / \gamma(1+uv_x'/c^2)$$
$$v_z = v_z' / \gamma(1+uv_x'/c^2),$$

e para velocidades u e v baixas ($\ll c$), re-obtemos a transformação de Galileu, como exigido pelo princípio de correspondência (simples de mostrar).

Relatividade Restrita

Transformação de Lorentz de Velocidades

Chamando de $\gamma_u = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$, o γ de antes.

O índice u é importante para distinguir este γ dos γ das velocidades v e v', $\gamma_v = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ e $\gamma_{v'} = 1/\sqrt{1-v'^2/c^2}$.

Usando $\gamma_{v'} = \gamma_u \gamma_v (1-uv_x/c^2)$

obtemos as relações:

$\gamma_v \gamma_u (v_x - u) = \gamma_{v'} v_x'$

$\gamma_v v_y = \gamma_{v'} v_y'$

$\gamma_v v_z = \gamma_{v'} v_z'$

que serão úteis na próxima aula.

Relatividade Restrita

Transformação de Lorentz de Velocidades

Já que, nesta geometria, **u** é na direção dos x, $uv_x = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, e podemos achar a transformação por um *boost* por um velocidade **u** em qualquer direção:

$v_{\parallel\mathbf{u}}' = (v_{\parallel\mathbf{u}} - u) / (1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/c^2)$

$\mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}}' = \mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}} / \gamma(1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/c^2)$,

onde $v_{\parallel\mathbf{u}}$ é a componente de **v** paralela a **u**, e $\mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}}$, o vetor 2D composto das componentes perpendiculares a **u**,

e as relações:

$\gamma_{v'} = \gamma_u\gamma_v(1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/c^2)$

$\gamma_u\gamma_v(v_{\parallel\mathbf{u}} - \mathbf{u}) = \gamma_{v'} v_{\parallel\mathbf{u}}'$

$\gamma_v\mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}} = \gamma_{v'}\mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}}'$

Relatividade Restrita

Adição de Velocidades na Relatividade

Adicionar velocidades $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ dá no mesmo que considerar um objeto deslocando-se com $\mathbf{v}_2$ em relação a *S*, e observá-lo de um referencial *S*' movimentando-se com -$\mathbf{v}_1$ em relação a *S* (=> atividade 3).
=> transformar $\mathbf{v}_2$ por um boost pela velocidade -$\mathbf{v}_1$
(tomando $\mathbf{v}_1$ na direção dos *x*):

$$v_{\mathrm{tot},x} = (v_{2,x} + v_{1,x}) / (1+v_{1,x}v_{2,x}/c^2)$$
$$v_{\mathrm{tot},y} = v_{2,y} / \gamma(1+v_{1,x}v_{2,x}/c^2)$$
$$v_{\mathrm{tot},z} = v_{2,z} / \gamma(1+v_{1,x}v_{2,x}/c^2)$$

Exemplo: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = (0.999c,0,0)$ => $\mathbf{v}_{\mathrm{tot}} = (0.9999995c,0,0)$
Independente de quanto se “adiciona velocidade” (acelera), nunca se alcança a velocidade da luz!

Relatividade Restrita

Transformação de Lorentz de Acelerações

De maneira análoga, conseguimos calcular **a**' (quadro):

$a_x' := dv_x'/dt' = a_x \,/\, \gamma^3(1-uv_x/c^2)^3$

$a_y' := dv_y'/dt' = a_y \,/\, \gamma^2(1-uv_x/c^2)^2 + a_x uv_y/c^2 \,/\, \gamma^2(1-uv_x/c^2)^3$

$a_z' := dv_z'/dt' = a_z \,/\, \gamma^2(1-uv_x/c^2)^2 + a_x uv_z/c^2 \,/\, \gamma^2(1-uv_x/c^2)^3$

u em qualquer direçao:

$a_{\parallel\mathbf{u}}' := dv_{\parallel\mathbf{u}}'/dt' = a_{\parallel\mathbf{u}} \,/\, \gamma^3(1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/c^2)^3$

$\mathbf{a}_{\perp\mathbf{u}}' := d\mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}}'/dt' = \mathbf{a}_{\perp\mathbf{u}} \,/\, \gamma^2(1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/c^2)^2 + a_{\parallel\mathbf{u}} u\mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}}/c^2 \,/\, \gamma^2(1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/c^2)^3$

!!! $\mathbf{a}' \neq \mathbf{a}$

Esta aceleração não é muito importante. Na próxima aula conheceremos uma grandeza chamada quadri-aceleração que tem mais importância na relatividade restrita (mas que também não é invariante na transformação de Lorentz).

Relatividade Restrita

O Efeito Doppler para a Luz


Christian Doppler
(1803–1853)

Lembrete: O Efeito Doppler para o Som.
É a mudança da frequência de uma onda sonora da fonte para um observador em movimento em relação à fonte, devido ao fato, de que crestas subsequentes da onda são emitidas em distâncias diferentes até o observador, fazendo que se soma ou subtrai ao período de oscilação da onda (o inverso da frequência), a diferença de tempo de viagem das crestas da fonte até o observador.

Para calculá-lo, temos que levar em conta as velocidades de fonte e observador em relação ao meio de propagação da onda (o ar).

Relatividade Restrita

O Efeito Doppler para a Luz

Lembrete: O Efeito Doppler para o Som

Dando nomes:

f_0: frequência da onda no referencial da fonte,

f: frequência no referencial do observador

$\Delta f = f - f_0$: mudança de frequência de fonte para observador

$\Delta f/f$: mudança relativa de frequência

c_s: velocidade da onda (do som) em relação ao meio de propagação (o ar), ~300 m/s.

v_s: velocidade da fonte em relação ao meio (na direção longe do observador)

v_r: velocidade do observador em relação ao meio (na direção da fonte)

Relatividade Restrita

O Efeito Doppler para a Luz

Lembrete: O Efeito Doppler para o Som

fonte em movimento: $f = \left(\frac{c_s}{c_s \pm v_s}\right) f_0$

$v_s \ll c_s$: $\Delta f/f_0 = (f - f_0)/f_0 \approx -v_s/c_s$

observador em movimento: $f = \left(\frac{c_s \pm v_r}{c_s}\right) f_0$

$v_r \ll c_s$: $\Delta f/f_0 \approx v_r/c_s$

=> ambos em movimento: $f = \left(\frac{c_s \pm v_r}{c_s \pm v_s}\right) f_0$

$v_s, v_r \ll c_s$: $\Delta f/f_0 \approx (v_r - v_s)/c_s = v_{rel}/c_s$

Relatividade Restrita

O Efeito Doppler para a Luz

Mas para a luz, não temos um meio de propagação (já que Michelson e Morley mataram o éter).

Esperamos que, neste caso, o efeito Doppler seja uma função apenas da velocidade relativa entre fonte e observador.

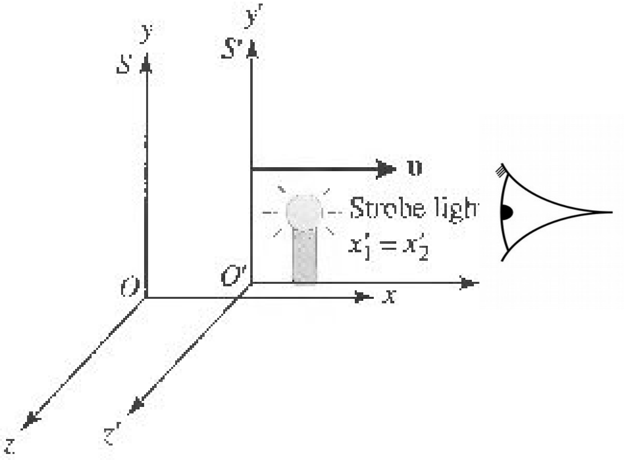
Christian Doppler (1803–1853)

Michelson

Morley

Relatividade Restrita

O Efeito Doppler para a Luz



Se a fonte de luz viaja com S'
e o observador, com S,
e tomando como $\Delta t'$ um
período de oscilação da luz:

$\Delta t' = T' = 1/\nu_0$,

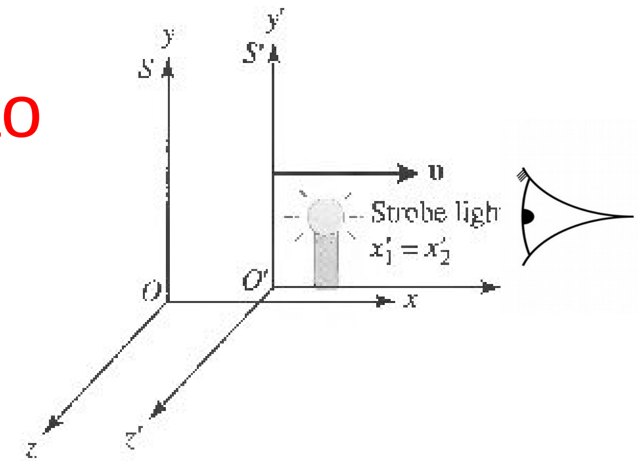
onde ν_0 = freq. de repouso,

ocorre uma dilatação do tempo:

$t_2 - t_1 = \gamma/\nu_0$.

Relatividade Restrita

O Efeito Doppler para a Luz



Mas t_1 e t_2 são os momentos da emissão das frentes de onda pela fonte.
Para calcular a diferença entre os momentos da chegada no observador em *S*, temos que adicionar a diferença (aqui negativa) de caminho, $(t_2\text{-}t_1)\cdot u$, dividida pela velocidade do sinal, *c*.

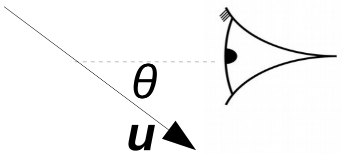
$\Delta t_{obs} = t_2 - t_1 + (t_2 - t_1)\cdot u/c = \gamma/\nu_0\cdot(1+u/c) = \nu_0^{-1}\cdot(1+u/c)/(1-u^2/c^2)^{1/2}$

=> $\nu_{obs} = \nu_0\cdot\sqrt{(1-u/c)/(1+u/c)}$, para $|u| \ll c$: $\nu_{obs} \approx \nu_0\cdot(1-u/c)$

onde *u* é negativa para aproximação, e positiva para afastamento relativo.

Relatividade Restrita

O Efeito Doppler para a Luz



Isto vale para movimento na direção da linha de visada. Se a fonte está se movimentando a um ângulo θ com a linha de visada, a fórmula se torna ($u_r = u \cdot \cos\theta$):

$$\nu_{obs} = \nu_0 \cdot \sqrt{(1-u^2/c^2)}/(1+u_r/c)$$

Se a fonte está se movimentando perpendicular à linha de visada, há um efeito Doppler transversal, devido à Dilatação do Tempo:

$$\nu_{obs} = \gamma^{-1}\nu_0 = \sqrt{(1-u_t^2/c^2)}\cdot\nu_0$$

Às vezes se define uma grandeza chamada *redshift* (deslocamento para o vermelho) devido ao efeito Doppler:

$$z \equiv (\lambda_{obs}-\lambda_0)/\lambda_0 = \sqrt{(1+u_r/c)/(1-u_r/c)} - 1,$$

para $u_r \ll c$: $z = u_r/c$

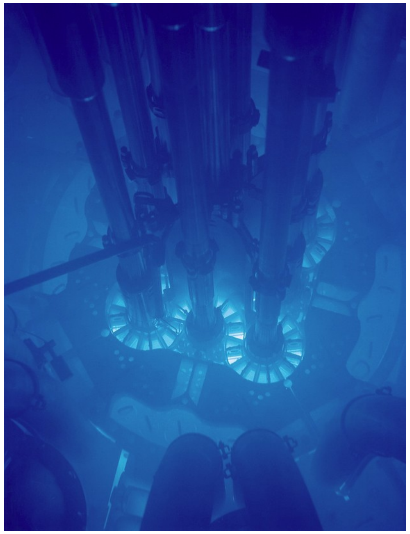
Relatividade Restrita

Efeito/Radiação (Vavilov-)Tcherenkov (Вавилов-Черенков) - 1934

Prêmio Nobel 1958

Павел Алексеевич Черенков (1904-1990)

É uma radiação (normalmente azul), que surge, quando uma partícula (carregada) passa por um meio com velocidade acima da velocidade da luz naquele meio.



É aproveitado para detectar partículas com velocidades relativísticas, por exemplo, raios cósmicos, e determinar as suas velocidades.

É o análogo ótico ao estrondo sônico.

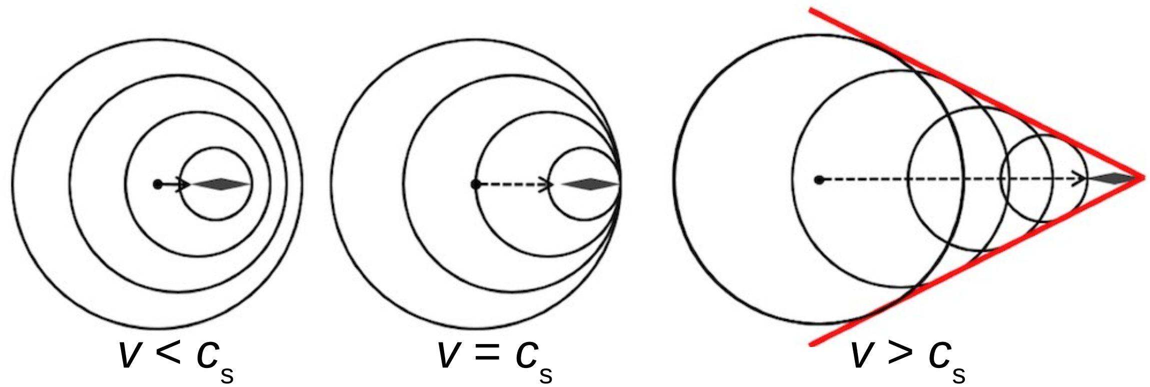
Relatividade Restrita

O Estrondo Sônico

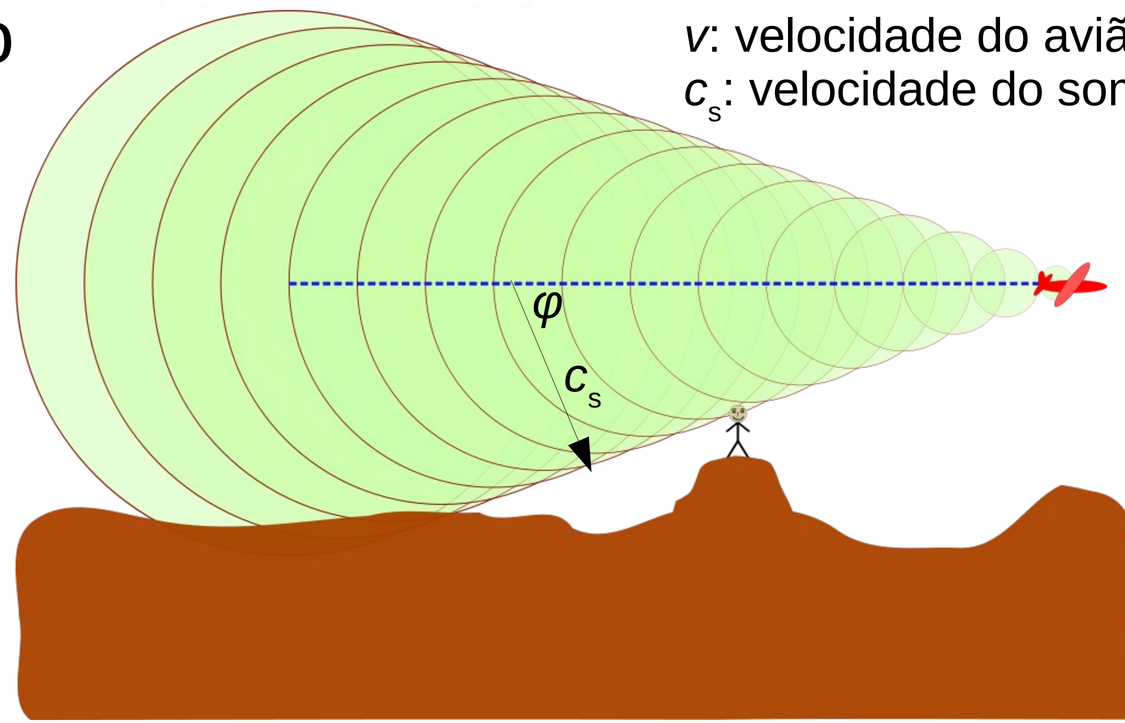
Em vermelho: Frente de som emitido pelo avião: Todas as ondas se somam.
=> É percebido como uma explosão por alguém no chão.

! O estrondo sônico não é a “quebra da barreira de som”.

$\cos \varphi = c_s / v$



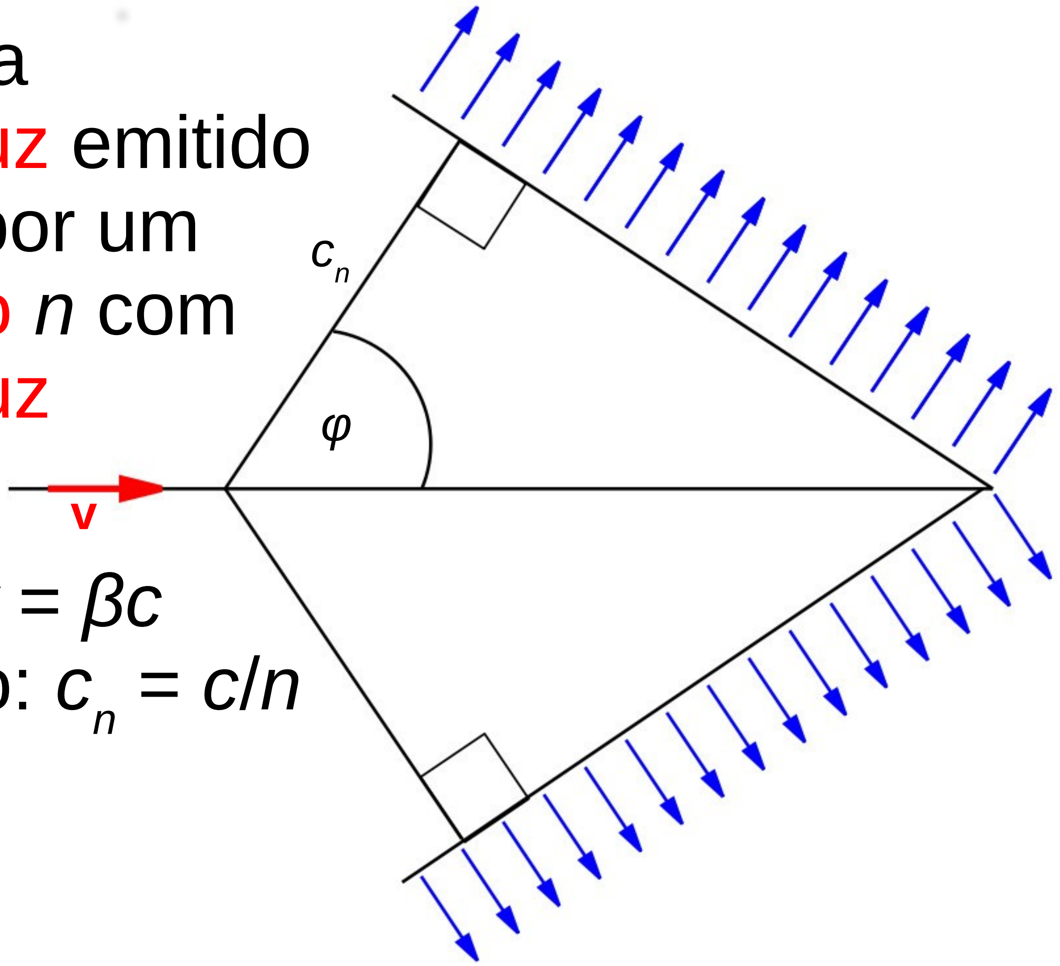
v: velocidade do avião
c_s: velocidade do som



Relatividade Restrita

Radiação Tcherenkov

A radiação Tcherenkov é a mesma coisa, mas com luz emitido por partículas passando por um meio com índice refratório *n* com velocidade acima da da luz no meio.



velocidade da partícula: $v = \beta c$
velocidade da luz no meio: $c_n = c/n$

$\cos\varphi = c_n/v = c/nv = 1/n\beta$
$\Rightarrow v = c/n \cdot \cos\varphi$

Universidade Federal do ABC

Física Contemporânea

FIM PRA HOJE