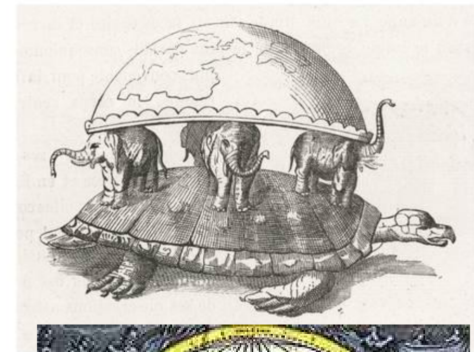
Introdução à Cosmologia

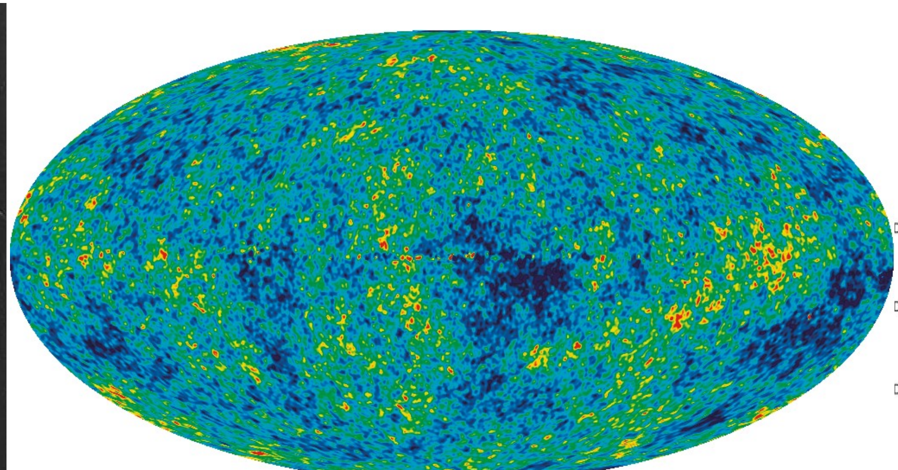
Universidade Federal do ABC

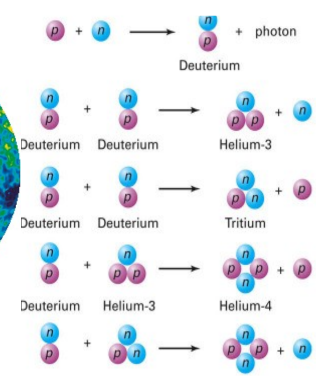


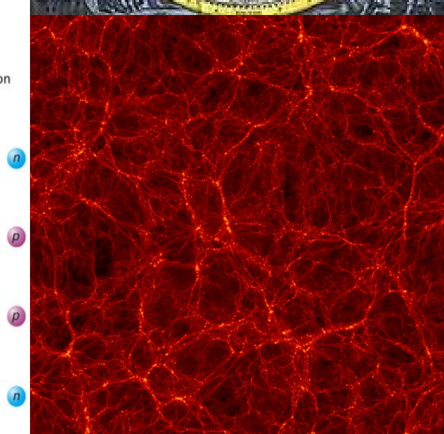
06. Relatividade Restrita

Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/Cosmo.html

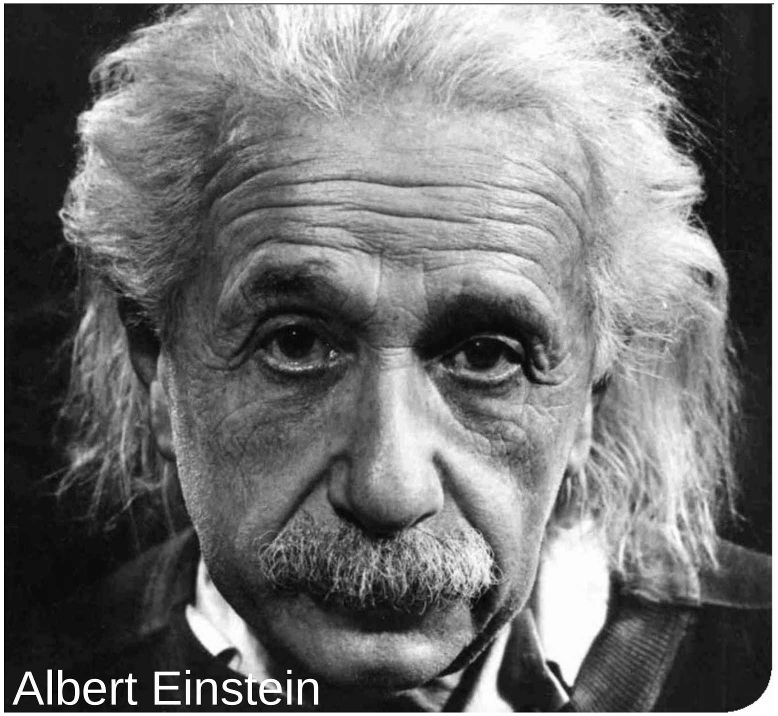






Relatividade

A Teoria da Relatividade foi desenvolvida por Albert Einstein de 1905 (Relatividade Restrita) a 1915 (Relatividade Geral), baseado nos trabalhos de Lorentz and Poincaré.



Ela afirma que as propriedades (geometria, eixo do tempo) de espaço e tempo dependem da situação do observador, do seu estado de movimento (velocidade, aceleração), e a sua posição em relação a massas altas.

Espaço e Tempo na Mecânica Newtoniana

Para entender melhor a necessidade desta nova teoria, é bom olhar pros conceitos de tempo e espaço da mecância newtoniana:

- Tempo: absoluto, homogêneo e isotrópico,
  i. e. igual em todos os lugares e em todas as direções
  - flui uniformemente, independente da posição e do estado de movimento do observador
    no sentido passado -> futuro

- Espaço: absoluto, homogêneo, isotrópico e euclidiano,
  tb. igual em todos os lugares e em todas as direções,
  a distância mais curta entre dois pontos é a reta

Sistema de Referência ou Referencial

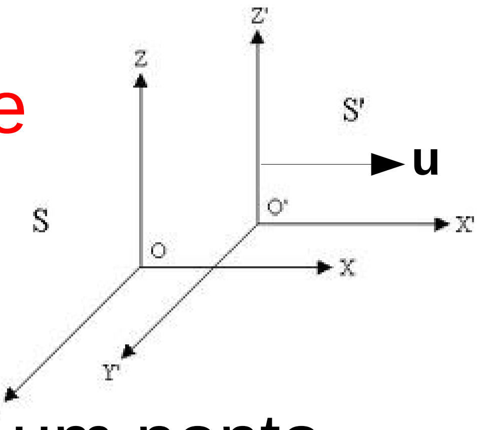
Sistema, naquele as Leis de Newton são válidas (exemplo: o Referencial Universal, ligado às galáxias).

Se um sistema A é um referencial, então B é um referencial, caso A e B se movimentam com velocidade constante um em relação ao outro.

=> Um laboratório na Terra não é um referencial, já que a Terra gira em torno do seu eixo e do Sol, que gira em torno do centro Galáctico, ...
=> Aceleração em relação ao Referencial Universal ~0.01 m/s².
Para aplicações com acelerações » 0.01 m/s², um laboratório na Terra pode ser usado como referencial.

A Transformação de Galileu

Considerando um sistema de inércia S'
se movimentando com velocidade constante
$\mathbf{u} = (u,0,0)$ em relação a um sistema S,
as origens dos dois sistemas coincidindo
em $t = 0$.



=> pode-se transformar as coordenadas de um ponto
$\mathbf{r} = (x,y,z)$ e o tempo usando a seguinte transformação:

$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$

=> $x' = x - ut$

$y' = y$

$z' = z$

$t' = t$ (simultaneidade e tempo absolutos),

que é a transformação de Galileu.

A Transformação de Galileu

Velocidades se transformam assim:

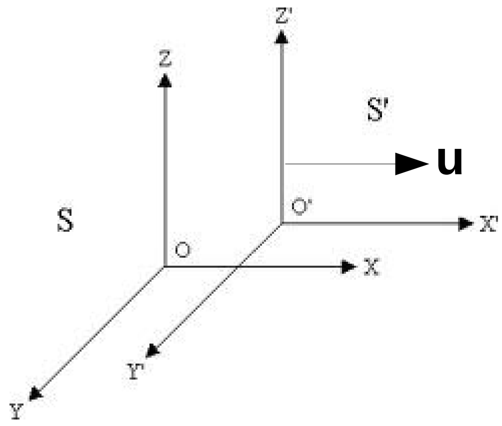
$\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt' = d(\mathbf{r}-\mathbf{u}t)/dt = d\mathbf{r}/dt - d(\mathbf{u}t)/dt$

$\quad = d\mathbf{r}/dt - t\cdot d\mathbf{u}/dt - \mathbf{u}\cdot dt/dt = \mathbf{v}-\mathbf{u}$

$\Rightarrow v_x' = v_x - u$

$\quad v_y' = v_y$

$\quad v_z' = v_z$



e acelerações: $\mathbf{a}' = d\mathbf{v}'/dt' = d(\mathbf{v}-\mathbf{u})/dt = d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a}$

=> Acelerações e, com isto, as Leis de Newton são invariantes na Transformação de Galileu.

=> Princípio de invariância de Galileu:

As leis fundamentais da Física são as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais.

Todos os sistemas de referência inerciais são equivalantes.

Não há um sistema de referência absoluto.

A Transformação de Galileu

Porém (final do século XIX):

Para as Leis do Eletromagnetismo, o princípio de invariância de Galileu parece falhar.
Exemplo: A força magnética $\mathbf{F} = q\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ aplicada em uma carga muda numa Transformação de Galileu.

=> As Leis do Eletromagnetismo parecem funcionar só em um determinado sistema de referência, que chamaram de éter.
Em particular, ondas eletromagnéticas devem se propagar pelo éter com a velocidade
$c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2} = 299\,792\,458$ m/s,
que pode ser derivada das Leis de Maxwell.

=> Conflito com o Princípio de invariância de Galileu.

O Experimento de Michelson-Morley

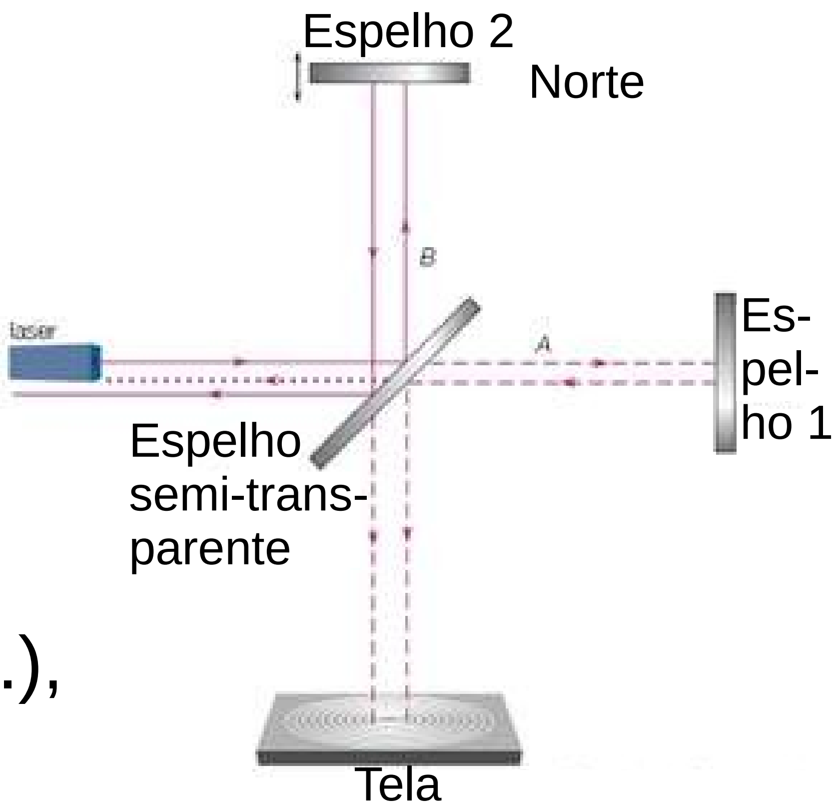
Em 1887 Michelson e Morley tentaram medir a velocidade da Terra em relação ao éter, comparando a velocidade da luz em direções perpendiculares da rosa de vento.

Albert Abraham Michelson

Edward Williams Morley

O Experimento de Michelson-Morley

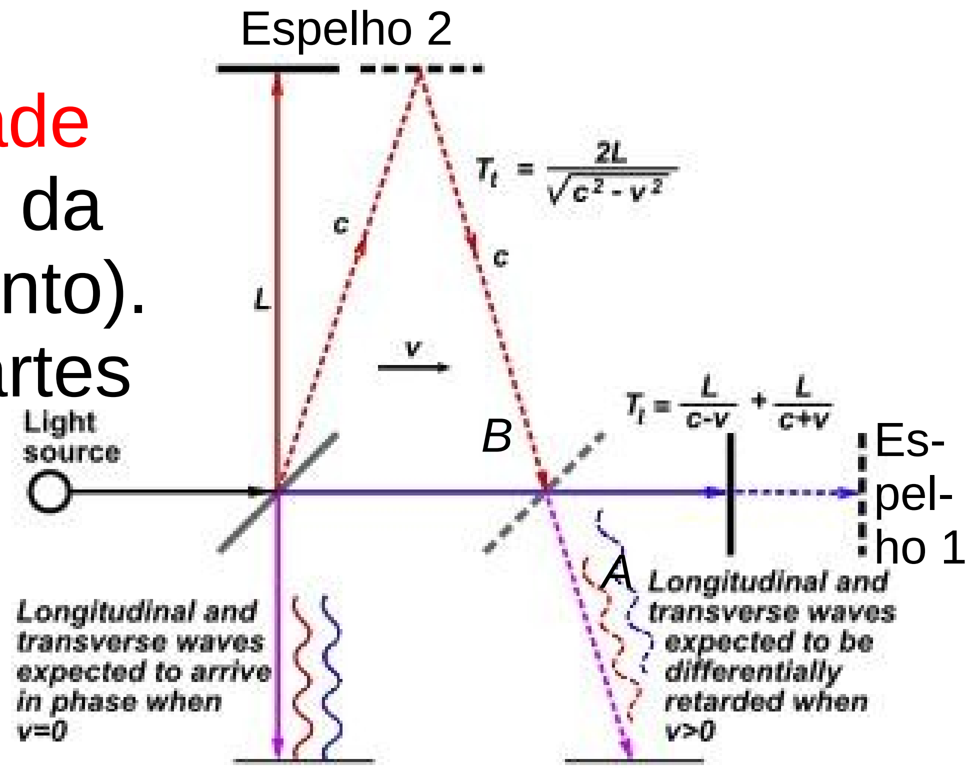
Eles usaram um interferômetro, cujo um braço viaja junto com a superfície da Terra (na direção leste-oeste), e o outro, com comprimento ajustável, perpendicular a este (norte-sul).



Luz coerente dividido no espelho semi-transparente (e.s.t.), fazendo caminhos *A* e *B*, e se re-juntando depois, deveria produzir um padrão de interferência na tela, dependendo da diferença entre os caminhos (óticos), Δs.

O Experimento de Michelson-Morley

Calculamos os tempos de percurso, onde v é a velocidade do interferômetro (da rotação da Terra na latitude do experimento). Só precisamos calcular as partes e.s.t. - espelho 1 ou 2 - e.s.t., já que os raios fazem o resto do caminho juntos:



$t_A = L/(c-v) + L/(c+v)$

t_B (calculado a partir do componente na direção N-S)

$= 2 \cdot L/(c^2-v^2)^{1/2}$

diferença: $\Delta t = t_A - t_B = L/(c-v) + L(c+v) - 2 \cdot L/(c^2-v^2)^{1/2}$

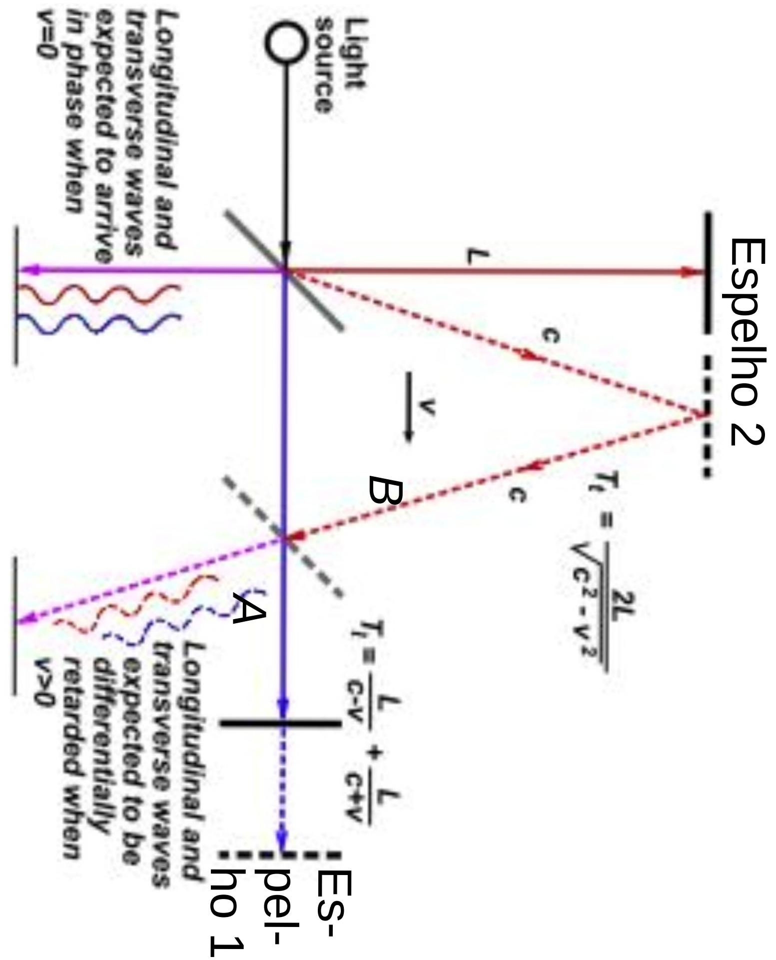
$= 2 \cdot L/(c^2-v^2) \cdot ((c+v)/2 + (c-v)/2 - (c^2-v^2)^{1/2}) = 2 \cdot L/(c^2-v^2) \cdot (c - (c^2-v^2)^{1/2})$

$\approx 2 \cdot L/c^2 \cdot (c - [c - \frac{1}{2} v^2/c]) = Lv^2/c^3$

O Experimento de Michelson-Morley

diferença: $\Delta t = Lv^2/c^3$

Ajustando o espelho 2 até não ter padrão de interferência e girando o interferômetro por 90°, deveria surgir um padrão que corresponde a uma diferença de percurso do dobro deste valor.



Para braços de 1 m, um laser com c.d.o. $\lambda \sim 500$ nm, ou $\nu \sim 6{\cdot}10^{14}$ Hz e $v \sim 3{\cdot}10^4$ m/s:

$\Delta t = 0.04\ \nu^{-1}$, ou $\Delta s = 0.04\ \lambda$, ou $\Delta N = 0.04$.

Diferença pequena, mas deve gerar um padrão de interferência detectável.

O Experimento de Michelson-Morley

Porém, Michelson e Morley não acharam diferença de padrão nemhum!

Fizeram o experimento aumentando o tamanho dos braços, em vários horários e épocas do ano, mas nada!

Albert Abraham Michelson

Edward Williams Morley

A luz se propaga com a mesma velocidade para sul, norte, oeste e leste!

Não se detecta movimento da Terra em relação ao éter!

Os Postulados de Einstein

Isto levou Einstein a fazer os seguintes dois postulados para a nova teoria:

- O Princípio da Relatividade: As leis da física são as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais.

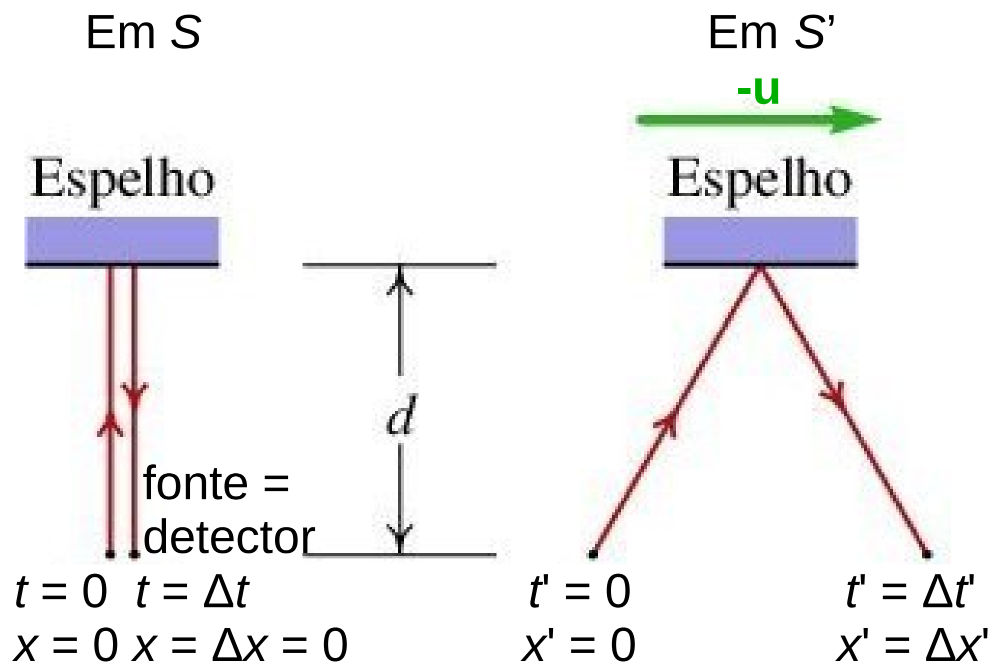
- A Constância (melhor: invariância) da Velocidade da Luz: A luz se movimenta pelo vácuo com uma velocidade constante c, que é independente do movimento da fonte da luz, ou do observador.

Outra condição:
- Princípio de correspondência: Para velocidades baixas, $u \ll c$, a nova teoria deve tender à teoria newtoniana.

=> Encontrar novas Transformações que garantem isto.

A Transformação de Lorentz

O Relógio de Luz



Usando um arranjo fonte-espelho-detector, chamado relógio de luz, naquele um fóton (raio) de luz viaja ida e volta até um espelho, e medindo (calculando) o tempo de viagem, obtemos um resultado inportante para chegar na transformação entre referenciais, que satisfaz os postulados de Einstein, especificamente a invariância da velocidade da luz.

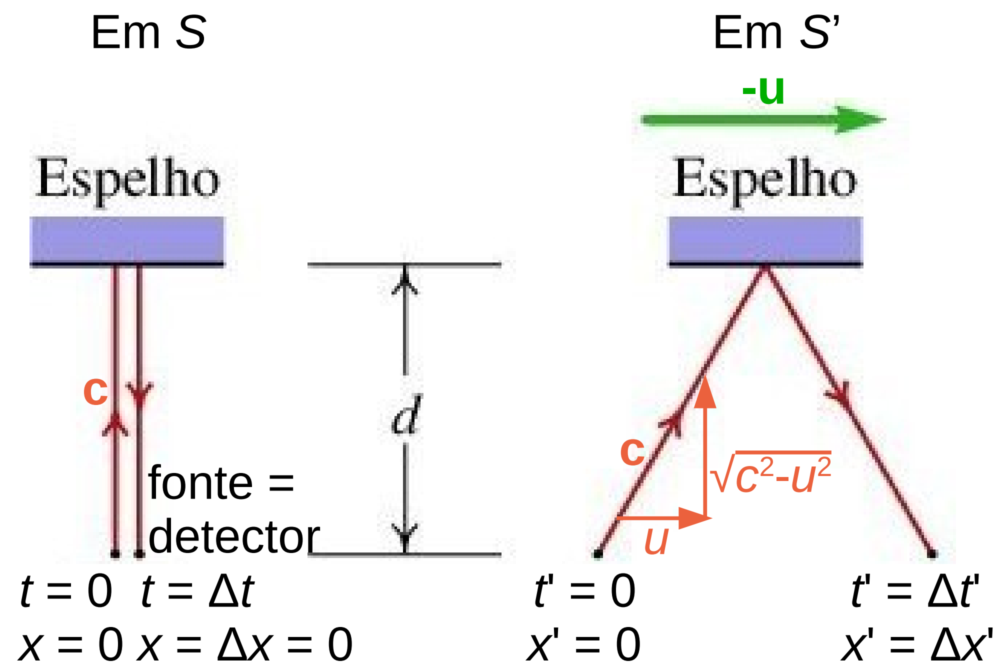
A Transformação de Lorentz

O Relógio de Luz

Tempo de viagem em S:
$\Delta t = 2d/c$

em S':
$\Delta t' = 2d/\sqrt{c^2-u^2}$

$\Rightarrow \Delta t'/\Delta t = 2d \cdot c/2d \cdot \sqrt{c^2-u^2}$
$= 1/\sqrt{1-u^2/c^2} =: \gamma$

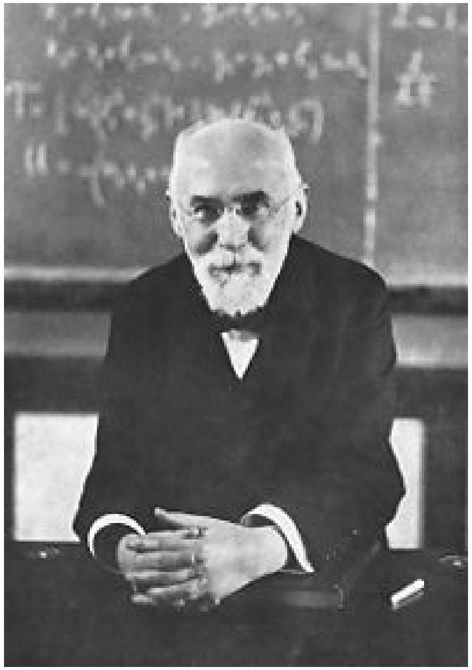


O tempo depende do referencial!
Fenômeno chamado dilitação do tempo.
Em S', ele é maior por um fator $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$, fator importante na transformação que estamos procurando.

A Transformação de Lorentz

Na Relatividade Restrita, a transformação de coordenadas na troca de referencial, i. e. no caso "Sistema *S*' se movimentando com **u** = (*u*,0,0) em relação a *S*" é realizada pela Transformação de Lorentz (1904):

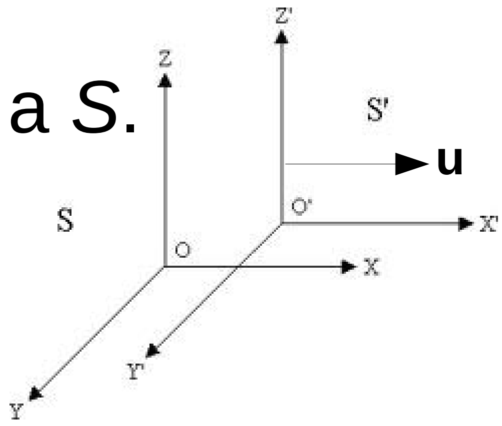
Esta transformação é às vezes chamada *boost* pela velocidade **u** (neste caso, na direção dos *x*).



Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)

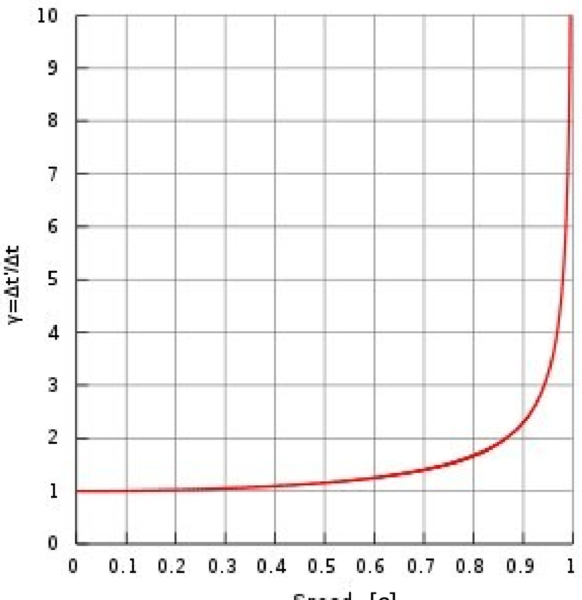
A Transformação de Lorentz

Mesma situação que antes: Sistema *S*' se movimentando com **u** = (*u*,0,0) em relação a *S*.



Demos uma olhada nas seguintes transformações, chamadas Transformações de Lorentz:

$x' = \gamma\cdot(x-ut)$
$y' = y$
$z' = z$
$t' = \gamma\cdot(t-ux/c^2)$,
onde $\gamma := 1/\sqrt{1-u^2/c^2} = 1/\sqrt{1-\beta^2}$
= fator de Lorentz, $\beta := u/c$
$\gamma(u=0) = 1$
$\gamma(u=c) = \infty$



A Transformação de Lorentz

Exercício: mostre que, aplicando esta transformação em (x',y',z',t') usando -u em lugar de u, obtém-se (x,y,z,t) de volta.

=> As transformações inversas são as mesmas, substituindo u por $-u$, como deveria ser, já que S se movimenta com -**u** em relação a S'.

Exercício 2: Mostre que, para $u \ll c$, estas transformações se tornam as transformações de Galileu.

A Transformação de Lorentz

E a Invariância da Velocidade da Luz?

tomando um fóton, que estava na origem de S e S' em $t = 0$, viajando na direção $+x$.

Após um tempo t, ele está em $(x=ct,0,0)$.

E no sistema S': $t' = \gamma\cdot(t-ux/c^2)$, $x' = \gamma\cdot(x-ut)$
=> neste sistema, o fóton viajou com velocidade
$x'/t' = \cancel{\gamma}(x-ut)/\cancel{\gamma}(t-ux/c^2) = (ct-ut)/(t-uct/c^2) = c$
Também com c!

Exercício: Mostre a invariância da velocidade da luz para luz viajando na direção $-x$ e na direção y.

Para direções quaisqueres é um pouco mais laboroso (=> vide quadro).

A Transformação de Lorentz

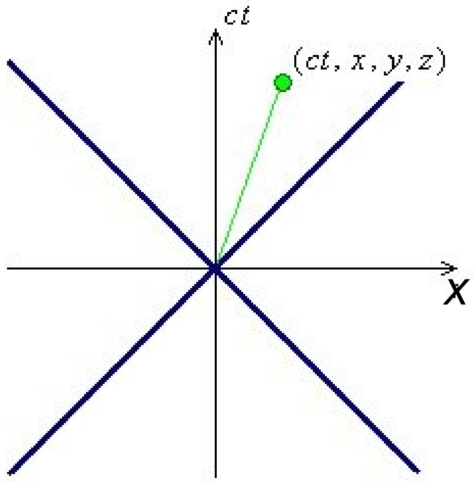
A transformação de Lorentz geral é dada por
- um *boost* por uma velocidade **u** em uma direção qualquer (que torna as transformações de *x*, *y* e *z* mais chatas),
- mais uma rotação do sistema de coordenadas (como aprendido na geometria analítica),
- e um possível deslocamento da origem (adição de um vetor, caso as origens dos dois sistemas não coincidem em $t = 0$).

=> Matematicamente laboroso

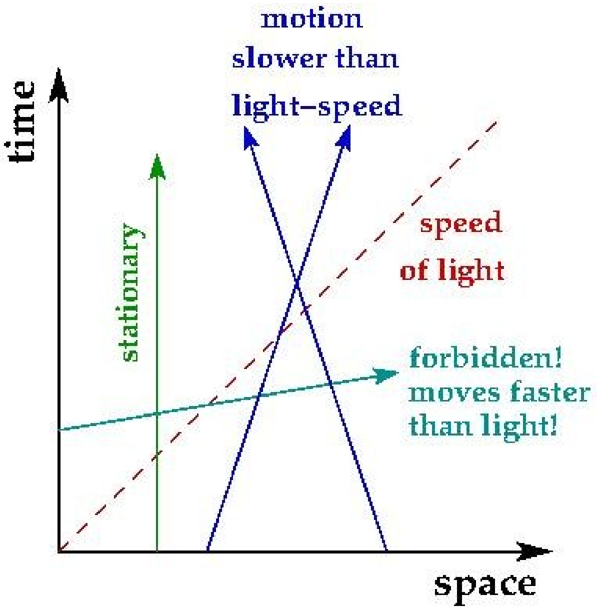
Felizmente, a maioria dos fenômenos interessantes podem ser ilustrados usando a geometria adotada até agora: um *boost* na direção dos *x*, sem rotação ou deslocamento. Continuaremos usando esta geometria quase sempre.

A Transformação de Lorentz

É útil introduzir o Diagrama Espaço-Tempo

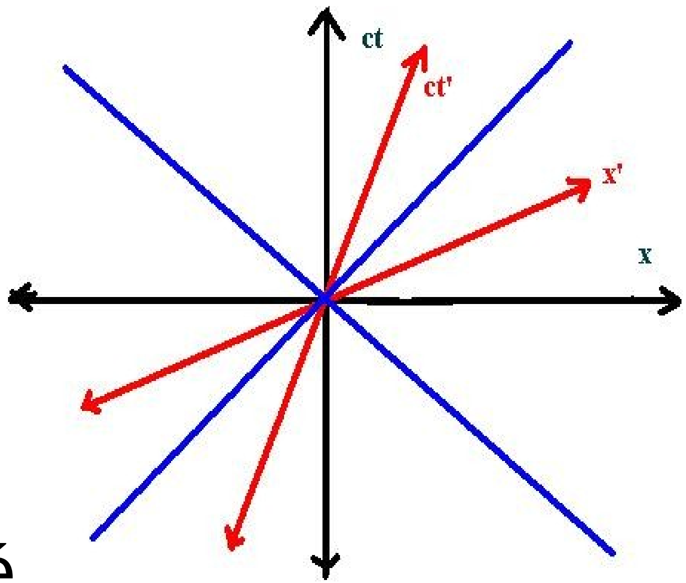


eixo horizontal: *x*
eixo vertical: *t*, multiplicado pela velocidade da luz, *c*, para que os eixos tenham as mesmas unidades (de distância).
y e *z* são ignorados, já que tudo que é interessante acontece nas dimensões *x* e *t*.



Retas no diagrama representam objetos viajando com velocidades constantes, quanto mais rapidamente, tanto menos inclinadas.
Uma inclinação de 45° corresponde à velocidade da luz.

A Transformação de Lorentz



Dando uma olhada de novo para estas transformaçoes:

$x' = \gamma \cdot (x - ut)$
$t' = \gamma \cdot (t - ux/c^2)$

Elas misturam espaço (x) e tempo!

O que pro observador em S é espaço é (parcialmente) tempo pro observador em S', e vice-versa.

Eventos que acontecem na mesma posição para S, não necessáriamente acontecem na mesma posição para S'.

Eventos que são simultâneos para S, não necessáriamente são simultâneos para S'.

O Espaço-Tempo ou Espaço de Minkovskij

As quatro dimensões *x*, *y*, *z* e *t*
(o último multiplicado por *c*)
juntos definem um espaço
4-dimensional, o Espaço-Tempo,
ou Espaço de Minkovskij.

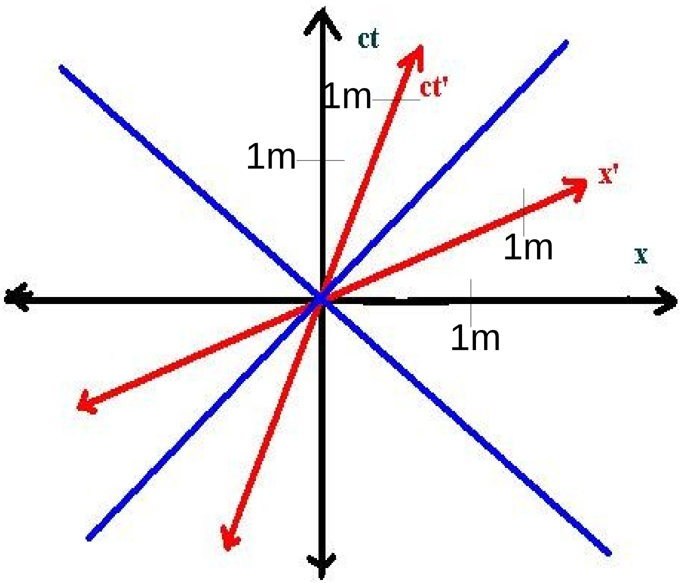
Minkovskij era professor do Einstein em Zürich, e foi ele quem se deu conta que a teoria da relatividade pode melhor ser entendido em um espaço quadri-dimensional, naquele o tempo faz um papel similar que as coordenadas espaciais.

Герман Минковский,
1864-1909

O Espaço-Tempo ou Espaço de Minkovskij

Definimos como evento um ponto no Espaço-Tempo, (x,y,z,ct).

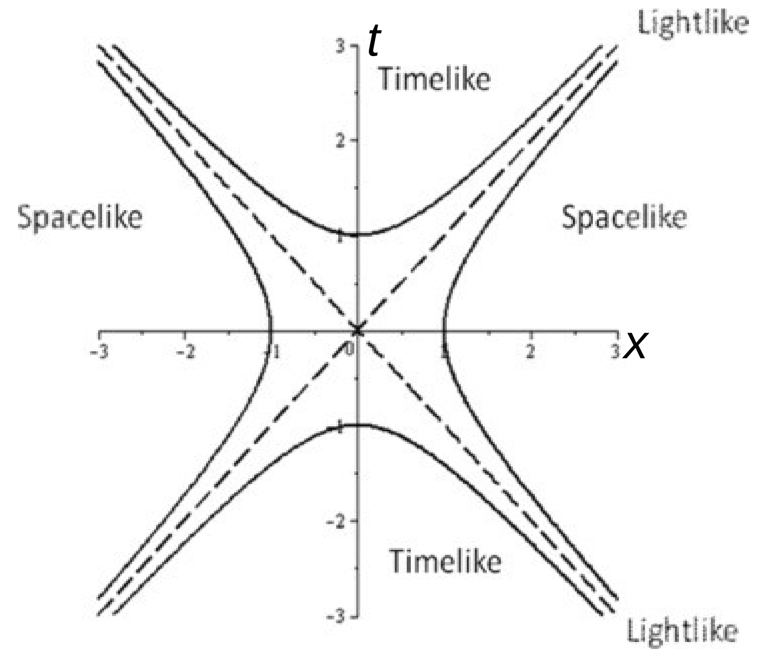
!! Vários autores usam ct como zero-ésima coordenada (e não como quarta): (ct,x,y,z).



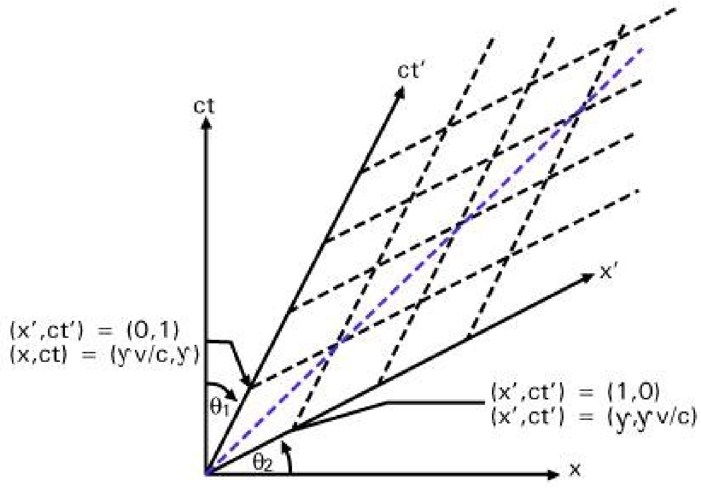
!! Na transformação de um sistema para outra, as escalas não são conservadas.

O Espaço-Tempo ou Espaço de Minkovskij

Os eventos que representam $x' = 1$ m, $t' = 0$ em todos os referenciais *S*' (i.e. variando *u*), descrevem um braço de uma hipérbole no diagrama de *S*.



Mesma coisa para
todos os eventos $x' = -1$ m, $t' = 0$,
todos os eventos $x' = 0$, $ct' = 1$ m
e todos os eventos $x' = 0$, $ct' = -1$ m.

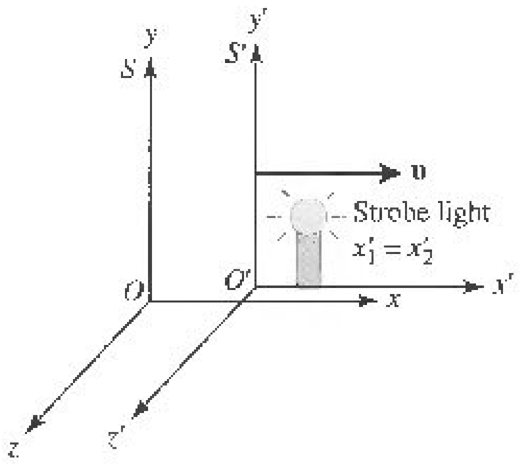


Neste diagrama, a invarância da velocidade da luz fica evidente.

Relatividade Restrita

Dilatação do Tempo

Supondo uma lâmpada que viaja junto com *S*' (*S*' é seu sistema de repouso), e que pisca duas vezes em t_1' e t_2':



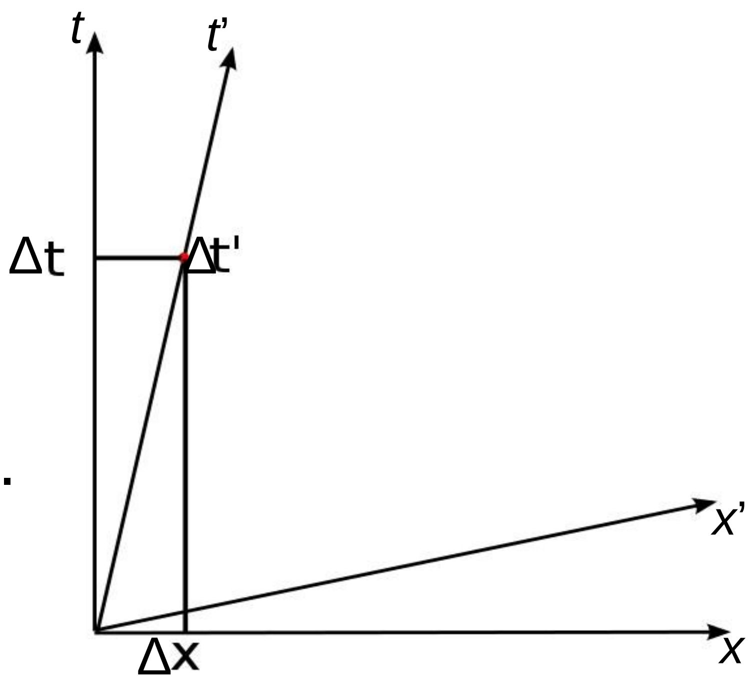
Em *S*: $\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \cdot (t_2' - t_1' + (x_2' - x_1') u/c^2)$

mas $x_2' - x_1' = 0$, já que *S*' viaja junto.

=> $\Delta t = \gamma \cdot (t_2' - t_1') = \gamma \Delta t' \geq t'$

Em *S* passa mais tempo entre os pulsos.
=> Dilatação do tempo.

O sistema de repouso é aquele, naquele o tempo entre os dois eventos é o mais curto.
O tempo deste sistema, *t*', é chamado o tempo próprio da lâmpada.



Relatividade Restrita

Contração de Comprimentos

Supondo uma barra com comprimento L' viajando junto com S' (seu sistema de repouso), L' obviamente é $x_2'-x_1'$, a distância entre suas extremidades, cujas posições são constantes em t':

$\Rightarrow L' = x_2'-x_1' = \gamma\cdot(x_2-x_1 - u(t_2-t_1))$

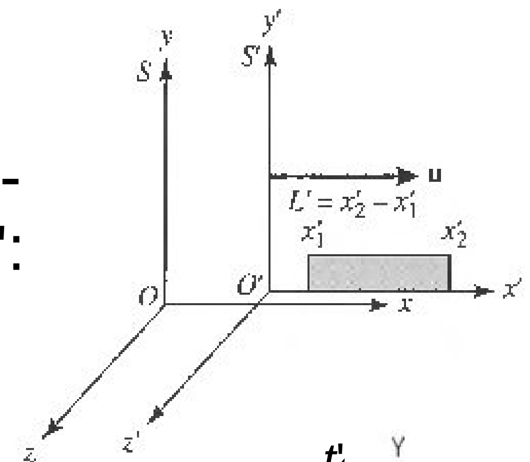
Para saber o comprimento em S, L, temos que medir x_2-x_1 em S ao mesmo tempo, quando $t_1 = t_2$

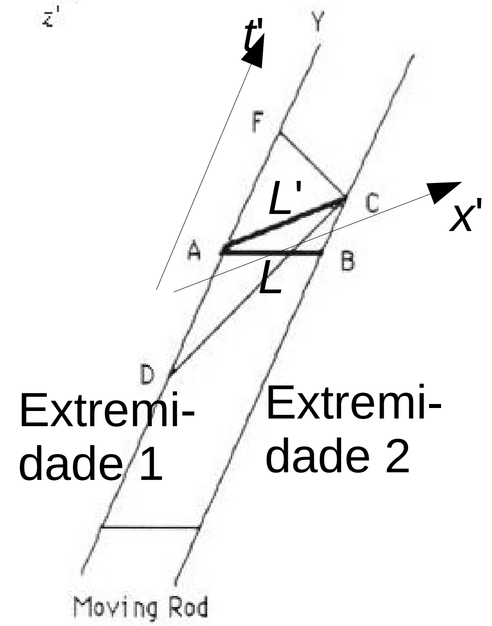
$\Rightarrow L' = \gamma\cdot(x_2-x_1 - \cancel{u(t_2-t_1)}) = \gamma L \Rightarrow L = \gamma^{-1}L' \leq L'$

$\Rightarrow$ L é mais curto que L'.

$\Rightarrow$ Contração do comprimento.

O sistema de repouso é aquele, naquele L é o mais comprido. O tempo deste sistema, t', é o tempo próprio da barra.





Relatividade Restrita

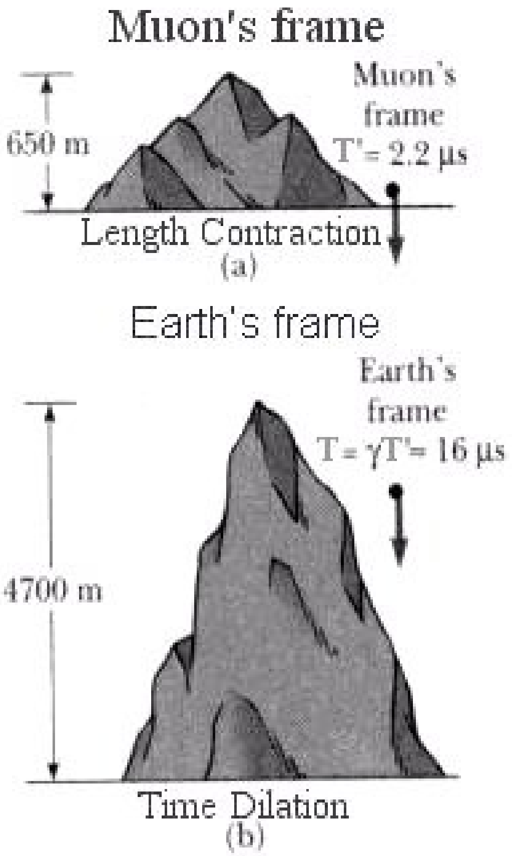
Dilatação do Tempo e Contração de Comprimentos

Formulado de jeito popular:
"relógios em movimento rodam mais lentamente", resp.
"réguas em movimento são mais curtas".

Os dois efeitos são complementares.

Exemplo: múons, μ, têm tempo de vida de 2.2 μs.
=> Os μ cósmicos, produzidos por raios cósmicos no topo da atmosfera da Terra, e descendo com velocidade 0.9952·*c*, deveriam ter decaído até chegar na Terra, mas eles sobrevivem e são detectadas por causa da Dilatação do Tempo.

No referencial deles, a sobrevivência se deve à Contração do caminho até a Terra.



Relatividade Restrita

Transformação de Lorentz de Velocidades

Conseguimos calcular a transformação de velocidades. Sendo **v** uma velocidade (de um corpo ou uma partícula) em *S*, e **v**', a transformada de Lorentz de **v**, isto é, a velocidade do corpo ou partícula em *S*', e **u** = (*u*,0,0), a velocidade relativa entre *S* e *S*' (como sempre) obtemos (=> quadro):

$v_x' := \Delta x'/\Delta t' = (v_x - u) / (1-uv_x/c^2)$
$v_y' := \Delta y'/\Delta t' = v_y / \gamma(1-uv_x/c^2)$
$v_z' := \Delta z'/\Delta t' = v_z / \gamma(1-uv_x/c^2)$

Relatividade Restrita

Transformação de Lorentz de Velocidades

A transformação inversa é a mesma, trocando u por $-u$ (como sempre):

$$v_x = (v_x' + u) / (1+uv_x'/c^2)$$
$$v_y = v_y' / \gamma(1+uv_x'/c^2)$$
$$v_z = v_z' / \gamma(1+uv_x'/c^2),$$

e para velocidades u e v baixas ($\ll c$), re-obtemos a transformação de Galileu, como exigido pelo princípio de correspondência (simples de mostrar).

Relatividade Restrita

Transformação de Lorentz de Velocidades

Já que, nesta geometria, **u** é na direção dos x, $uv_x = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, e podemos achar a transformação por um *boost* por um velocidade **u** em qualquer direção:

$v_{\parallel \mathbf{u}}' = (v_{\parallel \mathbf{u}} - u) / (1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2)$
$\mathbf{v}_{\perp \mathbf{u}}' = \mathbf{v}_{\perp \mathbf{u}} / \gamma(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2)$,

onde $v_{\parallel \mathbf{u}}$ é a componente de **v** paralela a **u**, e $\mathbf{v}_{\perp \mathbf{u}}$, o vetor 2D composto das componentes perpendiculares a **u**.

Relatividade Restrita

Adição de Velocidades na Relatividade

Adicionar velocidades $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ dá no mesmo que considerar um objeto deslocando-se com $\mathbf{v}_2$ em relação a *S*, e observá-lo de um referencial *S*', *S* movimentando-se com $\mathbf{v}_1$ em relação a *S*' (=> *S*' com $-\mathbf{v}_1$ em rel. a *S*')
=> transformar $\mathbf{v}_2$ por um *boost* pela velocidade $-\mathbf{v}_1$
(tomando $\mathbf{v}_1$ na direção dos *x*):

$$v_{\mathrm{tot},x} = (v_{2,x} + v_{1,x}) / (1+v_{1,x}v_{2,x}/c^2)$$
$$v_{\mathrm{tot},y} = v_{2,y} / \gamma(1+v_{1,x}v_{2,x}/c^2)$$
$$v_{\mathrm{tot},z} = v_{2,z} / \gamma(1+v_{1,x}v_{2,x}/c^2)$$

Exemplo: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = (0.999c,0,0) \Rightarrow \mathbf{v}_{\mathrm{tot}} = (0.9999995c,0,0)$
Independente de quanto se "adiciona velocidade" (acelera), nunca se alcança (ou supera) a velocidade da luz!

Relatividade Restrita

O Efeito Doppler para a Luz

Christian Doppler
(1803–1853)

Lembrete: O Efeito Doppler para o Som.
É a mudança da frequência de uma onda sonora da fonte para um observador em movimento em relação à fonte, devido ao fato, de que crestas subsequentes da onda são emitidas em distâncias diferentes até o observador, fazendo que se soma ou subtrai ao período de oscilação da onda (o inverso da frequência), a diferença de tempo de viagem das crestas da fonte até o observador.

Para calculá-lo, temos que levar em conta as velocidades de fonte e observador em relação ao meio de propagação da onda (o ar).

Relatividade Restrita

O Efeito Doppler para a Luz

Lembrete: O Efeito Doppler para o Som

Dando nomes:

f_0: frequência da onda no referencial da fonte,

f: frequência no referencial do observador

$\Delta f = f - f_0$: mudança de frequência de fonte para observador

$\Delta f/f$: mudança relativa de frequência

c_s: velocidade da onda (do som) em relação ao meio de propagação (o ar), ~300 m/s.

v_s: velocidade da fonte em relação ao meio (na direção longe do observador)

v_r: velocidade do observador em relação ao meio (na direção da fonte)

Relatividade Restrita

O Efeito Doppler para a Luz

Lembrete: O Efeito Doppler para o Som

fonte em movimento: $f = \left(\frac{c_s}{c_s \pm v_s}\right) f_0$

$v_s \ll c_s$: $\Delta f/f_0 = (f - f_0)/f_0 \approx -v_s/c_s$

observador em movimento: $f = \left(\frac{c_s \pm v_r}{c_s}\right) f_0$

$v_r \ll c_s$: $\Delta f/f_0 \approx v_r/c_s$

=> ambos em movimento: $f = \left(\frac{c_s \pm v_r}{c_s \pm v_s}\right) f_0$

$v_s, v_r \ll c_s$: $\Delta f/f_0 \approx (v_r - v_s)/c_s = v_{rel}/c_s$

Relatividade Restrita

O Efeito Doppler para a Luz

Mas para a luz, não temos um meio de propagação (já que Michelson e Morley mataram o éter).

Esperamos que, neste caso, o efeito Doppler seja uma função apenas da velocidade relativa entre fonte e observador.

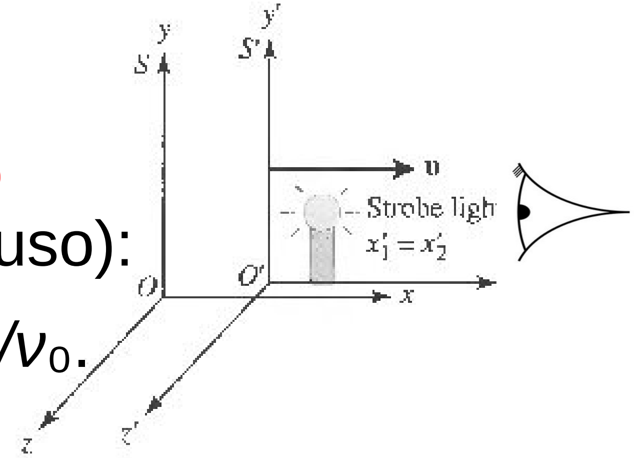
Christian Doppler
(1803-1853)

Michelson

Morley

Relatividade Restrita

O Efeito Doppler para a Luz



Se a fonte de luz viaja com *S*', tomando agora como $\Delta t'$ um período de oscilação da radiação da lâmpada: $\Delta t' = T' = 1/\nu_0$, (ν_0 = freq. de repouso):

Pela diltatação do tempo temos em *S*: $t_2\text{-}t_1 = \gamma/\nu_0$.

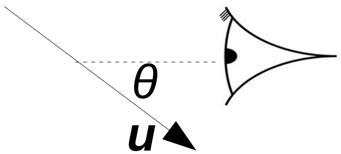
Mas t_1 e t_2 são os momentos da emissão das frentes de onda pela fonte.
Para calcular a diferença entre os momentos da chegada no observador em *S*, temos que adicionar a diferença (aqui negativa) de caminho, $(t_2\text{-}t_1)\cdot u$, dividida pela velocidade do sinal, *c*.

$$\Delta t_{obs} = \nu_{obs}^{-1} = t_2\text{-}t_1 + (t_2\text{-}t_1)\cdot u/c = \gamma/\nu_0\cdot(1+u/c) = \nu_0^{-1}\cdot(1+u/c)/(1\text{-}u^2/c^2)^{1/2}$$

=> $\nu_{obs} = \nu_0\cdot\sqrt{(1\text{-}u/c)/(1+u/c)}$, para $|u| \ll c$: $\nu_{obs} \approx \nu_0\cdot(1\text{-}u/c)$
onde *u* é negativa para aproximação, e positiva para afastamento relativo.

Relatividade Restrita

O Efeito Doppler para a Luz



Isto vale para movimento na direção da linha de visada.
Se a fonte está se movimentando a um ângulo θ com a linha de visada, a fórmula se torna ($u_r = u \cdot \cos\theta$):

$$\nu_{obs} = \nu_0 \cdot \sqrt{(1-u^2/c^2)}/(1+u_r/c)$$

Se a fonte está se movimentando perpendicular à linha de visada, há um efeito Doppler transversal, devido à Dilatação do Tempo:

$$\nu_{obs} = \gamma^{-1}\nu_0 = \sqrt{(1-u_t^2/c^2)} \cdot \nu_0$$

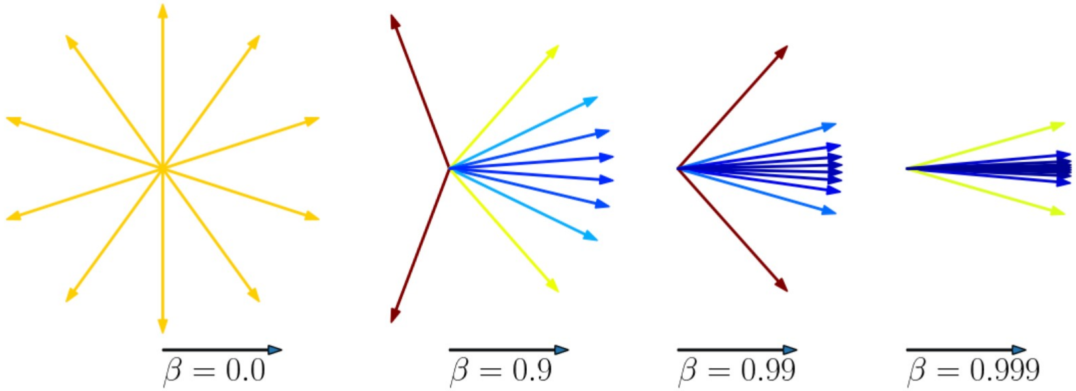
Às vezes se define o *redshift* (deslocamento para o vermelho) ou *blueshift* (pro azul) devido ao efeito Doppler (aqui $u = u_r$, isto é o movimento relativo é na direção da linha de visada):

$$\lambda_{obs} = (1+z)\cdot\lambda_0 \iff z \equiv (\lambda_{obs}-\lambda_0)/\lambda_0 = \sqrt{(1+u_r/c)/(1-u_r/c)} - 1,$$

para $u_r \ll c$: $z = u_r/c$

Relatividade Restrita

Colimação Relativística



Uma consequência disto é a colimação relativística (ingl. *relativistic beaming* ou *headlight effect*, "efeito farol").
Além de mais azul, a luz emitida pra frente também é mais intensa (e pra trás, menos intensa), já que luz de comprimento de onda curta é mais energética.
Assim, uma fonte de luz em velocidade relativística irradia principalmente na direção do seu movimento (em relação ao observador).

Relatividade Restrita

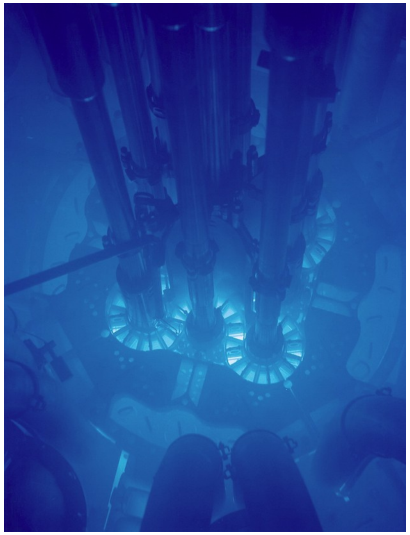
Efeito/Radiação (Vavilov-)Tcherenkov (Вавилов-Черенков) - 1934

Prêmio Nobel 1958

Павел Алексеевич Черенков (1904-1990)

É uma radiação (normalmente azul), que surge, quando uma partícula (carregada) passa por um meio com velocidade acima da velocidade da luz naquele meio.

É aproveitado para detectar partículas com velocidades relativísticas, por exemplo, raios cósmicos, e determinar as suas velocidades.



É o análogo ótico ao estrondo sônico.

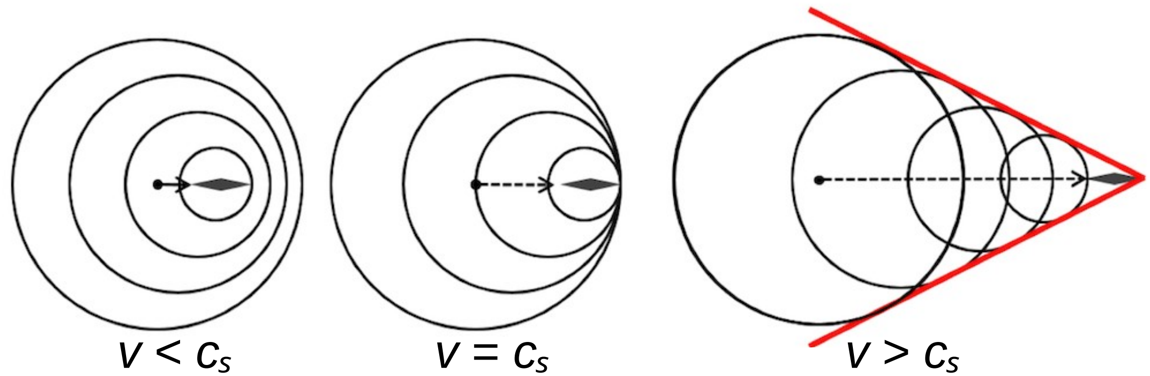
Relatividade Restrita

O Estrondo Sônico

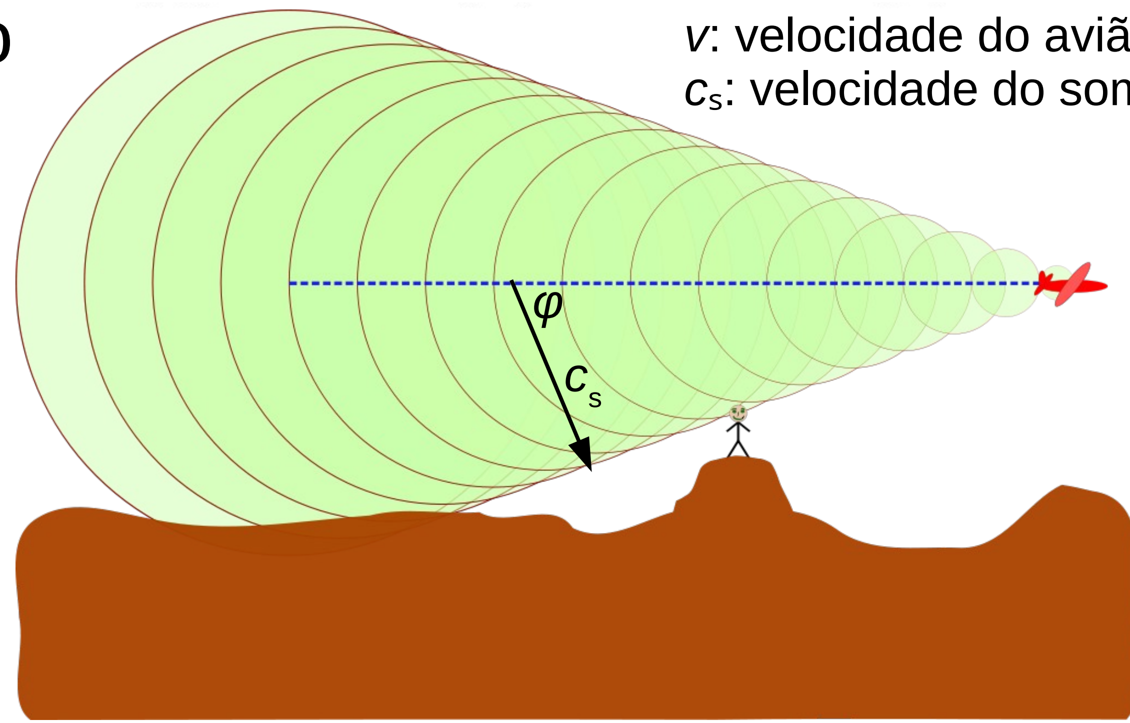
Em vermelho: Frente de som emitido pelo avião: Todas as ondas se somam.
=> É percebido como uma explosão por alguém no chão.

! O estrondo sônico não é a "quebra da barreira de som".

$\cos \varphi = c_s / v$



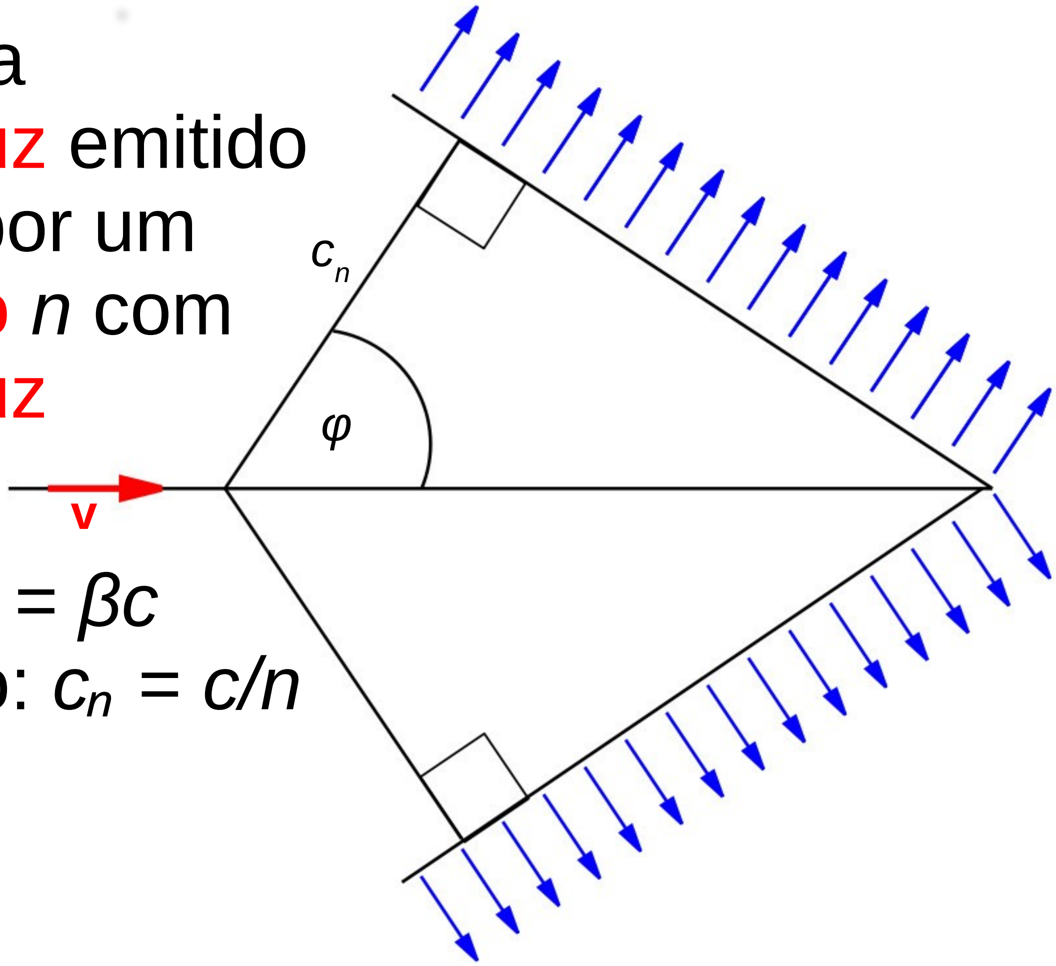
v: velocidade do avião
c_s: velocidade do som



Relatividade Restrita

Radiação Tcherenkov

A radiação Tcherenkov é a mesma coisa, mas com luz emitido por partículas passando por um meio com índice refratório *n* com velocidade acima da da luz no meio.



velocidade da partícula: $v = \beta c$
velocidade da luz no meio: $c_n = c/n$

$\cos\varphi = c_n/v = c/nv = 1/n\beta$
$\Rightarrow v = c/n \cdot \cos\varphi$

Relatividade Restrita

Momento Linear e Energia Relativísticos

Momento linear e Energia também tomam uma forma diferente na Teoria da Relatividade (**v** é a velocidade da partícula, e não alguma velocidade relativa entre referenciais; $\gamma := (1-v^2/c^2)^{-1/2}$):

Momento linear relativístico: $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$

Energia relativística: $E = \gamma mc^2$,
onde $E_0 = mc^2$ é a energia de repouso,
e $K = E - E_0 = (\gamma-1)\cdot mc^2$, a energia cinética

Alguns ainda usam as grandezas massa de repouso, m (que é simplesmente a massa) e massa relativística, γm.

para $v \ll c$: $\mathbf{p} \approx m\mathbf{v}$,
$K = ((1-v^2/c^2)^{-1/2}-1)\cdot mc^2 = (1+½\cdot v^2/c^2+O((v/c)^4)-1)\cdot mc^2 \approx ½\cdot mv^2$

Relatividade Restrita

Momento Linear e Energia Relativísticos

Fórmula útil: $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

$m^2c^4 = E^2 - p^2c^2$ é uma invariante de Lorentz.

! Para $m \neq 0$ e $v \to c$, p e $E \to \infty$,
um dos motivos, por aqueles objetos com massa não podem alcançar a velocidade da luz.

Objetos sem massa (fótons, grávitons, ...) têm que se movimentar com a velocidade da luz. Senão eles teriam p e E zero (e não existiriam).

para estes, a última fórmula se reduz à já conhecida relação de de Broglie: $E = pc$

Relatividade Restrita

Momento linear e Energia Relativísticos

Já que $m^2c^4 = E^2 - p^2c^2$ é uma invariante de Lorentz, isto também vale para conjuntos de partículas:

$I := P^2c^2 - E^2$ é invariante,

onde P é o momento linear total das partículas,
$P = |\mathbf{P}| = |\Sigma_i\, \mathbf{p}_i|$,
e E, a energia total, $E = \Sigma_i\, E_i$.
Estas grandezas também são conservadas em processos físicos (espalhamentos, choques, decaimentos, reações, ...), tal que I é ambos,

- invariante de Lorentz, e
- conservado em reações / no tempo.

Relatividade Restrita

Momento linear e Energia Relativísticos

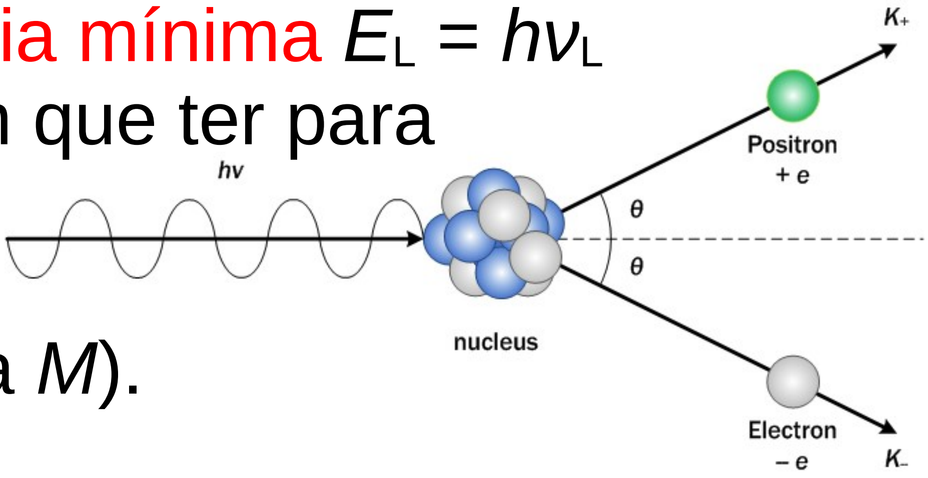
$I := P^2c^2 - E^2$ é
- invariante de Lorentz, e
- conservado em reações / no tempo.

Isto torna I uma ferramenta muito prático para cálculos de processos:
- Escolhe um referencial prático para calcular I antes do processo na física de partículos,
- e um (outro ou o mesmo) referencial prático para calcular I depois do processo,
- Iguala os dois termos para I, e explicite/calcule a grandeza incógnita de interesse.

Relatividade Restrita

Momento linear e Energia Relativísticos

Exemplo: Calculando a energia mínima $E_L = h\nu_L$ (L de limiar) que um fóton tem que ter para conseguir produzir um par e^-- e^+ na vizinhança de um núcleo atômico (de massa M).

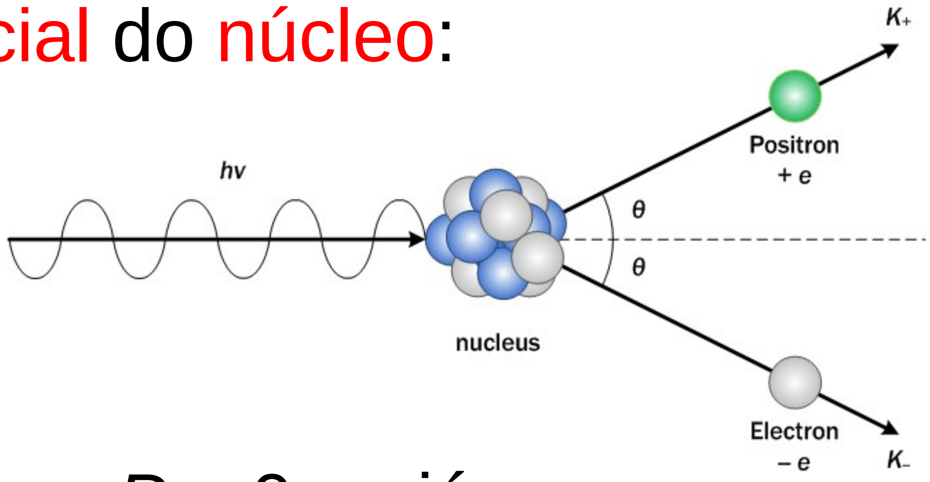


O núcleo é necessário para absorver parte do momento linear do fóton, isto é, para a conservação do momento linear poder ocorrer. Sem o núcleo, no sistema do centro de massa do par e^- - e^+, P seria 0, o que não é possível para o fóton antes do processo.

Relatividade Restrita

Momento linear e Energia Relativísticos

Antes: Escolhemos o referencial do núcleo:



$P = 0 + E_L/c$, $E = Mc^2 + E_L$

$\Rightarrow I = c^2E_L^2/c^2 - (Mc^2 + E_L)^2$

$\quad = -2E_LMc^2 - M^2c^4$

Depois:

Referencial do centro de massa, $P = 0$, e, já que queremos o caso de energia mínima, calculamos o limite de as três partículas terminarem sem energia cinética:

$I = -E^2 = -(M + 2m_e)^2c^4$

Igualando (e dividindo por c^2):

$-2E_LM - M^2c^2 = -M^2c^2 - 4m_eMc^2 - 4m_ec^2$

$\Rightarrow E_L = 2m_ec^2(1+m_e/M)$, $\nu_L = E_L/h = 2m_ec^2/h \cdot (1+m_e/M)$

Relatividade Restrita

Momento linear e Energia Relativísticos

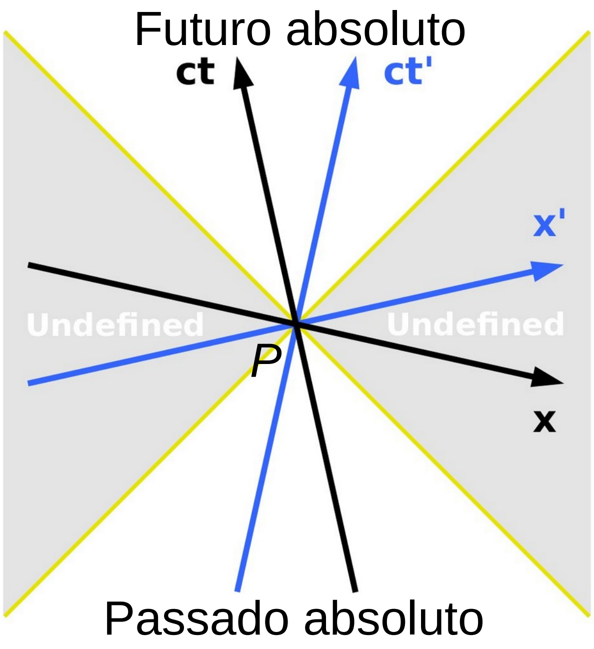
Outro exemplo: Decaimento (i. e. de núcleos atômicos)

Usando assim antes como depois do decaimento o referencial do Centro de Massa, é fácil mostrar que a massa total dos produtos do decaimento deve ser menor que a massa da partícula que decaiu.

Relatividade Restrita

Passado, Futuro e Causalidade

O diagrama Espaço-Tempo centrado no evento *P* pode ser dividida em várias regiões:



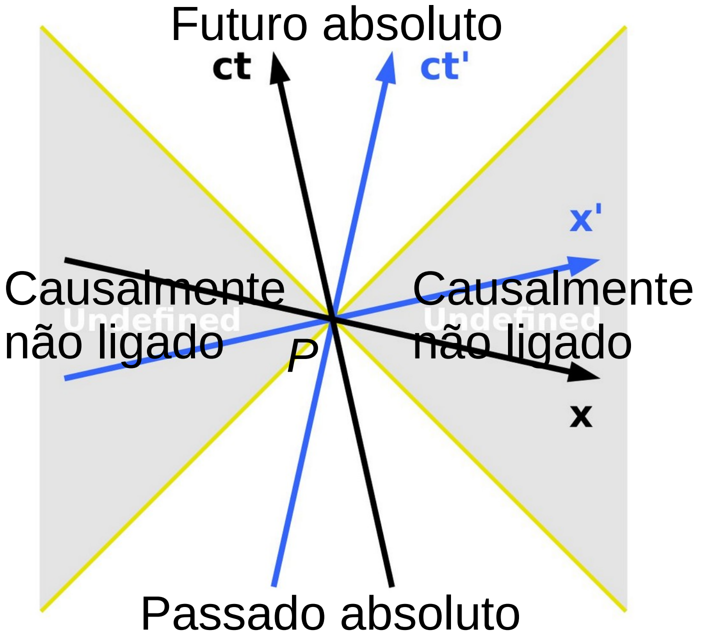
O passado absoluto de *P*:
Eventos nesta parte foram antes de *P*, independente do referencial,
e podem ter causado *P*.

O futuro absoluto de *P*:
Eventos nesta parte serão depois de *P*, independente do referencial,
e podem ser a consequência de *P*.

Relatividade Restrita

Passado, Futuro e Causalidade

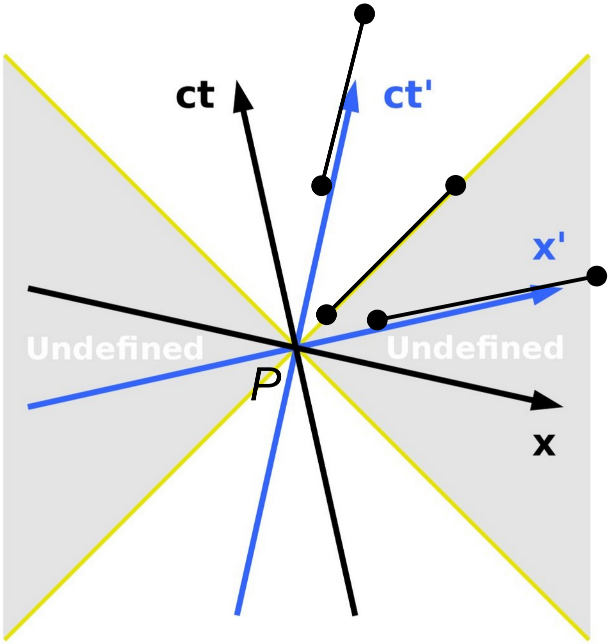
A região causalmente não ligada a *P*:
Eventos nesta parte não tem/tiveram contato com *P*, q. d. informação não teve tempo para chegar destes eventos até *P*, ou vice-versa.
Eventos nesta região podem ser antes, depois ou simultâneos a *P*, dependendo do referencial, mas tão afastados que não há contato causal.



As retas amarelas são os caminhos que tomaria luz passando por *P*.

Relatividade Restrita

Intervalos no Diagrama Espaço-Tempo



É útil definir distâncias no diagrama espaço-tempo, chamadas intervalos, como a seguinte grandeza:

$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$

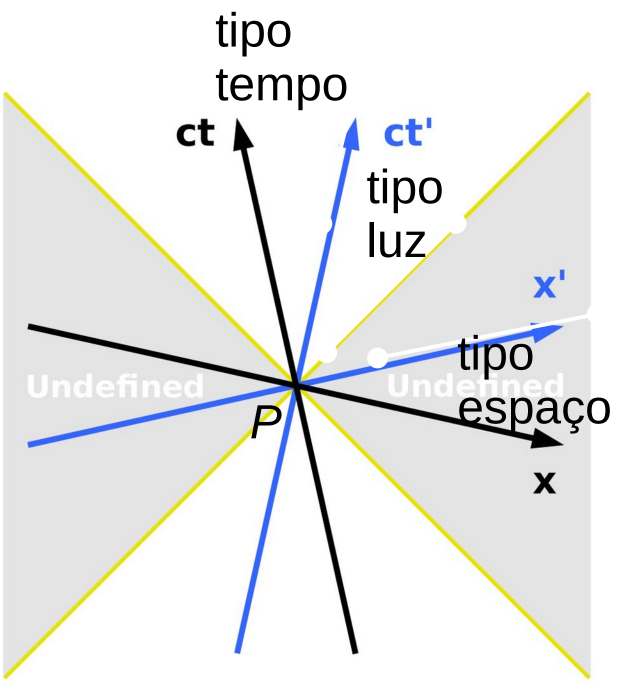
$(\Delta s)^2$ é uma invariante de Lorentz.

! $(\Delta s)^2$ pode ser negativo.

!! Alguns autores definem $(\Delta s)^2$ com sinal oposto:
$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2$

Relatividade Restrita

Intervalos no Diagrama Espaço-Tempo



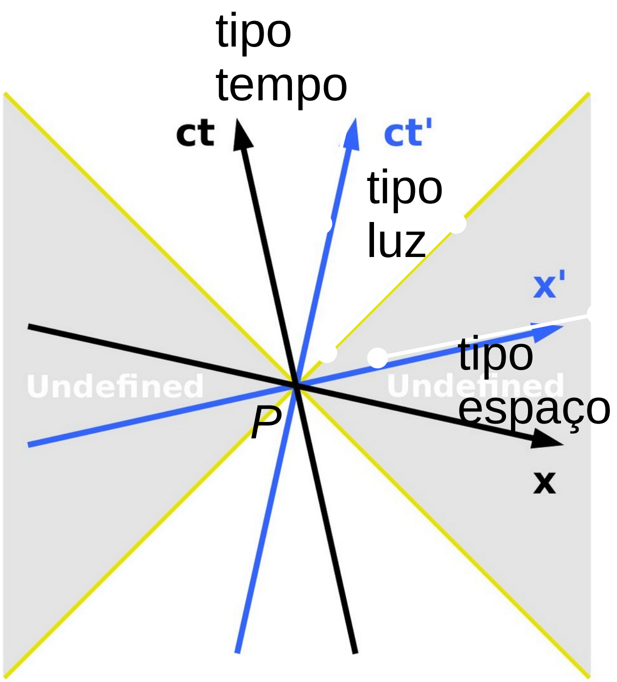
Um intervalo se chama:

- tipo espaço se $(\Delta s)^2 < 0$: pode ser o eixo de uma dimensão espacial de um referencial.
- tipo tempo se $(\Delta s)^2 > 0$: pode ser o eixo do tempo de um referencial.
- tipo luz se $(\Delta s)^2 = 0$: pode ser o caminho de um fóton.

Na definição com o sinal oposto, intervalos tipo espaço têm $(\Delta s)^2 > 0$, e intervalos tipo tempo, $(\Delta s)^2 < 0$.

Relatividade Restrita

Intervalos no Diagrama Espaço-Tempo



Num intervalo tipo espaço, $\sqrt{|(\Delta s)^2|}$
é a distância própria entre os eventos,
a distância entre eles num referencial,
onde eles ocorrem simultaneamente.

Num intervalo tipo tempo, Δs é o
tempo próprio entre os eventos ($\cdot c$),
o tempo entre eles no referencial,
naquele eles acontecem no mesmo lugar.

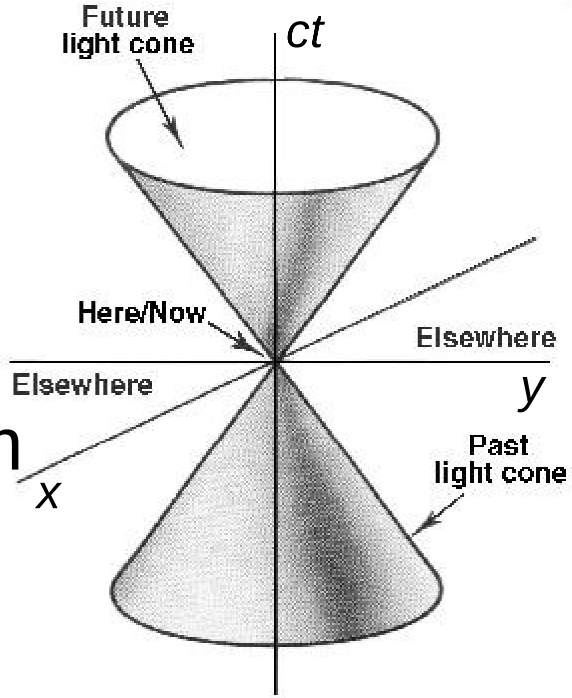
No caso tipo luz, $\Delta s = 0$ significa, que o tempo próprio é zero. => Para fótons (ou qualquer partícula viajando com velocidade da luz) o tempo não passa!

Relatividade Restrita

Cone de Luz

Pode-se fazer diagramas espaço-tempo levando em conta x, y e t (suprimindo só z).

=> Os possíveis caminhos de luz formam a superfície de um cone, o cone de luz.



Passado e futuro absolutos são as regiões dentro do cone,
e a região causalmente não ligada, a região fora.

Relatividade Restrita

A Métrica do Espaço-Tempo da Relatividade Restrita, ou do Espaço de Minkovskij

Já que o intervalo no nosso espaço-tempo é:

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2,$$

A métrica deste espaço é:

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= (c\,dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \\ &= (c\,dt)^2 - (dr)^2 - (r\cdot d\theta)^2 - (r\cdot \mathrm{sen}\,\theta \cdot d\varphi)^2\end{aligned}$$

Em coordenadas esféricas

Unidades Naturais

Na Relatividade e em outras áreas frequentemente se usa um sistema de unidades naturais, naquele a velocidade da luz no vácuo, *c* (no SI, ~$3\cdot10^8$ m/s) é igual a 1.

Neste sistema:

- Velocidades não têm unidades, e valores ≤ 1,

- Tempo se mede em metros: 1 m de tempo é ~$3.3\cdot10^{-9}$ s (o tempo, naquele a luz no vácuo percorre 1 m),

- Acelerações têm unidades de ~~m~~/m$^{\cancel{2}}$ = m^{-1}, e Forças, kg/m,

- Energia e Momento Linear têm as mesmas unidades, kg,

- Os campos elétrico e magnético também têm as mesmas unidades,

- etc.

Unidades Naturais

Para que se faz isso?

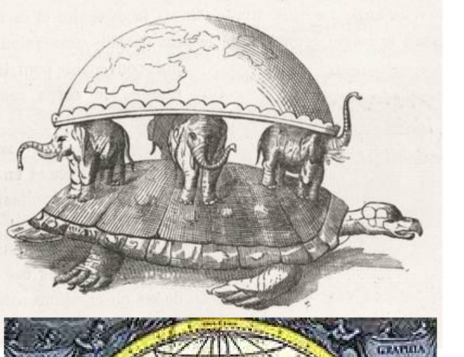
- Em muitos cálculos pode-se omitir fatores c, c^2, c^{-2}, etc., tornando eles bem menos laborosos (por exemplo, alguns desta aula).

- Várias fórmulas se tornam mais elegantes e simétricas: Exemplo: A transformação de Lorentz (só p. x e t) vira: $x' = \gamma\cdot(x - ut)$, $t' = \gamma\cdot(t - ux)$, onde $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2}$.

Existem vários sistemas naturais, naqueles algumas constantes fundamenteis como c, a constante da gravitação G, a constante de Planck h (ou a reduzida $\hbar$), a carga elementar e, a massa do elétron m_e e/ou as do eletromagnetismo ε_0 e μ_0 (ou $4\pi\varepsilon_0$ e $\mu_0/4\pi$) são igualadas a 1.

Universidade Federal do ABC

Introdução à Cosmologia



FIM PRA HOJE