Introdução à Cosmologia

Métrica e Cosmologia Relativística I: Equações de Friedmann

Welder Melo

13 de março de 2026

Universidade Federal do ABC

UFABC

A métrica $g_{\mu\nu}$ é o objeto fundamental da Relatividade Geral. Ela define a geometria do espaço-tempo ao fornecer uma forma de calcular o $**$intervalo espaço-temporal$**$ entre eventos próximos.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1}$$

Esse intervalo determina:

- como distâncias são medidas
- como o tempo é medido
- como a curvatura do espaço-tempo se manifesta

O caso mais simples é o espaço-tempo plano de Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{3}$$

Usamos unidades naturais $c = 1$ e assinatura $(-, +, +, +)$

UFABC

Para cada tipo de espaço, as distâncias são medidas de maneira diferente. Por isso precisamos de uma descrição geométrica geral.

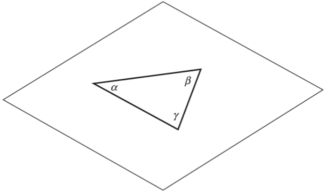

Figura: Espaço euclidiano

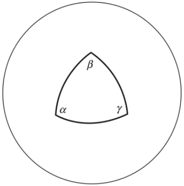

Figura: Curvatura positiva

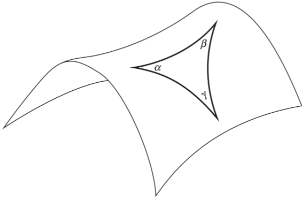

Figura: Curvatura negativa

UFABC

Em coordenadas esféricas, o elemento de linha espacial pode ser escrito como

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{4}$$

onde

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \tag{5}$$

Essa forma aparece naturalmente quando descrevemos espaços com **simetria esférica**.

Podemos descrever uma esfera tridimensional imersa em um espaço 4D:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2 \tag{6}$$

Eliminando w:

$$w^2 = R^2 - r^2 \tag{7}$$

O intervalo torna-se

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2 d\Omega^2 \tag{8}$$

De forma análoga:

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = -R^2 \tag{9}$$

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2/R^2} + r^2 d\Omega^2 \tag{10}$$

Generalizando:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2/R^2} + r^2 d\Omega^2 \tag{11}$$

onde

$$k = \begin{cases} +1 & \text{curvatura positiva} \\ 0 & \text{espaço plano} \\ -1 & \text{curvatura negativa} \end{cases}$$

Métrica e Cones de Luz

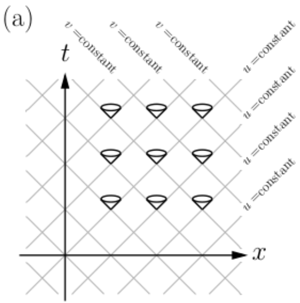

Figura: Minkowski

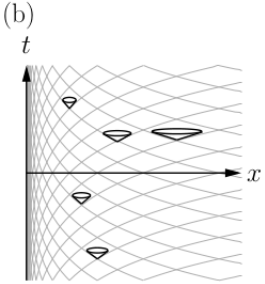

Figura: Rindler

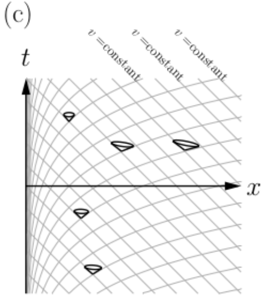

Figura: Eddington-Finkelstein

A métrica determina a * *estrutura dos cones de luz* *, que define as relações causais entre eventos no espaço-tempo.

A métrica de **Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker** descreve um universo:

- homogêneo
- isotrópico

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2/R^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (12)$$

Fator de escala

$$a(t)$$

descreve como as distâncias cosmológicas evoluem no tempo.

- $a(t)$ crescente → universo em expansão
- $a(t)$ decrescente → universo em contração
- $a(t_0) = 1$ hoje
  - $a(t) < 1$ Passado.
  - $a(t) > 1$ Futuro.

A dinâmica do espaço-tempo é determinada por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{13}$$

O tensor de Ricci é definido por

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \tag{14}$$

com

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \tag{15}$$

UFABC

O tensor de energia e momento da equação de Einstein para a métrica de FLRW é escrito como:

- **Tensor energia-momento**
  Decomposição "3+1" para um observador com 4-velocidade u^μ:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P h_{\mu\nu} + h_\mu u_\nu + h_\nu u_\mu + \pi_{\mu\nu} \tag{16}$$

  - ρ: **densidade de energia**
  - P: **pressão**
  - $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$: **projetor do espaço de repouso**
  - h_μ: **fluxo de energia** ($h_\mu u^\mu = 0$)
  - $\pi_{\mu\nu}$: **tensão anisotrópica** (simétrica e sem traço, $\pi_{\mu\nu} u^\nu = 0$)

$$[T_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Pa^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Pa^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Pa^2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Equação de Friedmann para $k = 0$

Vamos calcular para o caso de $k = 0$, para simplificar as contas. Assim, os termos não nulo do símbolo de Christoffel são:

$$\Gamma^{0}_{\alpha\beta} = a\dot{a}\delta_{\alpha\beta} \tag{18}$$

$$\Gamma^{\mu}_{0\beta} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^{\mu}_{\beta} \tag{19}$$

E os tensores de ricci não nulos:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \tag{20}$$

$$R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)\delta_{ij} \tag{21}$$

E o escalar de Ricci:

$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] \tag{22}$$

Pegando todos esses ”ingredientes e substituindo na equação de Einstein para $\alpha\beta = 00$, temos:

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi G\rho + \Lambda} \tag{23}$$

A equação de Friedmann geral, para qualquer k, é escrita como :

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi G\rho + \Lambda - \frac{k}{R^2 a^2}} \tag{24}$$

Definimos o parâmetro de Hubble:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \tag{25}$$

E para $\alpha\beta = ii$, temos que a equação fica:

$$(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - 3\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] a^2 + a^2\Lambda = \kappa P a^2 \tag{26}$$

Então,

$$\boxed{6\frac{\ddot{a}}{a} = -\kappa(\rho + 3P) + 2\Lambda} \tag{27}$$

Onde, $\kappa = 8\pi G$

- Vamos voltar ao tempo cósmico e diferenciar a equação de Friedmann:

$$2H\dot{H} = \frac{\kappa}{3} \Rightarrow 2H\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \tag{28}$$

$$\frac{\kappa}{3} = 2H\left[-\frac{\kappa}{6}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} - (\kappa\rho + \Lambda)\right] \tag{29}$$

$$\Rightarrow \dot{\rho} = H\left[-\rho - 3P - 2\rho\right] \tag{30}$$

A conservação de energia implica

$$\boxed{\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0} \tag{31}$$

Essa equação descreve como a densidade de energia evolui com a expansão do universo.

- **Equação de estado**
  Para descrever o conteúdo material do Universo, começamos definindo o parâmetro de equação de estado w:

$$w = P/\rho \tag{32}$$

Substituindo na equação da continuidade, se w é constante,

$$0 = \dot{\rho} + 3H(1+w)\rho = \dot{\rho} + \rho\frac{d}{dt}\left[\ln[a^{3(1+w)}]\right] \tag{33}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\left[\rho\, a^{3(1+w)}\right] \Rightarrow \rho = \rho_0 a^{-3(1+w)} \tag{34}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}} \tag{35}$$

- matéria: $w = 0$
- radiação: $w = \frac{1}{3}$
- constante cosmológica: $w = -1$