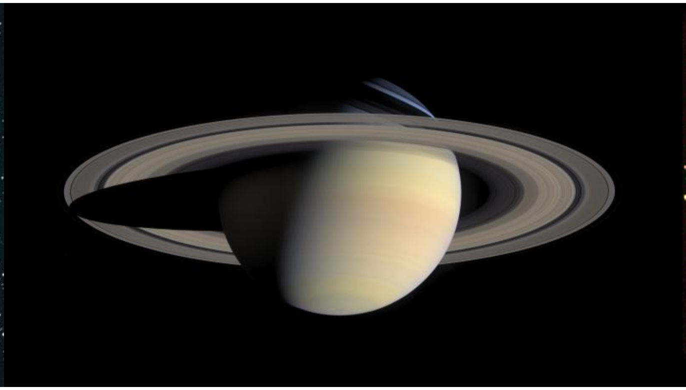
Universidade Federal do ABC

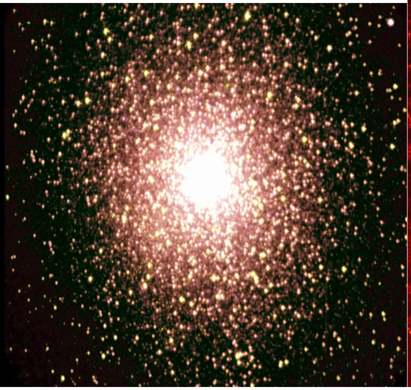
Física Contemporânea

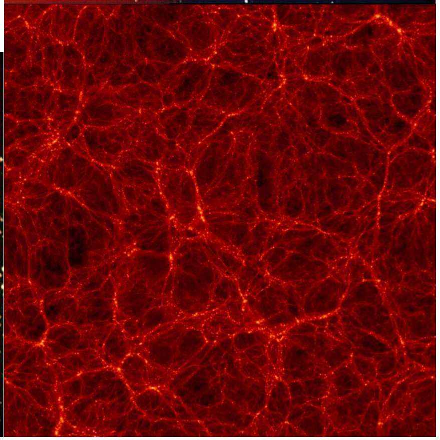
04. Espaço-Tempo
Quadrivetores

Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/Astro.html







Unidades Naturais

Na Relatividade e em outras áreas frequentemente se usa um sistema de unidades naturais, naquele a velocidade da luz no vácuo, *c* (no SI, ~$3 \cdot 10^8$ m/s) é igual a 1.

Neste sistema:

- Velocidades não têm unidades, e valores ≤ 1,

- Tempo se mede em metros: 1 m de tempo é ~$3.3 \cdot 10^{-9}$ s (o tempo, naquele a luz no vácuo percorre 1 m),

- Acelerações têm unidades de $\cancel{m}/\cancel{m}m$ = m^{-1},e Forças, kg/m,

- Energia e Momento Linear têm as mesmas unidades, kg,

- Os campos elétrico e magnético também têm as mesmas unidades,

- etc.

Unidades Naturais

Para que se faz isso?

- Em muitos cálculos pode-se omitir fatores c, c^2, c^{-2}, etc., tornando eles bem menos laborosos (por exemplo, alguns da aula anterior).

- Várias fórmulas se tornam mais elegantes e simétricas: Exemplo: A transformação de Lorentz (só p. x e t) vira: $x' = \gamma\cdot(x - ut)$, $t' = \gamma\cdot(t - ux)$, onde $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2}$.

Existem vários sistemas naturais, naqueles algumas constantes fundamenteis como c, a constante da gravitação G, a constante de Planck h (ou a reduzida $\hbar$), a carga elementar e, a massa do elétron m_e e/ou as do eletromagnetismo ε_0 e μ_0 (ou $4\pi\varepsilon_0$ e $\mu_0/4\pi$) são igualadas a 1.

O Espaço-Tempo

Vimos que nem o espaço, nem o tempo são absolutos.

Eles se misturam na troca de referencial.

O que para um observador é espaço é (parcialmente) tempo para outros observadores, e vice-versa.

Porém, a entidade quadri-dimensional composta dos dois, chamada espaço-tempo, é absoluta.

Chamamos um ponto no espaço-tempo dado por quatro coordenadas, x, y, z e t (agora medido em metros) de evento.

O vetor posição de um evento também tem 4 dimensões, objeto chamado quadrivetor.

Iremos conhecer vários quadrivetores.

Quadrivetores

Maneira de escrever um quadrivetor a^α:

$a^\alpha := (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, a^i)$

Exemplo: vetor posição de um evento:

$x^\alpha := (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^i) = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{r})$

Para simbolizar os quatro componentes, normalmente se usa letras gregas como índices, e para os três compontes 1, 2 e 3 (no vetor exemplo, as coordenadas espaciais), letras latins.

Quadrivetores podem ser ecritos como linha ou coluna.

!!! Alguns autores colocam o “zero-ésimo” componente (no caso, o tempo) em quarto lugar.

Quadrivetores

Usando esta notação, podemos escrever a transformação de Lorentz do vetor posição como:

$$\Lambda^{\beta'}{}_{\alpha} x^{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & -u\gamma & 0 & 0 \\ -u\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(t-ux) \\ \gamma(x-ut) \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x^{\beta'},$$

onde x^{α} é o quadrivetor no sistema S, $x^{\beta'}$, o mesmo quadrivetor no sistema S' e $\Lambda^{\beta'}{}_{\alpha}$, a matriz que realiza a transformação de Lorentz, i.e. o *boost* pela velocidade **u** = (u,0,0).

Um índice repetido “uma vez em cima e uma vez em baixo” (aqui α) significa somação sobre este índice (notação de Einstein).

Quadrivetores

Outro exemplo: o quadrivetor deslocamento Δx^{α} entre dois eventos:

$$\Lambda^{\beta'}{}_{\alpha}\,\Delta x^{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & -u\gamma & 0 & 0 \\ -u\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\Delta t - u\Delta x) \\ \gamma(\Delta x - u\Delta t) \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \Delta x^{\beta'},$$

que é frequentemente usado como arquetipo de um quadrivetor.

Definimos como quadrivetor uma grandeza a^{α}, cujos 4 componentes se comportam (transformam) como os componentes do quadrivetor deslocamento na troca de referencial.

Quadrivetores

Definimos como produto escalar de a^α e b^α:

$a^\alpha \cdot b^\alpha := -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$

!! Atenção: Aqui não temos a notação de Einstein.
Ambos os α estão na mesma posição, em cima.

A magnitude de um quadrivetor é o produto escalar dele consigo próprio:

$(a^\alpha)^2 := a^\alpha \cdot a^\alpha = -(a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2$

A magnitude de um quadrivetor é uma invariante de Lorentz (=> vide quadro).

! A magnitude de um quadrivetor pode ser negativo!

Quadrivetores

No caso do vetor deslocamento, a magnitude

$(\Delta x^\alpha)^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 =: (\Delta s)^2$,

é chamado intervalo (ou norma) entre os dois eventos.

Um espaço, naquele o intervalo contém quadrados de coordenadas positivos e negativos é chamado pseudo-euclidiano.

!! Há autores que definem produto escalar, magnitude e intervalo com o sinal oposto

Quadrivetor Velocidade

Uma hipótese razoável para definir o quadrivetor velocidade, ou quadrivelocidade (i.e. de um objeto em movimento) seria a derivada no tempo do quadrivetor posição: $v^\alpha := dx^\alpha/dt = (dt/dt, dx/dt.\ dy/dt, dz/dt) = (1, \mathbf{v})$.

Olhamos, se isto satisfaz a definição de quadrivetor (transformar como o quadrivetor deslocamento na troca de referencial):

$$\Lambda^{\beta'}{}_{\alpha} v^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & -u\gamma & 0 & 0 \\ -u\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(1-uv_x) \\ \gamma(v_x-u) \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ v_x' \\ v_y' \\ v_z' \end{pmatrix}$$

Não é um quadrivetor!

Quadrivetor Velocidade

Outra tentativa: derivar x^α no tempo próprio da partícula, τ (lembrem que $\Delta t = \gamma_v \Delta\tau$):

$$v^\alpha := dx^\alpha/d\tau = dx^\alpha/dt \cdot dt/d\tau = \gamma_v \cdot dx^\alpha/dt = \gamma_v(1, \mathbf{v})$$

$$= (\gamma_v, \gamma_v v_x, \gamma_v v_y, \gamma_v v_z) \qquad !!!\ v^i \neq \mathbf{v}$$

Isto satisfaz a definição de quadrivetor?

Temos que chamar γ de γ_u de novo, para não confundir com γ_v e $\gamma_{v'}$:

$$\Lambda^{\beta'}{}_{\alpha} v^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma_u & -u\gamma_u & 0 & 0 \\ -u\gamma_u & \gamma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_v \\ \gamma_v v_x \\ \gamma_v v_y \\ \gamma_v v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_v \gamma_u (1-uv_x) \\ \gamma_v \gamma_u (v_x - u) \\ \gamma_v v_y \\ \gamma_v v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{v'} \\ \gamma_{v'} v_x' \\ \gamma_{v'} v_y' \\ \gamma_{v'} v_z' \end{pmatrix}$$

Aula anterior

Isto sim, é um quadrivetor!

Quadrivetor Velocidade

A quadrivelocidade é, então o deslocamento do objeto em relação ao seu tempo próprio.

A invariante de Lorentz da quadrivelocidade é:

$$(v^\alpha)^2 = -(v^0)^2 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = \gamma_v^{\ 2}(-1^2 + v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2} + v_z^{\ 2})$$
$$= (1 - v^2)^{-1} \cdot (-1 + v^2) = -1$$

ou $-c^2$ em unidades SI.

!!! A soma vetorial de duas quadrivelocidade não é outra quadrivelocidade.

Quadrivetor Aceleração

Análogo ao quadrivetor velocidade, o quadrivetor aceleração é a derivada da quadrivelocidade no tempo próprio:

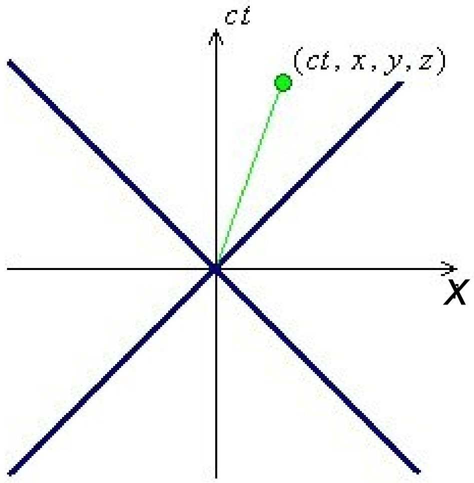
$$a^\alpha = dv^\alpha/d\tau = d^2x\alpha/d\tau^2 = (\gamma_v{}^4\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{v},\ \gamma_v{}^2\cdot\mathbf{a} + \gamma_v{}^4\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v})$$

$$= (\gamma_v{}^4\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{v},\ \gamma_v{}^4\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{v}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{a})))$$

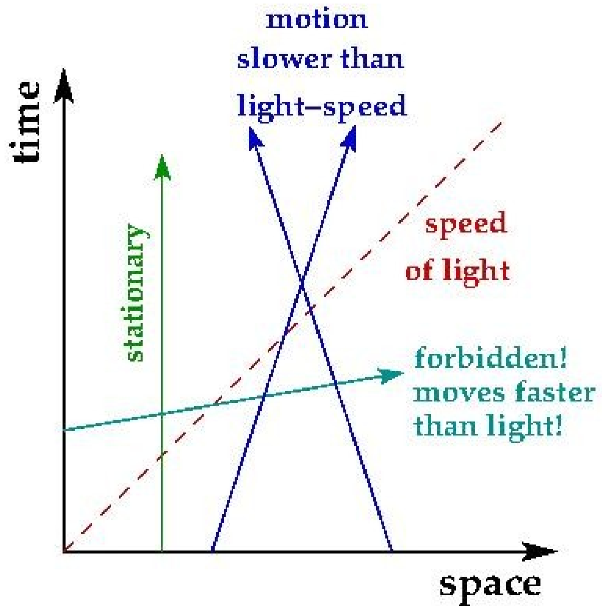
onde **a** é a aceleração “normal”, $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$

Diagrama Espaço-Tempo

É útil introduzir o Diagrama Espaço-Tempo



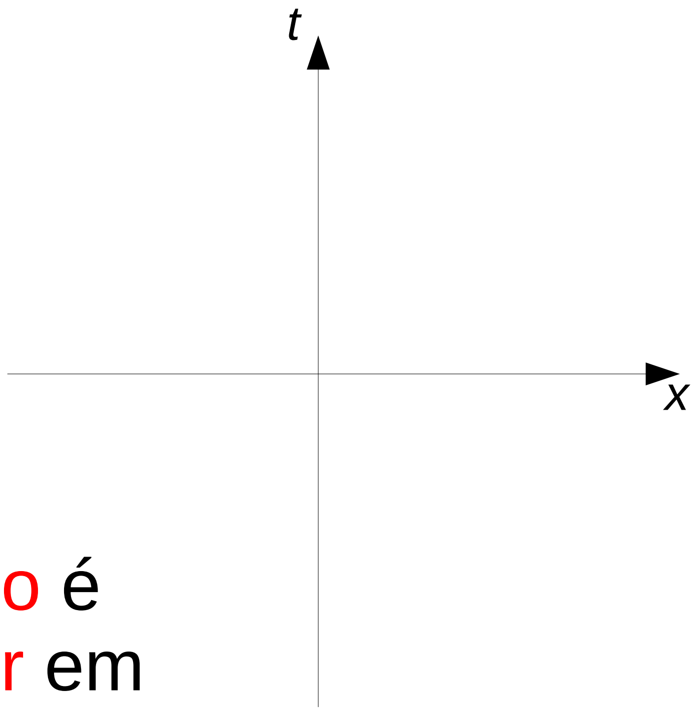
eixo horizontal: *x*
eixo vertical: *t*, (às vezes, o eixo é rotulado por *ct*. É *t* em unidades naturais, tal que os eixos têm as mesmas unidades, de distância).
y e *z* são ignorados, já que tudo que é interessante acontece nas dimensões *x* e *t*.



Retas no diagrama representam objetos viajando com velocidades constantes, quanto mais rapidamente, tanto menos inclinadas.
Uma inclinação de 45° corresponde à velocidade da luz.

A Transformação de Lorentz

Dando uma olhada de novo para estas transformaçoes:



$x' = \gamma\cdot(x-ut)$
$t' = \gamma\cdot(t-ux)$

Elas misturam espaço (x) e tempo!

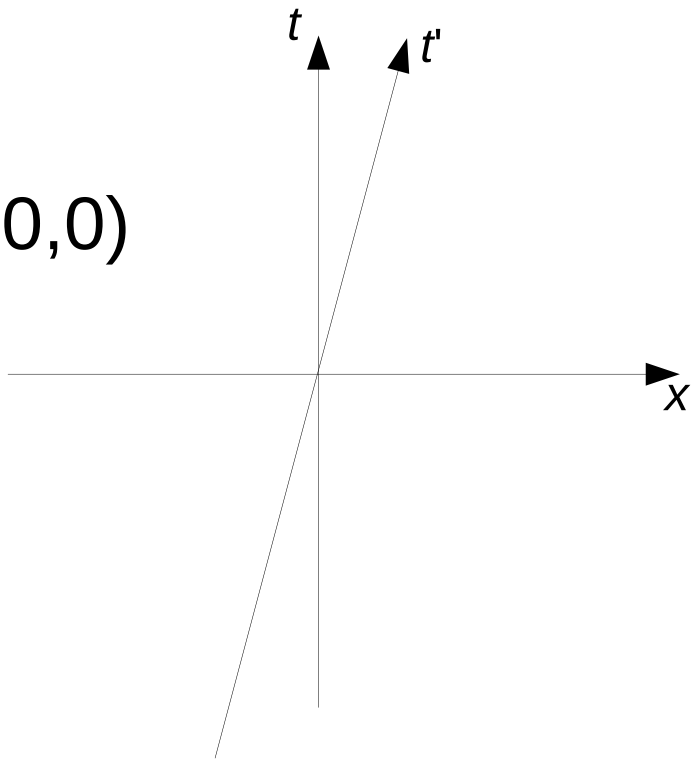
O que pro observador em S é espaço é (parcialmente) tempo pro observador em S', e vice-versa.

Eventos que acontecem na mesma posição para S, não necessáriamente acontecem na mesma posição para S'.

Eventos que são simultâneos para S, não necessáriamente são simultâneos para S'.

A Transformação de Lorentz

Tomando, como sempre, um observador *S*' que está se deslocando com velocidade **u** = (*u*,0,0) em relação ao observador *S*, os dois coincidindo na origem.



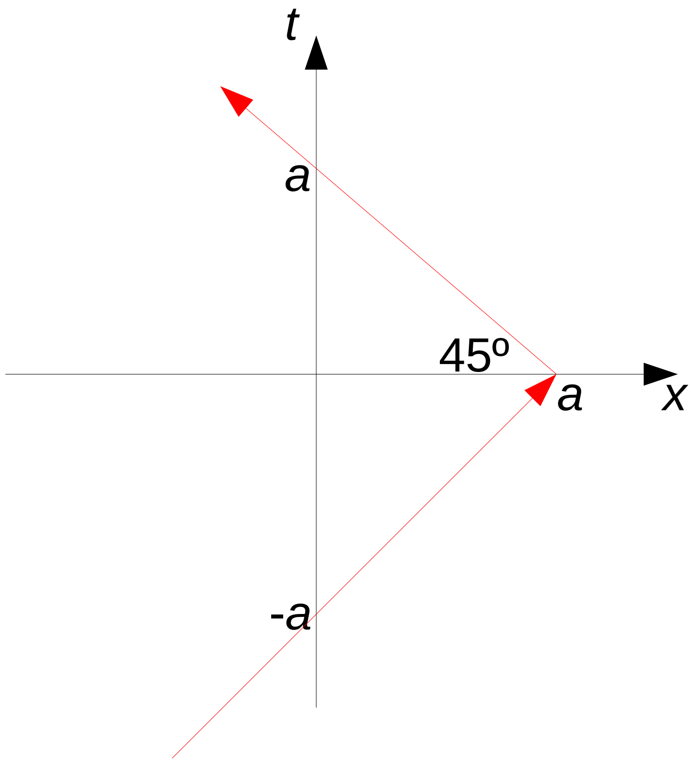
No diagrama espaço-tempo de *S*, o eixo de tempo de *S*', *t*', é simplesmente a linha de Universo de *S*'.

É inclinado em relação ao eixo t por um ângulo $\text{ctg}^{-1}(u)$ (ou $\text{ctg}^{-1}(u/c)$)

A Transformação de Lorentz

O eixo *x* pode ser construído, ”mandando” um raio de luz passar pelo ponte $x = 0$, $t = -a$, na direção $+x$.
Em $t = 0$, $x = a$, ele é espelhado na direção $-x$, chegando em $x = 0$ em $t = a$.

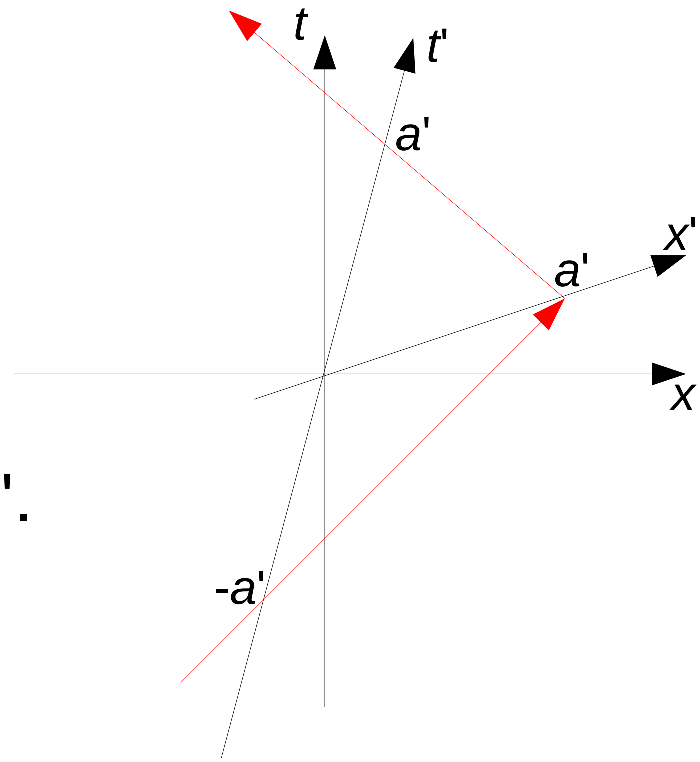
O eixo que conecta a origem com o “ponto de relexão” $t = 0$, $x = a$ é o eixo x.



A Transformação de Lorentz

Por onde passa o eixo *x*'?

Para achar o eixo *x*' podemos fazer a mesma coisa:



Mandar a luz em $t' = 0$, $x' = a'$,
espelhá-lo em $x' = 0$, $t' = a'$,
chegando de volta em $x' = 0$ em $t' = a'$.

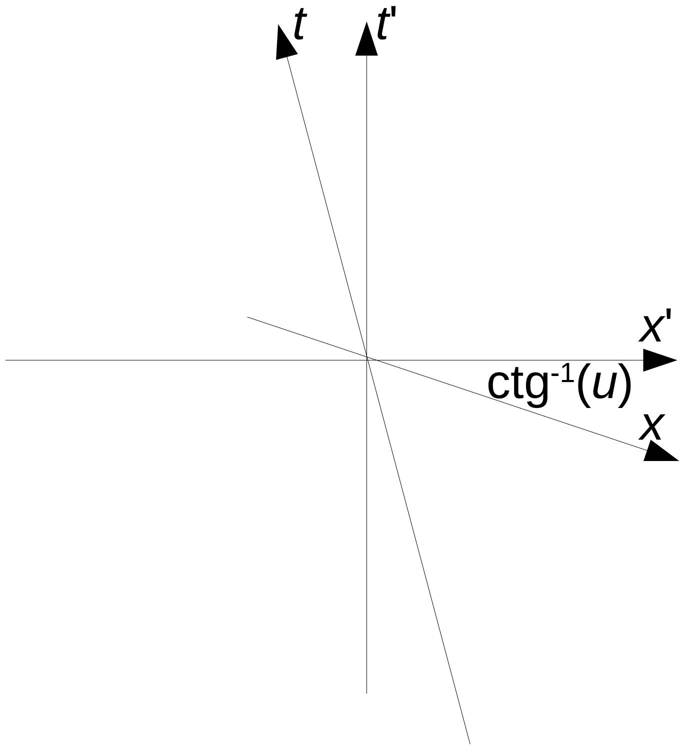
! Estes raios de luz também fazem ângulos de 45º com os eixos, no diagrama de qualquer referencial, pela invariância de *c*.
Em S' eles percorrem a mesma distância, em S, não.

Pela simetria dá para ver, que o eixo *x*' faz o mesmo ângulo com o eixo *x*, o que era esperada pela simetria entre *x* e *t* na transformação de Lorentz, $x' = \gamma\cdot(x-ut)$ e $t' = \gamma\cdot(t-ux)$.

A Transformação de Lorentz

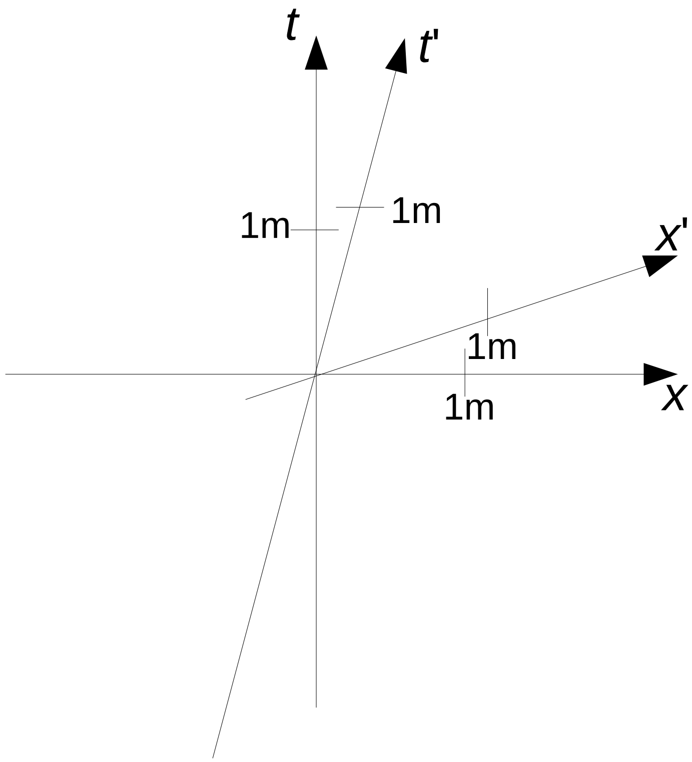
No diagrama de *S*', os 4 eixos são como ilustrado aqui, o que também podia ser esperado, já que

$x = \gamma\cdot(x'+ut')$
$t = \gamma\cdot(t'+ux')$



A Transformação de Lorentz

!! Na transformação de um sistema para outra,
as escalas não são conservadas.



A Transformação de Lorentz

Os eventos que representam $x' = 1$ m, $t' = 0$ em todos os referencias S' (i.e. variando u), descrevem um braço de uma hipérbole no diagrama de S.

Mesma coisa para
todos os eventos $x' = -1$ m, $t' = 0$,
todos os eventos $x' = 0$, $t' = 1$ m
e todos os eventos $x' = 0$, $t' = -1$ m.

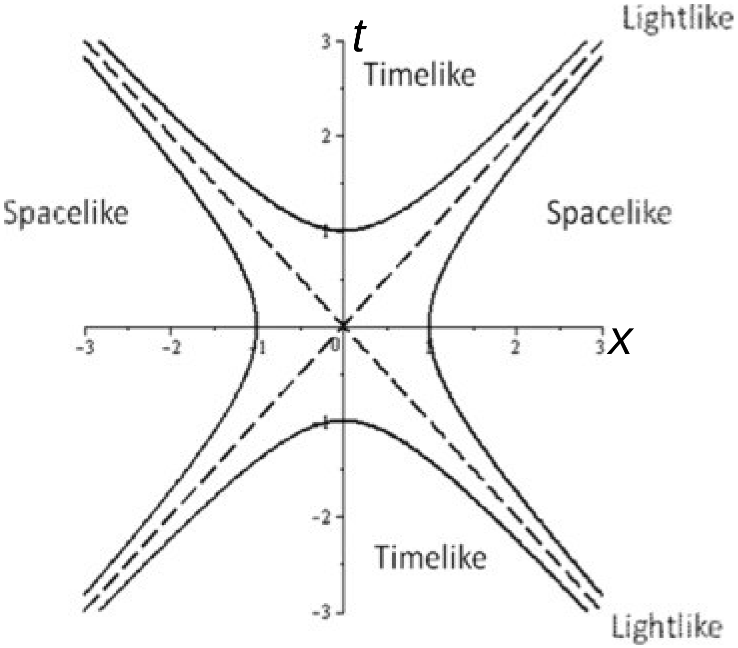
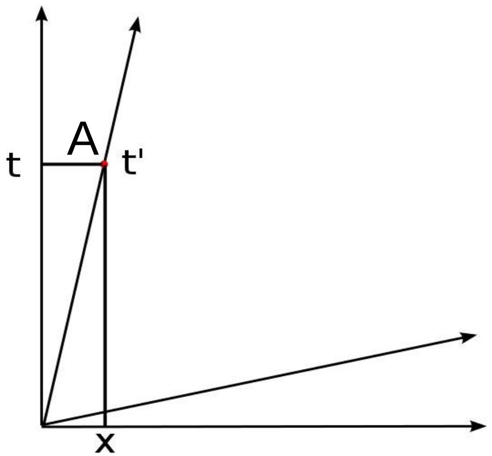


Diagrama Espaço-Tempo

Dilatação do Tempo



Este fenômeno também pode ser visto em um diagrama Espaço-Tempo:

O tempo decorrido até o evento A é t em S, e t' em S', onde S' é o sistema de repouso do par de eventos origem-A.
A hipérbole $t'' = t$, $x'' = 0$ passa “a cima” do evento A => $t' < t$ (como visto na aula anterior).

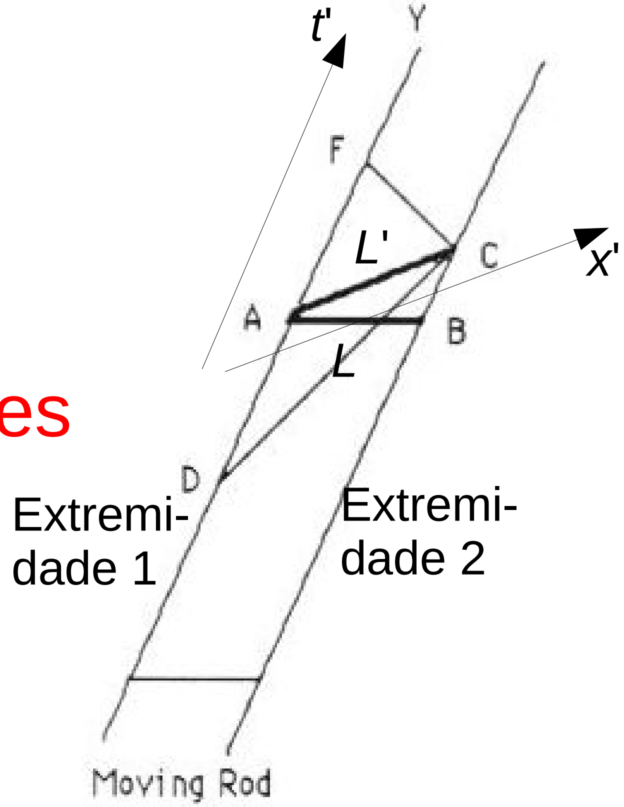
!! No desenho t' parece mais comprido que t, outro exemplo do fato, que escalas não são preservadas neste diagrama.

Diagrama Espaço-Tempo

Contração do Comprimento

Uma barra está viajando junto com *S*' (seu sistema de repouso).

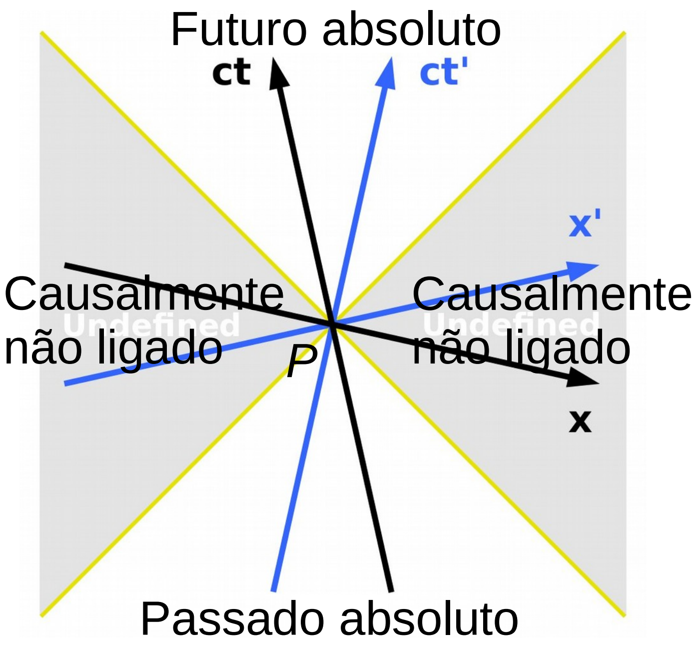
Para determinar seu comprimento em um dos sistemas, *L* ou *L*', devemos medir a distância entre as extremidades simultaneamente naquele sistema, na direção horizontal e *S*, na direção do eixo *x*' em *S*'.



Fazendo isto, a hipérbole que passa pelo evento B passa entre A e C => *L*' > *L*, como visto.

Diagrama Espaço-Tempo

Passado, Futuro e Causalidade



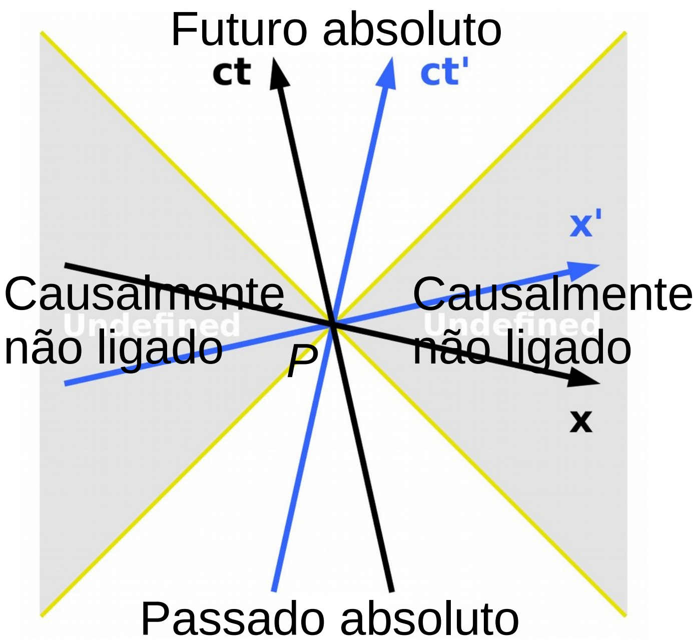
O diagrama Espaço-Tempo centrado no evento *P* pode ser dividida em várias regiões:

O passado absoluto de *P*:
Eventos nesta parte foram antes de *P*, independente do referencial, e podem ter causado *P*.

O futuro absoluto de *P*:
Eventos nesta parte serão depois de *P*, independente do referencial, e podem ser a consequência de *P*.

Diagrama Espaço-Tempo

Passado, Futuro e Causalidade



A região causalmente não ligada a *P*: Eventos nesta parte não tem/tiveram contato com *P*, q. d. informação não teve tempo para chegar destes eventos até *P*, ou vice-versa. Eventos nesta região podem ser antes, depois ou simultâneos a *P*, dependendo do referencial, mas tão afastados que não há contato causal.

As retas amarelas são os caminhos que tomaria luz passando por *P*.

Diagrama Espaço-Tempo

Intervalos no Diagrama Espaço-Tempo

Voltando pra ”distância” 4D entre dois eventos, a magnitude do quadrivetor deslocamento entre eles,
os intervalos:

$$(\Delta s)^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

Lembrando:
$(\Delta s)^2$ é uma invariante de Lorentz,
e $(\Delta s)^2$ pode ser negativo.

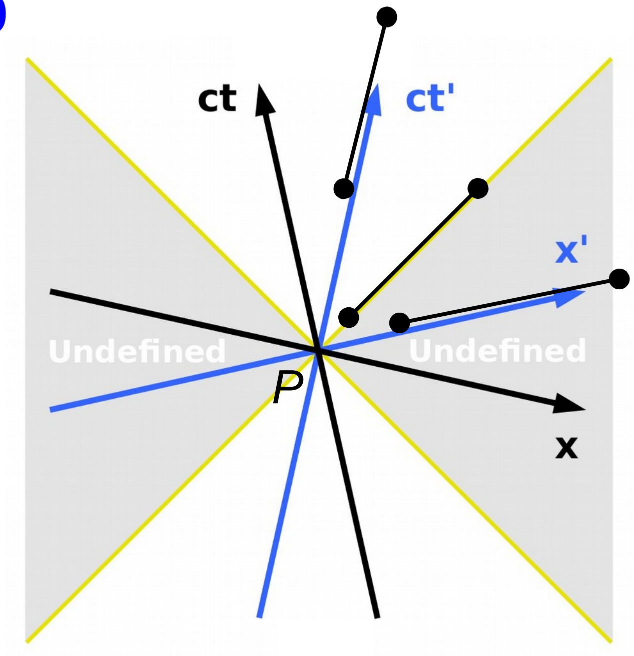
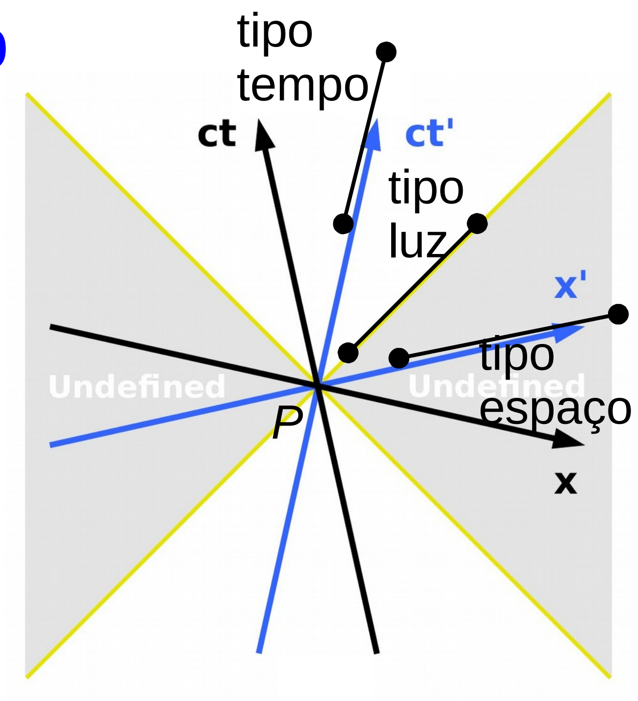


Diagrama Espaço-Tempo

Intervalos no Diagrama Espaço-Tempo



Um intervalo se chama:

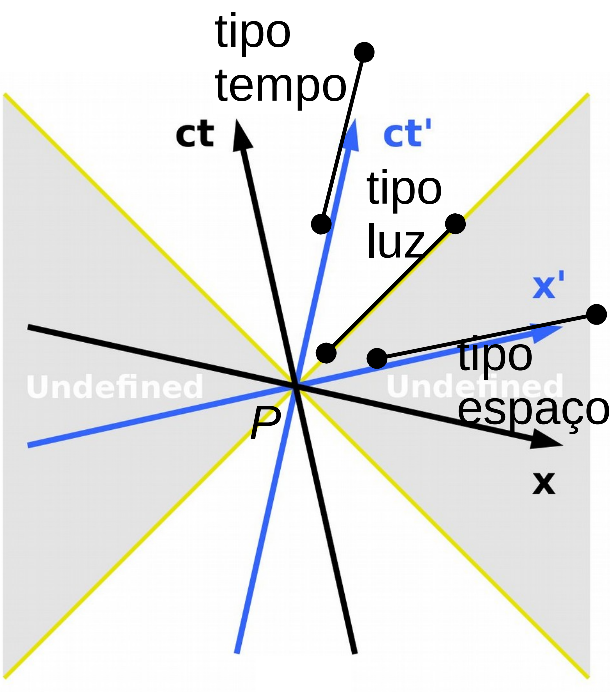
- tipo espaço se $(\Delta s)^2 > 0$: pode ser o eixo de uma dimensão espacial de um referencial.

- tipo tempo se $(\Delta s)^2 < 0$: pode ser o eixo do tempo de um referencial.

- tipo luz se $(\Delta s)^2 = 0$: pode ser o caminho de um fóton.

Diagrama Espaço-Tempo

Intervalos no Diagrama Espaço-Tempo



Num intervalo tipo espaço, Δs é a distância própria entre os eventos, a distância entre eles num referencial, onde eles ocorrem simultaneamente.

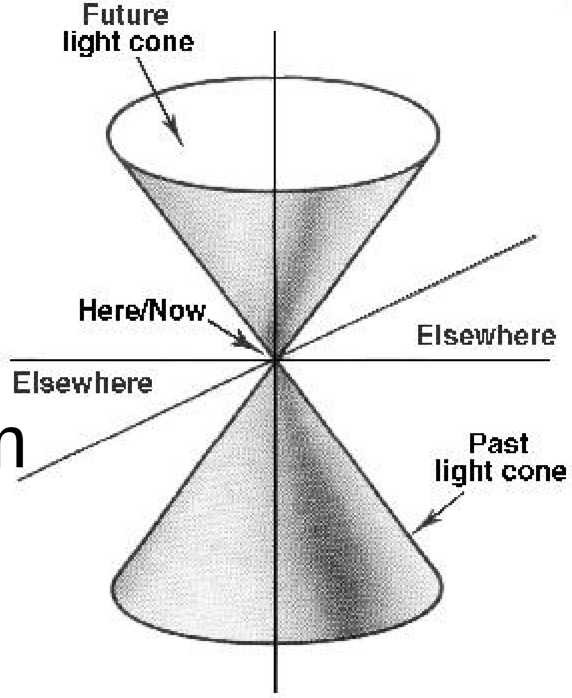
Num intervalo tipo tempo, $\sqrt{|(\Delta s)^2|}$ é o tempo próprio entre os eventos ($\cdot c$), o tempo entre eles no referencial, onde eles acontecem no mesmo lugar.

No caso tipo luz, $\Delta s = 0$ significa, que o tempo próprio é zero. => Para fótons (ou qualquer partícula viajando com velocidade da luz) o tempo não passa!

Diagrama Espaço-Tempo

Cone de Luz

Pode-se fazer diagramas espaço-tempo levando em conta *x*, *y* e *t* (suprimindo só *z*).



=> Os possíveis caminhos de luz formam a superfície de um cone, o cone de luz.

Passado e futuro absolutos são as regiões dentro do cone,
e a região causalmente não ligada, a região fora.

Atividade
Paradoxos

Universidade Federal do ABC

Física Contemporânea

FIM PRA HOJE