



Universidade Federal do ABC

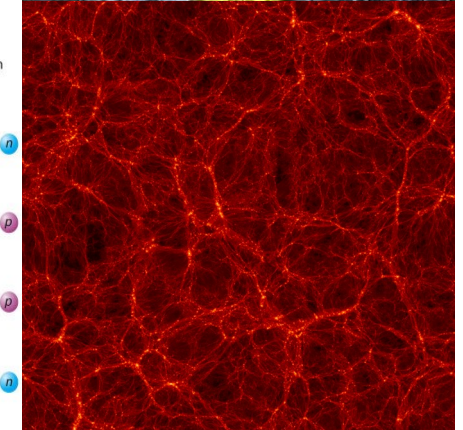
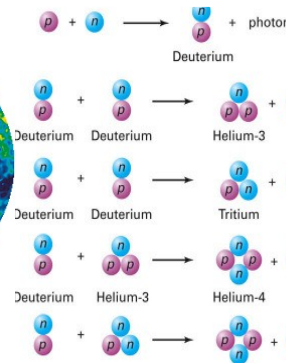
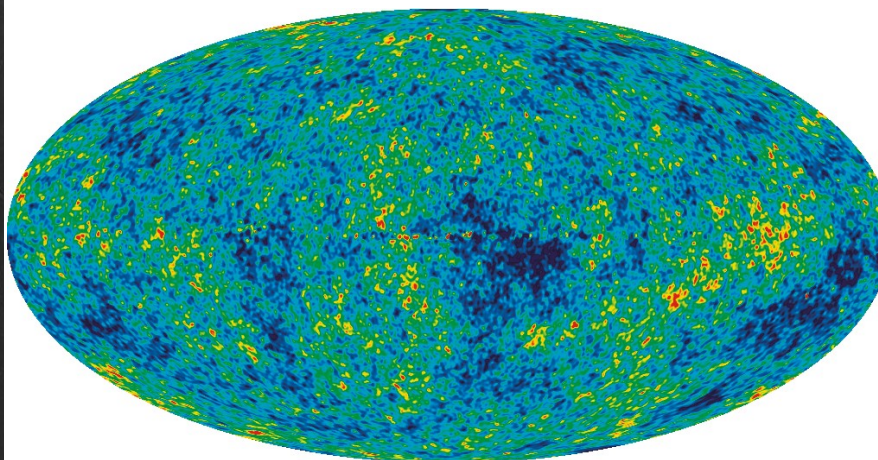
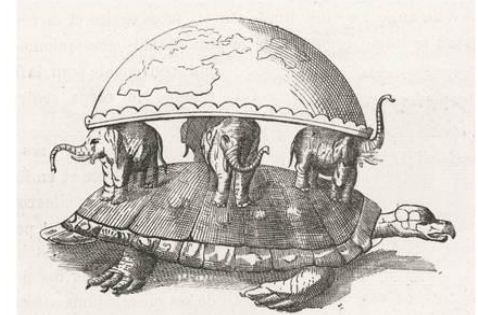
Introdução à Cosmologia

05. Cosmologia Newtoniana

Prof. Pieter Westera

pieter.westera@ufabc.edu.br

<http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/Cosmo.html>



Cosmologia Newtoniana

Enquanto os cálculos que prevêm a **evolução** do **Universo** em **grande escala** se baseiam na **relatividade**, **muitos conceitos** podem ser **entendidos** usando **mecânica Newtoniana**.

A equação principal necessária para descrever esta evolução, a **equação de Friedmann**, acaba sendo até **igual** usando **física Newtoniana**!

(tirando o fato, que a constante cosmológica não aparece)

É, então, instrutivo, primeiro atacar a cosmologia de maneira Newtoniana antes de usar a relatividade, já que a primeira é mais intuitiva, e a matemática envolvida é bem mais simples.

O Princípio Cosmológico

As teorias partem da suposição, que parece razoável e é apoiada pelas observações

(=> aulas Estruturas em Grande Escala),
chamada **Princípio Cosmológico**, que o **Universo** é, e sempre foi:

- **isotrópico**: todas as direções são equivalentes, não há uma direção preferida, e
- **homogêneo** a partir de uma certa escala (hoje ~100 Mpc).

O Tempo Universal

Definimos o **tempo universal** t , como o tempo decorrido desde o *Big Bang*.

As **propriedades** do **Universo** (fator de escala, densidades dos constituintes em grande escala) são **iguais** em **todas** as **posições** no **mesmo** t , ou seja são apenas uma função de t .

Por exemplo, o **redshift** medida para uma galáxia distante é uma **função** (decrecente, no caso de um Universo em expansão desde o começo) do **tempo universal** na época da emissão da luz:

$$z = z(t) \Leftrightarrow t = t(z)$$

O Tempo Universal

Definimos ainda:

t_0 := hoje, em **redshift 0** (em geral, grandezas com índice 0 se referem ao valor atual da grandeza), da ordem de 13.8 Gyr

O **lookback time** t_L correspondendo a um tempo t é o tempo decorrido desde t até hoje:

$$t_L = t_0 - t$$

O *lookback time* de uma galáxia observada com redshift z também é uma função deste:

$$t_L(z) = t_0 - t(z)$$

(Em geral, cada grandeza que pode ser escrita como função de t , também pode ser escrita em função de z . Esta função pode ser chamada de evolução com o redshift da grandeza.)

A Lei de Hubble-leMaître

Uma das "grandezas", que **não dependem** da **posição** no Universo, é a **Lei de Hubble-leMaître**:

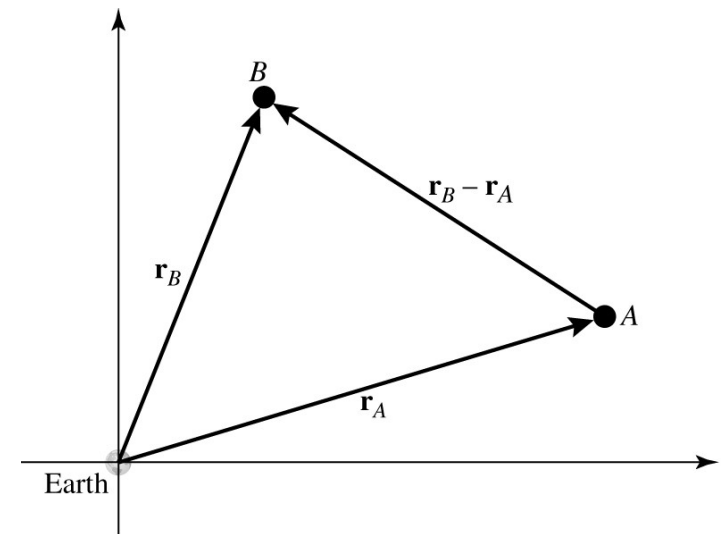
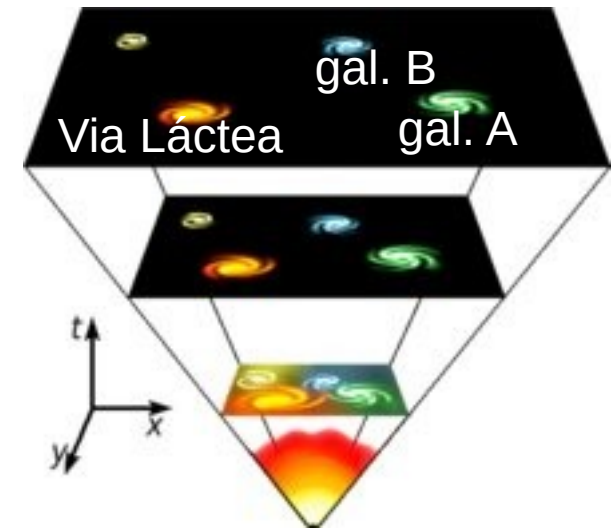
Nossa Lei de Hubble-leMaître diz:

$$\mathbf{v}_A = H_0 \mathbf{r}_A \text{ e } \mathbf{v}_B = H_0 \mathbf{r}_B$$

Seres na galáxia A observam:

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = H_0 \mathbf{r}_B - H_0 \mathbf{r}_A = H_0 (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)$$

A mesma Lei com a **mesma constante de Hubble!**



O Tempo de Hubble

Supondo que o Universo está expandindo à taxa atual desde seu começo, conseguimos estimar a idade do Universo:

$$t_H = r_A/v_A = 1/H_0 = \text{Tempo de Hubble} = 13.8 \text{ bi. anos}$$

Na verdade, a taxa de expansão não era sempre igual. Ela não é, então, uma constante, mas um parâmetro que varia, o parâmetro de Hubble, $H(t)$.

H_0 é o valor atual do parâmetro de Hubble, $H_0 = H(t_0)$.

Cálculos recentes que levam em conta a variação da taxa de expansão, chegam numa idade do Universo de 13.8 bi. anos, por acaso o mesmo valor que aquele estimado usando uma taxa constante.

A Lei de Hubble-leMaître dependente do tempo

Se nossa distância até galáxia A é $r_A(t)$, atualmente $r_{A,0}$, a expansão pode ser escrita como $r_A(t) = r_{A,0}R(t)$, onde $R(t)$ é uma grandeza sem dimensão chamada **fator de escala** aumentando de 0 no *Big Bang* a 1 hoje, $R(0) = 0$ e $R(t_0) = 1$.

Em *redshift* z , a escala do Universo era menor por um fator $1 + z$ (afinal, os comprimentos de onda da radiação foram esticados junto com o Universo por este fator) $\Rightarrow R(t) = (1+z)^{-1}$

Como $v_A(t) = dr_A(t)/dt = dR(t)/dt \cdot r_{A,0}$,

a **Lei de Hubble-leMaître** dependente do **tempo** vira:

$$v_A(t) = H(t)r_A(t) = H(t)R(t)r_{A,0}.$$

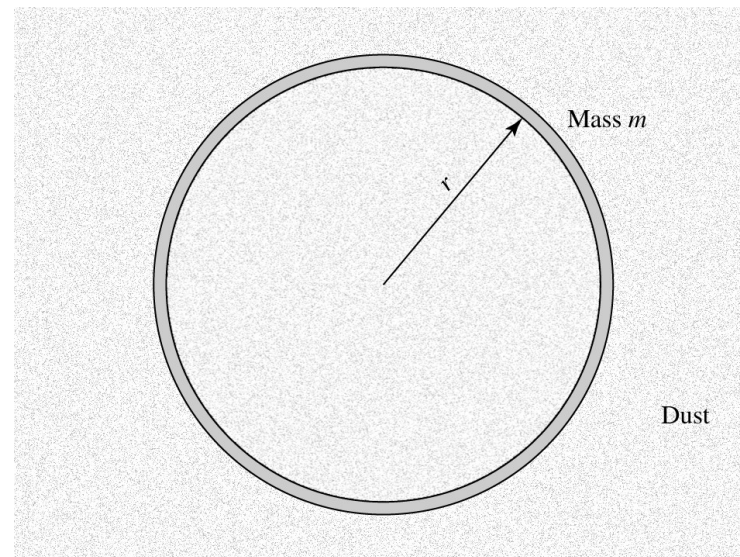
$$\Rightarrow H(t) = 1/r_A(t) \cdot v_A(t) = 1/\cancel{r_{A,0}}R(t) \cdot dR(t)/dt \cdot \cancel{r_{A,0}}$$

$$= 1/R(t) \cdot dR(t)/dt \quad (\text{ou } \dot{R}/R),$$

a taxa de variação relativa do fator de escala do Universo

Um Universo só de Matéria

Começamos a desenvolver nossa **cosmologia Newtoniana**, supondo que o **Universo** está **homogeneamente preenchido** por **matéria** de densidade $\rho(t)$ **sem pressão**, às vezes chamado de Universo de poeira.



Seja $r(t)$ o raio de uma casca fina e esférica de massa m , que expande junto com o Universo, tal que $r(t) = R(t)\varpi$, onde ϖ é o raio da casca hoje (poderia ser chamado de r_0).

$r(t)$ também é chamado **distância de coordenada**, e $\varpi = r(t_0)$, **coordenada comovente**.

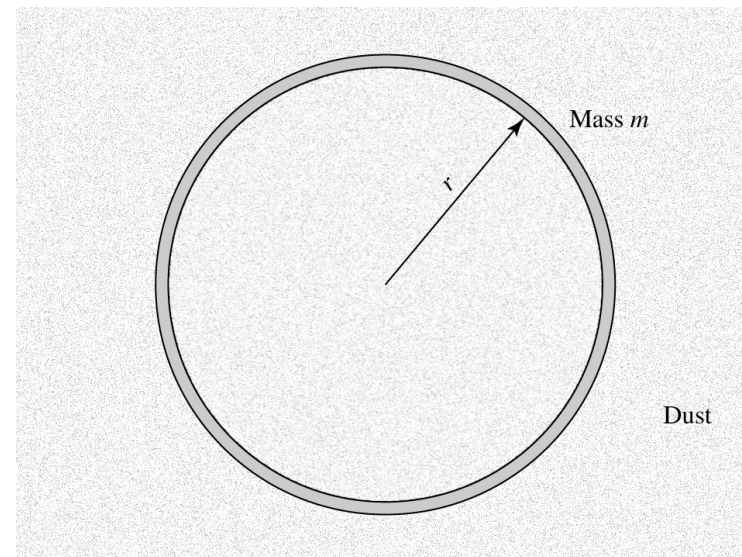
Um Universo só de Matéria

A casca **expande** junto com o Universo com velocidade $v(t) = dr(t)/dt$,

tal que a **massa contida** nela,
 $M_r = 4\pi/3 r^3(t)\rho(t)$,

é **constante**

$\Rightarrow \rho(t)$ é proporcional a $r^{-3}(t)$,
que é proporcional a $R^{-3}(t)$.

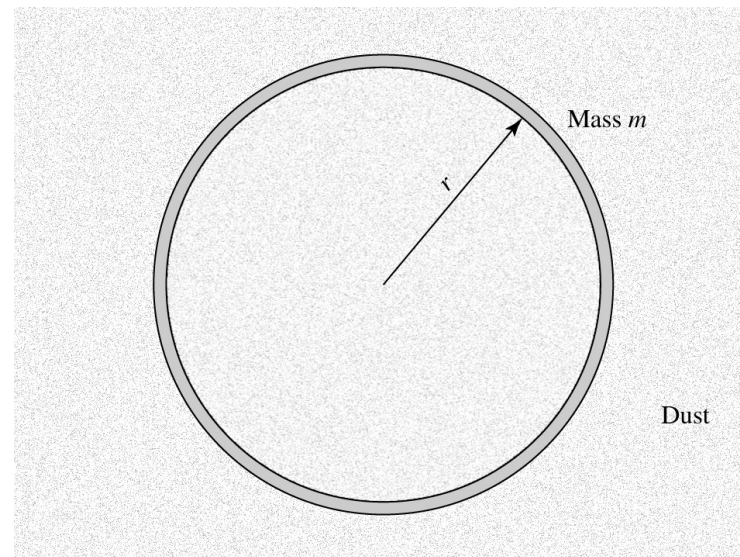


Um volume que expande junto com o Universo é chamado **volume comovente**, e a densidade medida por volume atual de um volume comovente, de **densidade comovente**.

No nosso Universo só de **matéria**, a densidade comovente é **constante**.

Um Universo só de Matéria

Por algum motivo definimos $k := -2E/mc^2\omega^2$, onde E é a energia mecânica total da casca. k tem dimensão [comprimento⁻²] e só terá um significado físico tratando de cosmologia relativística.



A **energia mecânica total** também pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 E &= K(t) + U(t) = \frac{1}{2} \cdot mv^2(t) - GM_r m / r(t) && \leftarrow \text{Teorema da casca esférica} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot mv^2(t) - 4\pi G / 3 \cdot mr^2(t) \rho(t) \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot mkc^2\omega^2 && \leftarrow \text{Definição de } k \\
 \Rightarrow v^2 - \frac{8}{3} \cdot \pi G \rho r^2 &= -kc^2\omega^2 && \text{(omitindo os "(t))}.
 \end{aligned}$$

Um Universo só de Matéria

O **sinal** da **energia mecânica total** (o sinal oposto de k) determina o **destino** do **Universo**:

- Se $k > 0$, então $E < 0$ (A velocidade da casca é menor que a velocidade de escape),
e o Universo é **gravitacionalmente ligado** (ou **fechado***)
=> A **expansão terminará** algum dia, e se **reverterá**.
- Se $k < 0$, $E > 0$,
o Universo **não é ligado** (ou **aberto***)
=> A **expansão continuará** para **sempre**.
- Se $k = 0$, $E = 0$, caso limite (Universo **plano***).
=> A taxa de expansão tende assintoticamente a zero.

*Aqui, os termos fechado, aberto e plano se referem à dinâmica da expansão. Eles farão mais sentido quando trataremos de cosmologia relativística.

Um Universo só de Matéria

Substituindo em $v^2 - \frac{8}{3} \cdot \pi G \rho r^2 = -kc^2 \varpi^2$:

$r(t) = \varpi R(t)$ e $v(t) = H(t)r(t) = dR(t)/dt \cdot \varpi$,

e dividindo por ϖ^2 obtemos:

$$\left[\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{8}{3} \pi G \rho \right] R^2 = -kc^2 \text{ ou } \left(H^2 - \frac{8}{3} \pi G \rho \right) R^2 = -kc^2,$$

que são duas versões da **equação de Friedmann** para um **Universo** só de **matéria**, uma equação diferencial para determinar o **fator de escala** do Universo em função do **tempo**.

Um Universo só de Matéria

Olhando pra segunda versão: $\left(H^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho\right) R^2 = -kc^2$

k é zero (Universo plano), para $\rho(t) = \rho_c(t) := 3H^2(t)/8\pi G$ chamada **densidade crítica**, que representa, então, o **limite** entre Universos **abertos** (que expandirão por sempre) e **fechados** (que recolapsam).

Valor atual: $\rho_{c,0} = 3H_0^2/8\pi G$

Obviamente, a densidade crítica depende do parâmetro de Hubble, isto é, da taxa de expansão.

Quanto mais rapidamente o Universo está expandindo, tanto mais massa é precisa para reverter a expansão.

Um Universo só de Matéria

Para **matéria**, a **densidade** $\rho(z)$ é **inversamente proporcional** ao **volume comovente**, ou seja, a **densidade comovente** é **constante**:

$$\rho(z) = (1+z)^3\rho_0 = R^{-3}(t)\rho_0, \text{ onde } \rho_0 = \text{densidade atual}$$

Usando $H(t) = 1/R(t) \cdot dR(t)/dt$, a **equação** de **Friedmann** se torna:

$$(dR/dt)^2 - 8\pi G\rho_0/3R = -kc^2$$

Um Universo só de Matéria

Definindo a densidade em unidades da densidade crítica como **parâmetro de densidade**:

$$\Omega(t) \equiv \rho(t)/\rho_c(t) = 8\pi G\rho(t)/3H^2(t)$$

$$\text{hoje: } \Omega_0 = \rho_0/\rho_{c,0} = 8\pi G\rho_0/3H_0^2$$

Usando $H(t) = 1/R(t) \cdot dR(t)/dt$, obtemos mais uma versão da **equação de Friedman**: $H^2(t)[1-\Omega(t)]R^2(t) = -kc^2$

$$\text{hoje: } H_0 [1-\Omega_0] = -kc^2,$$

confirmando que:

- Se $\Omega_{(0)} > 1$ ($\rho_{(0)} > \rho_{c,(0)}$): O Universo é fechado
- Se $\Omega_{(0)} < 1$ ($\rho_{(0)} < \rho_{c,(0)}$): O Universo é aberto
- Se $\Omega_{(0)} = 1$ ($\rho_{(0)} = \rho_{c,(0)}$): O Universo é plano

Um Universo só de Matéria

Combinando

$$H^2(t)[1-\Omega(t)]R^2(t) = -kc^2 = H_0^2 [1-\Omega_0]$$

$$\Rightarrow H^2(t)[1-\Omega(t)] = H_0^2 [1-\Omega_0](1+z)^2$$

$$\text{e } \Omega(t)/\Omega_0 = \rho(t)H_0^2/\rho_0H^2(t) = (1+z)^3H_0^2/H^2(t)$$

conseguimos determinar $H(t)$ e $\Omega(t)$ (ou $H(z)$ e $\Omega(z)$).

Deixando os "(t)" de lado:

$$\Omega = 1 - H_0^2/H^2 \cdot [1-\Omega_0](1+z)^2 = \Omega_0(1+z)^3H_0^2/H^2$$

$$\Rightarrow H^2 = H_0^2(1+z)^2(\Omega_0z + 1)$$

$$\text{e } H^2 = H_0^2 [1-\Omega_0](1+z)^2/[1-\Omega] = (1+z)^3H_0^2\Omega_0/\Omega$$

$$\Rightarrow \Omega = (1+z)\Omega_0/(1+\Omega_0z) = 1 + (\Omega_0-1)/(1+\Omega_0z)$$

Um Universo só de Matéria

$$\Omega = 1 + (\Omega_0 - 1)/(1 + \Omega_0 z)$$

$\Rightarrow \Omega - 1 = kc^2/(dR/dt)^2$ **não muda** de **sinal**, ou seja:

uma vez aberto, sempre aberto, ou

uma vez fechado, sempre fechado, ou

uma vez plano, sempre plano.

\Rightarrow Para $z \rightarrow \infty$, $\Omega \rightarrow 1$

$\Rightarrow \Omega$ **evolui** para **longe** de **1**, quer dizer:

o Universo aumenta sua "natureza" com o tempo, ou seja:

- Se o Universo era um pouco aberto no passado, ele está mais aberto hoje, ou

- se era um pouco fechado no passado, se "fechou mais", resp. para ser **plano hoje**, deve ter sido **muito plano** no **passado**.

Um Universo só de Matéria

Como **evolui** um Universo destes?

Usando a **Equação de Friedmann** na versão do sl. 15:

$$(dR/dt)^2 - 8\pi G\rho_0/3R = -kc^2$$

Para um **Universo plano**,

$$k = 0 \text{ e } \rho_0 = \rho_{c,0} = 3H_0^2/8\pi G,$$

$$\text{isto vira } (dR/dt)^2 - H_0^2/R = 0$$

A solução é (\Rightarrow quadro):

$$R_{\text{plano}} = (6\pi G\rho_{c,0})^{1/3}t^{2/3} = (3/2)^{2/3}H_0^{2/3}t^{2/3} = (3/2)^{2/3}(t/t_H)^{2/3},$$

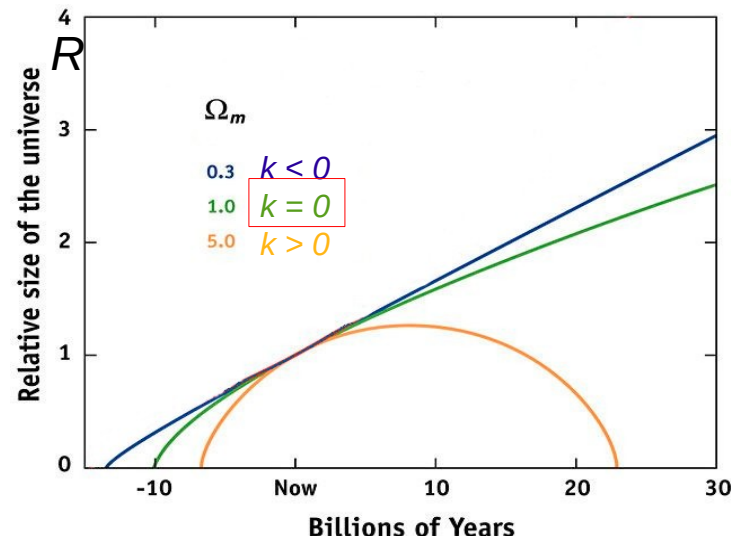
$$\text{onde } t_H \equiv 1/H_0 = \text{tempo de Hubble} \Rightarrow \rho(t) \text{ prop. } t^{-2}$$

$$\text{Um Universo destes tem idade: } t_{\text{plano}}(z) = 2/(3(1+z)^{3/2}) \cdot t_H$$

$$\Rightarrow \text{a idade atual é } t_{\text{plano},0} = 2/3 \cdot t_H$$

$$\text{e podemos escrever } R_{\text{plano}} = (t/t_{\text{plano},0})^{2/3}$$

$$\rho(t) \propto t^{-2}, \quad dR(t)/dt \propto t^{-1/3} \text{ e } H(t) \propto t^{-1} \text{ tendem a zero p. } t \rightarrow \infty$$



Um Universo só de Matéria

Para um Universo **não-plano**, $k \neq 0$, a equação diferencial é mais difícil de resolver:

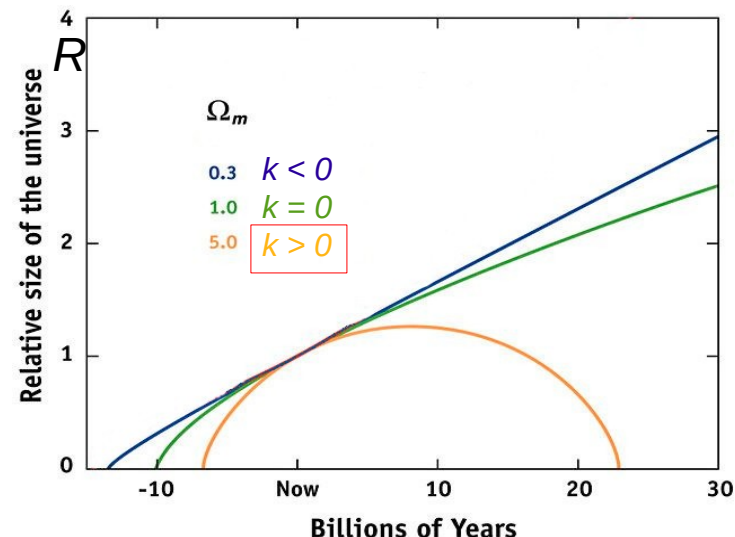
Em Universos **fechados**,
 $k > 0 \iff \rho(t) > \rho_c(t) \iff \Omega(t) > 1$

obtemos (sem dedução): $\frac{t_{\text{closed}}(z)}{t_H} = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\cos^{-1} \left(\frac{\Omega_0 z - \Omega_0 + 2}{\Omega_0 z + \Omega_0} \right) - \frac{2\sqrt{(\Omega_0 - 1)(\Omega_0 z + 1)}}{\Omega_0(1 + z)} \right]$

Para $z = 0$, isto nos dá

a idade atual do Universo: $\frac{t_{\text{closed},0}}{t_H} = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\cos^{-1} \left(\frac{2}{\Omega_0} - 1 \right) - \frac{2\sqrt{\Omega_0 - 1}}{\Omega_0} \right] < 2/3$

=> Estes Universos **recolapsam**, e suas **idades** são **menores** que as de Universos **planos** com a mesma taxa de expansão atual (constante de Hubble).



Um Universo só de Matéria

Em Universos **abertos**,
 $k < 0 \Leftrightarrow \rho(t) < \rho_c(t) \Leftrightarrow \Omega(t) < 1$,
a solução é

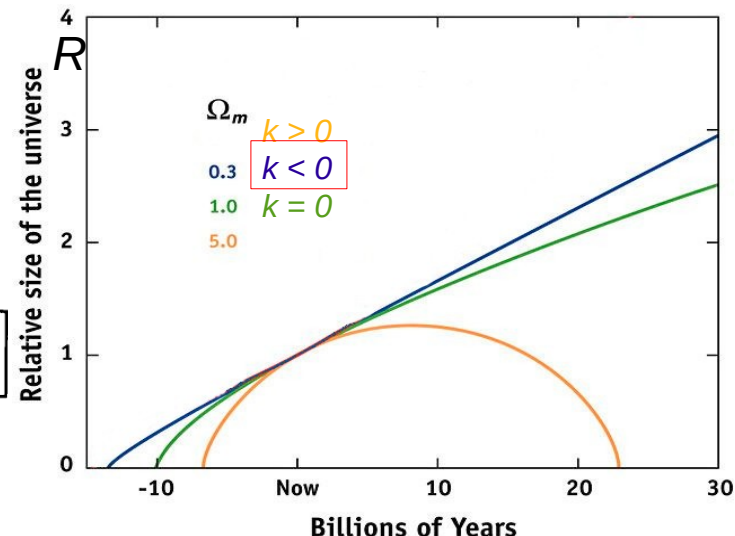
$$\frac{t_{\text{open}}(z)}{t_H} = \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{3/2}} \left[-\cosh^{-1} \left(\frac{\Omega_0 z - \Omega_0 + 2}{\Omega_0 z + \Omega_0} \right) + \frac{2\sqrt{(1 - \Omega_0)(\Omega_0 z + 1)}}{\Omega_0(1 + z)} \right]$$

e a idade do Universo

$$\frac{t_{\text{open},0}}{t_H} = \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{3/2}} \left[-\cosh^{-1} \left(\frac{2}{\Omega_0} - 1 \right) + \frac{2\sqrt{1 - \Omega_0}}{\Omega_0} \right] > \frac{2}{3}$$

Estes Universos **expandem** por sempre, e suas **idades** são **maiores** que as de Universos **planos**.

Infelizmente, nos casos com $k \neq 0$ não existe uma expressão simples para $R(t)$.



Um Universo só de Matéria

O limite em alto *redshift* dos três casos:

$$\Omega_0 < 1: \frac{t_{\text{open}}(z)}{t_H} = \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{3/2}} \left[-\cosh^{-1} \left(\frac{\Omega_0 z - \Omega_0 + 2}{\Omega_0 z + \Omega_0} \right) + \frac{2\sqrt{(1 - \Omega_0)(\Omega_0 z + 1)}}{\Omega_0(1 + z)} \right]$$

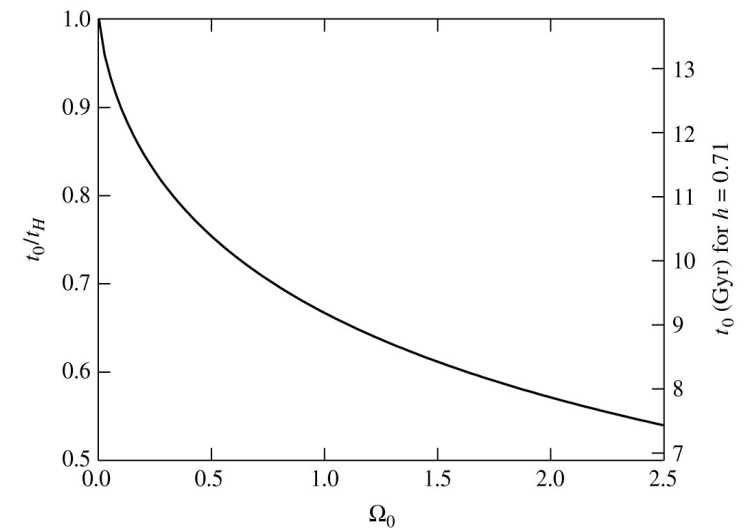
$$\Omega_0 = 1: t_{\text{plano}}(z) / t_H = 2/(3(1+z)^{3/2})$$

$$\Omega_0 > 1: \frac{t_{\text{closed}}(z)}{t_H} = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\cos^{-1} \left(\frac{\Omega_0 z - \Omega_0 + 2}{\Omega_0 z + \Omega_0} \right) - \frac{2\sqrt{(\Omega_0 - 1)(\Omega_0 z + 1)}}{\Omega_0(1 + z)} \right]$$

$$\text{é } t(z) / t_H = 2/(3(1+z)^{3/2} \Omega_0^{1/2})$$

Um Universo só de Matéria

Juntando os resultados para a **idade** do **Universo** em função do valor atual do parâmetro de densidade:



$$\Omega_0 < 1: \frac{t_{\text{open},0}}{t_H} = \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{3/2}} \left[-\cosh^{-1} \left(\frac{2}{\Omega_0} - 1 \right) + \frac{2\sqrt{1 - \Omega_0}}{\Omega_0} \right]$$

$$\Omega_0 = 1: t_{\text{plano},0} / t_H = 2/3$$

$$\Omega_0 > 1: \frac{t_{\text{closed},0}}{t_H} = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\cos^{-1} \left(\frac{2}{\Omega_0} - 1 \right) - \frac{2\sqrt{\Omega_0 - 1}}{\Omega_0} \right]$$

Um Universo só de Matéria

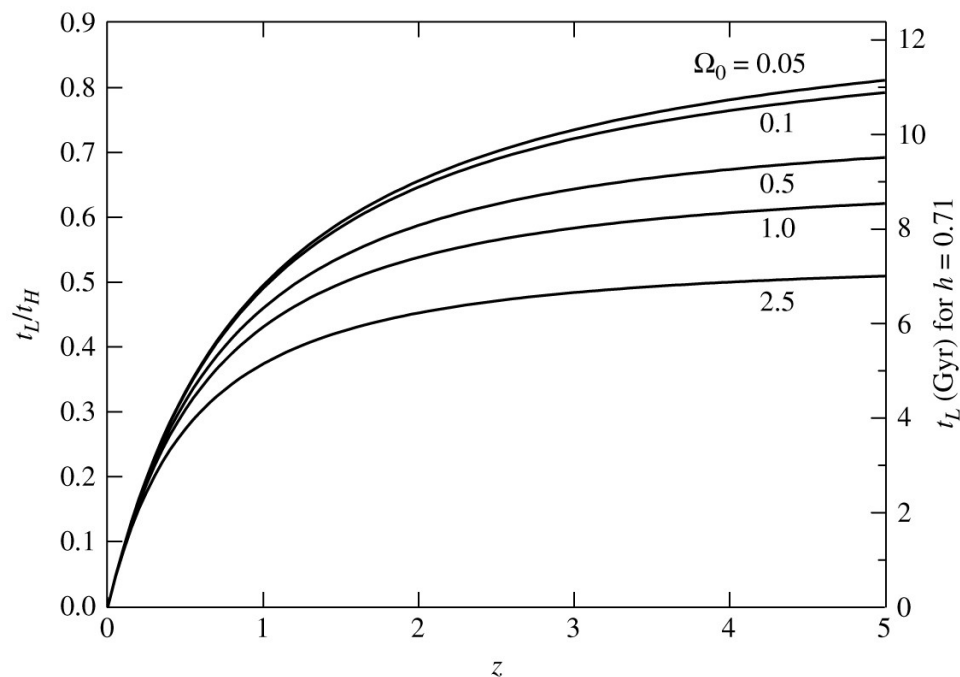
O *Lookback Time*

Não só a idade (o tempo decorrido desde *redshift* 0), depende de Ω_0 , mas toda a relação $z - t_L = t_0 - t(z)$:

Por exemplo, para um Universo plano ($\Omega_0 = 1$), ela é:

$$t_L/t_H = \frac{2}{3} \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \right]$$

Para vários Universos abertos e fechados, vide a figura.



Incluindo Pressão

Aplicando em um volume V de **densidade**, **pressão** e **temperatura homogêneas** a 1ª Lei da Termodinâmica, a **alteração** da **energia interna** em um volume é igual à quantidade de **calor recebida** menos o **trabalho** realizado pela **pressão** para o ambiente:

$$dU = dQ - dW, \text{ onde } dW = PdV, dQ = TdS$$

Pela total **homogeneidade** da esfera, a **expansão** deve ser **reversível**, isto é, **adiabática**, **não** há **transferência** de **calor**, $dS = 0$, ou $dQ = 0$; escrevendo como derivada no tempo:

$$dU/dt = -dW/dt = -P dV/dt$$

Definindo a densidade de energia interna $u = U/V$:

$$d(uV)/dt = -P dV/dt$$

Incluindo Pressão

$$d(uV)/dt = -P dV/dt$$

Já que $u = \rho c^2$ (aqui roubamos da relatividade, $E = mc^2$):

$$d(c^2\rho V)/dt = -P dV/dt \Rightarrow d(\rho V)/dt = -P/c^2 \cdot dV/dt$$

Volumes crescem com a **terceira potência** do **fator de escala**, $V(t) = R(t)^3 V_0$, onde V_0 é o volume hoje:

$$\begin{aligned} d(\rho R^3 \cancel{V_0})/dt &= -P/c^2 \cdot d(R^3 \cancel{V_0})/dt \\ \Rightarrow d(R^3 \rho)/dt &= -P/c^2 \cdot d(R^3)/dt, \end{aligned}$$

que é a **Equação de Fluido**.

Para um Universo de poeira, $R^3 \rho$ é constante $\Leftrightarrow P = 0$, como esperado.

Incluindo Pressão

$$d(R^3\rho)/dt = -P/c^2 \cdot d(R^3)/dt$$

Combinando esta equação de maneira esperta com a Equação de Friedmann (\Rightarrow quadro) obtemos a

$$\text{Equação de aceleração: } d^2R/dt^2 = -4\pi G/3 \cdot (\rho + 3P/c^2) \cdot R$$

Ao contrário do que a intuição diz, **pressão** tende a **desacelerar** a **expansão**, já que ela não está aplicando **nenhuma força** de **pressão** (o gradiente da pressão é zero), mas pode ser associada à **energia cinética** das **partículas**, que corresponde a uma **massa** ($E = mc^2$ de novo) que causa uma **atração**.

Incluindo Pressão

As equações de Friedmann, de fluido e de aceleração contêm as três incógnitas R , ρ e P , mas elas não são independentes, tal que precisamos de uma terceira relação para calcular a evolução do nosso Universo modelo.

A terceira é a equação de estado, que pode em geral ser escrita como:

$$P = wu = w\rho c^2,$$

onde w depende da natureza do fluido enchendo o Universo (matéria, radiação, ...):

para "poeira" (boa aproximação para matéria): $w = 0 \Leftrightarrow P = 0$

para radiação: $w = 1/3 \Leftrightarrow P = \rho c^2/3 = u/3$

Incluindo Pressão

Para um Universo que consiste de (ou é dominado por) apenas **um componente**, a Equação de Fluido leva a (\Rightarrow quadro):

$$R^{3(1+w)}\rho = \text{const.} = \rho_0$$

para um Universo de matéria ($w = 0$): $\rho = R^{-3}\rho_0 = (1+z)^3\rho_0$
inversamente a volumes comoventes, como já sabíamos.

para um de **radiação** ($w = 1/3$): $\rho = R^{-4}\rho_0 = (1+z)^4\rho_0$

A **densidade** cai com a **quarta potência** de $(1+z)$, **três** pelo **aumento do volume**, e **um** por causa da **diminuição de energia** dos fótons do **aumento do comprimento de onda**, já que $m = E/c^2 = h/c\lambda^*$

*Estritamente falando, aqui deixamos de usar apenas física newtoniana: quantização da radiação, equivalência massa-energia, relação de de Broglie.

Incluindo Pressão

Como se comporta a **radiação**?

$$\rho_{\text{rad}} = R^{-4} \rho_{\text{rad},0} = (1+z)^4 \rho_{\text{rad},0}$$

Pela Lei de Wien, a **temperatura** cai inversamente proporcional às comprimentos de onda, ou seja, como $(1+z) = R^{-1}$: $T = (1+z)T_0 = R^{-1}T_0$

Incluindo Pressão

Como se comporta a **radiação**?

Num Universo **só** de **radiação**, a **Equação de Friedmann** é $(dR/dt)^2 - 8\pi G\rho_{\text{rad},0}/3R^2 = -kc^2$

Para um **Universo plano**, $k = 0$ e $\rho_{\text{rad},0} = \rho_{\text{c},0} = 3H_0^2/8\pi G$, isto vira $(dR/dt)^2 - H_0^2/R^2 = 0$

A solução é (\Rightarrow quadro): $R_{\text{rad,plano}} = \sqrt{2H_0 t} = \sqrt{2t/t_H} \propto t^{1/2}$

$\Rightarrow \rho_{\text{rad}}(t)$ prop. t^{-2} , $T(t)$ prop. $t^{-1/2}$

e $dR(t)/dt \propto t^{-1/2}$ e $H(t) \propto t^{-1}$ tendem a zero para $t \rightarrow \infty$

Um calculo similar ao do sl. 17 leva a

$$\Omega = 1 + (\Omega_0 - 1)/(1 + 2\Omega_0 z + \Omega_0 z^2),$$

o que significa, que num Universo só de radiação:

- $(\Omega - 1)$, e então, **k , não muda de sinal**, e

- Ω **evolui para longe** de 1,

igual como num Universo só de matéria.

Incluindo Pressão

Juntando as constituintes do Universo

Expressando a **Equação de Aceleração**

$$d^2R/dt^2 = -4\pi G/3 \cdot (\rho + 3P/c^2) \cdot R$$

em termos dos **parâmetros de densidade** ($i = \text{mat, rad}$):

$$d^2R/dt^2 = -4\pi G/3 \cdot \sum_i (\rho_i + 3P_i/c^2) \cdot R$$

$$= -4\pi G/3 \cdot \sum_i (\rho_i + 3w_i\rho_i c^2/c^2) \cdot R$$

$$= -4\pi G/3 \cdot \sum_i (1 + 3w_i)\rho_i \cdot R$$

$$= -4\pi G/3 \cdot \sum_i (1 + 3w_i)\Omega_i \cdot \rho_c \cdot R$$

$$= -4\pi G/3 \cdot 2R \cdot \rho_c \cdot \sum_i 0.5 \cdot (1 + 3w_i)\Omega_i$$

$$= \cancel{-8\pi G/3} \cdot R \cdot (\cancel{3H^2/8\pi G}) \cdot \sum_i 0.5 \cdot (1 + 3w_i)\Omega_i$$

$$= -R \cdot (dR/dt / R)^2 \cdot \sum_i 0.5 \cdot (1 + 3w_i)\Omega_i$$

$$= -(dR/dt)^2 / R \cdot \sum_i 0.5 \cdot (1 + 3w_i)\Omega_i$$

Incluindo Pressão

O Parâmetro de Desaceleração

Podemos definir uma grandeza útil chamada **parâmetro de desaceleração**:

$$q(t) \equiv - R(t) \cdot [d^2R(t)/dt^2] / [dR(t)/dt]^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_i (1 + 3w_i)\Omega_i(t) \\ = 0.5 \cdot \Omega_{\text{mat}}(t) + \Omega_{\text{rad}}(t), \quad \text{e}$$

$$q_0 = 0.5 \cdot \Omega_{\text{mat},0}(t) + \Omega_{\text{rad},0}(t),$$

que quantifica a **desaceleração** da **expansão** e confirma que **matéria** e **radiação** freiam a **expansão**.

Para um Universo de **matéria** sem **pressão**,

$q_0 = 0.5$ no caso plano,

$q_0 > 0.5$ no caso fechado, e

$q_0 < 0.5$ no caso aberto.

Cosmologia Newtoniana

Atualmente, as melhores determinações dos parâmetros deste modelo são:

Constante de Hubble: $H_0 = 67.7 \text{ km/sMpc}$

=> Densidade crítica hoje: $\rho_{c,0} = 8.63 \cdot 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$

$\Omega_{\text{mat},0} = 0.31 \Rightarrow \rho_{\text{mat},0} = 0.31 \rho_{c,0} = 2.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$

$\Omega_{\text{rad},0} = 9.1 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \rho_{\text{rad},0} = 7.85 \cdot 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}$ (desprezível hoje)

o que dá pro parâmetro de desaceleração hoje: $q_0 = 0.15$

Se a **cosmologia newtoniana** de um Universo de **matéria** e **radiação** for a última palavra, ele **expandirá** por **sempre**, sendo freiado um pouquinho, mas não o suficiente para parar a expansão (nem assintoticamente). Vivemos em um Universo **aberto**.



Universidade Federal do ABC

Introdução à Cosmologia

FIM PRA HOJE

