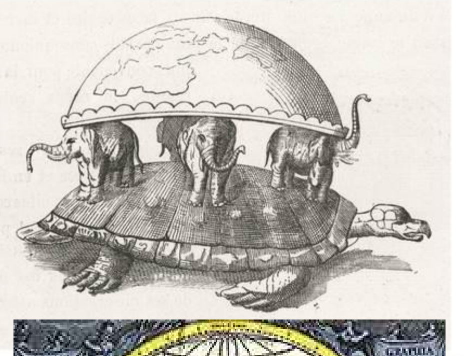
Introdução à Cosmologia

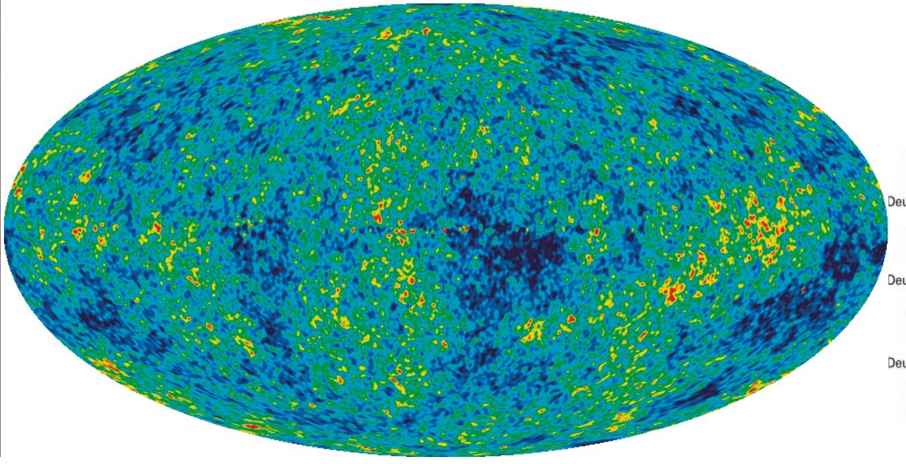
Universidade Federal do ABC

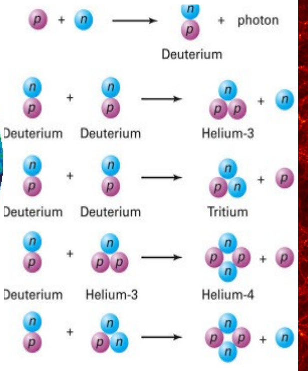
10. Métrica,
Equações de Friedmann

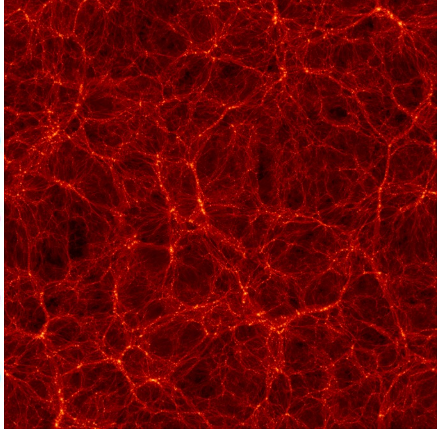
Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/Cosmo.html









Cosmologia Relativística

A Cosmologia Relativística tem muito em comum com a Newtoniana (aula 5), i. e. o princípio cosmológico, a batalha entre a expansão e a atração devido à massa contida no Universo (e mais algo?), mas trata destes assuntos usando a teoria da Relatividade
(aulas Relatividade Restrita e Relatividade Geral).

Por isto, surgirão fenômenos relativísticos, como contração/dilatação de comprimentos, tempo não-absoluto (que depende do referencial), *redshift* (cosmológico) e curvatura do espaço(-tempo).

O Tempo Universal (de novo)

Começando com o tempo: Será que temos que formular uma cosmologia dependente do referencial?

Felizmente, podemos continuar usando o tempo universal, aquele decorrido desde o *Big Bang* no referencial que se movimenta com o *Hubble Flow*, que é aquele, naquele a Radiação Cósmica de Fundo tem a mesma temperatura em todas as direções.

Assim temos, igual como na cosmologia Newtoniana,

t_0 := hoje, em *redshift* 0 ≈ 13.8 Gyr,

e o *lookback time*: $t_L(z) = t_0 - t(z)$

O Tempo Universal

A vantagem desta escolha é, que as propriedades do Universo (fator de escala, densidades dos constituentes em grande escala) são iguais em todas as posições no mesmo t, ou seja são apenas uma função de t (ou z).

Na cosmologia, até na relativística, existe um tipo de "referencial preferido"!

O Tempo Universal

O movimento de um objeto relativo a este referencial é chamado o seu movimento peculiar.

Valores típicos para galáxias são de até 300 km/s.

O *redshift* que se mede para uma galáxia distante é a combinação do *redshift* cosmológico e do *redshift* de Doppler devido ao seu movimento peculiar.

Como visto na primeira aula sobre a Radiação Cósmica de Fundo, dá para determinar o nosso movimento peculiar medindo o momento dipolo da temperatura da radiação de fundo no céu.
O movimento peculiar do Sol é de ~371 km/s na direção da constelação do Leão.

A Geometria do Espaço

E a curvatura do espaço? Como ela poderia ser?

Para um Universo homogêneo e isotrópico, há basicamente três possibilidades:

- Geometria plana ou euclidiana (Euclides, ~300 a. C.),

- Geometria fechada ou elíptica, ou

- Geometria aberta ou hiperbólica.

São os mesmos termos que usamos para o destino (que dependia da densidade comparada à densidade crítica) do Universo na cosmologia Newtoniana.
Veremos em breve, que num Universo só de matéria, geometria e destino são correlacionados e podem ser usados sinônimos (mas se tiver outros componentes no Universo, não necessariamente).

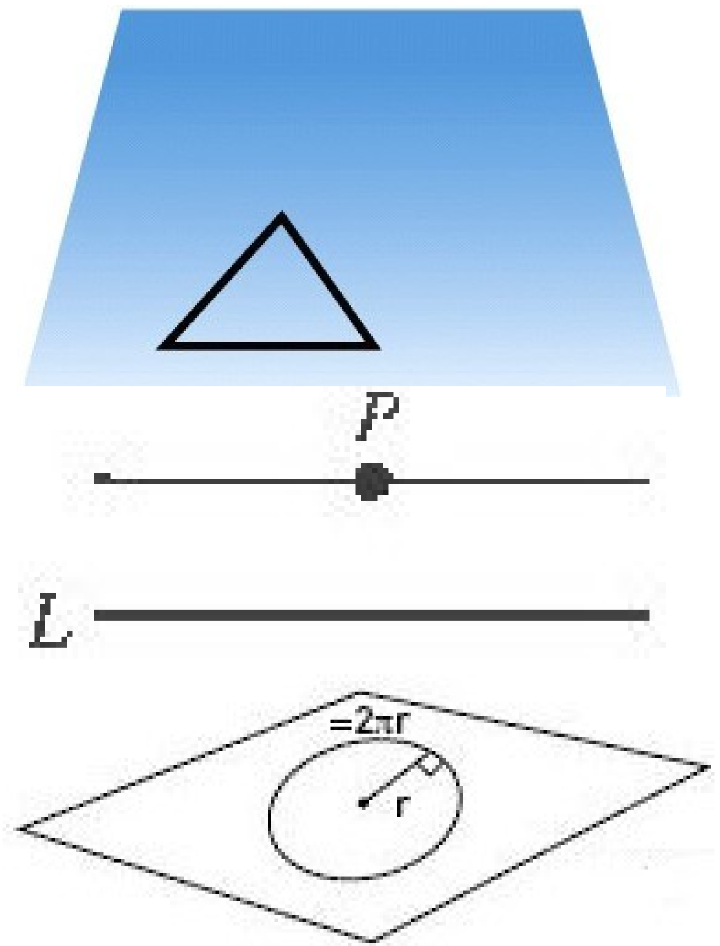
A Geometria do Espaço

Na geometria plana, linhas que são paralelas em uma região continuam paralelas no espaço inteiro.

Por um ponto *P* passa exatamente uma linha paralela a uma linha *L* (linha que não cruza *L*).

A soma dos ângulos num triângulo é 180°.

Geometria euclidiana



A circunferência de um círculo (conjunto de pontos na distância r de um ponto, o centro) é $2\pi r$, e a área contida nele, πr^2.

A Geometria do Espaço

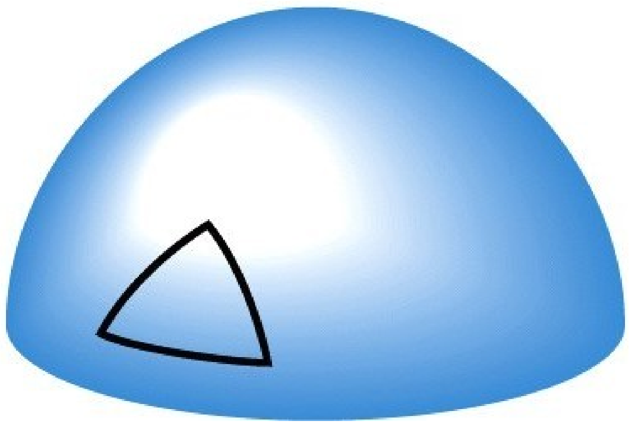
Na geometria fechada, linhas "paralelas em uma região" se aproximam na distância.

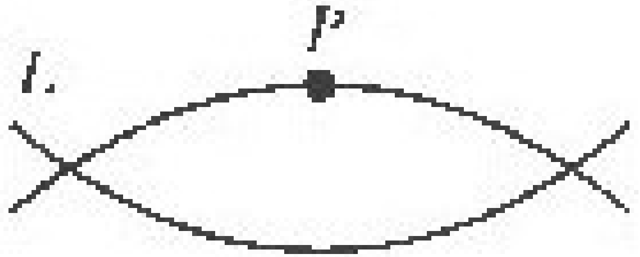
Por um ponto *P* passa nenhuma linha paralela a uma linha *L*.

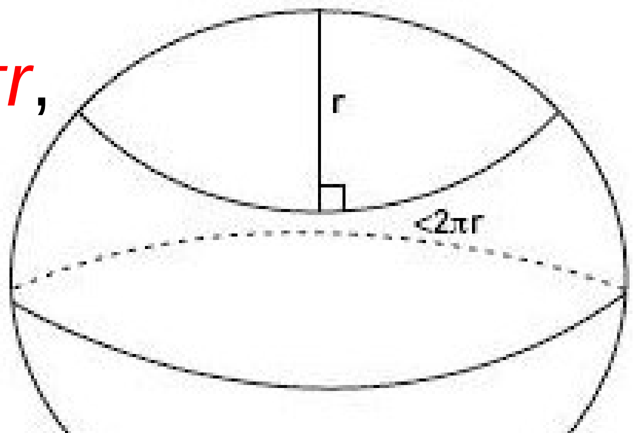
A soma dos ângulos num triângulo é > 180°.

A circunferência de um círculo é $< 2\pi r$, e sua área, $< \pi r^2$.

Geometria elíptica







A Geometria do Espaço

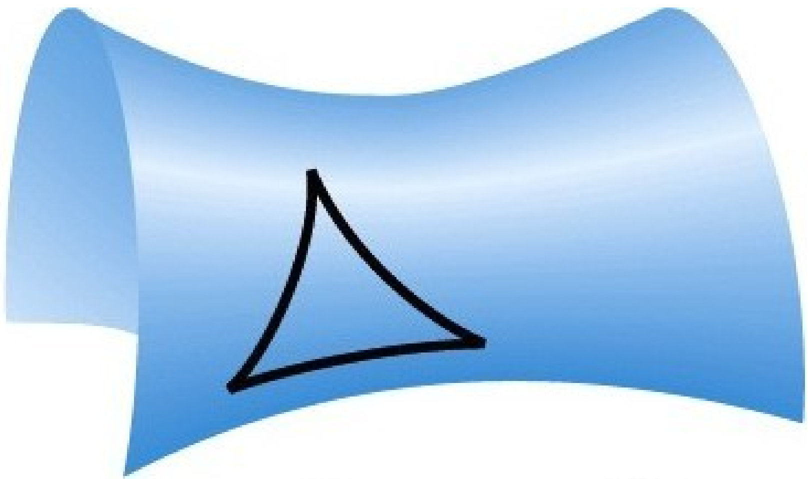
Na geometria aberta, linhas "paralelas em uma região" se afastam na distância.

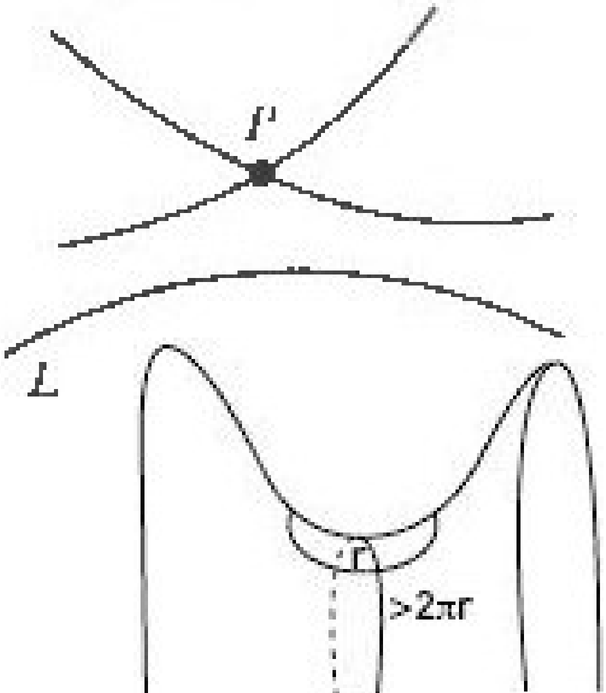
Por um ponto *P* passa mais de uma linha paralela a uma linha *L*.

A soma dos ângulos num triângulo é $< 180°$.

A circunferência de um círculo é $> 2\pi r$, e sua área, $> \pi r^2$.

Geometria hiperbólica





A Geometria do Espaço

O nosso Espaço não é uma superfície (espaço 2D) dentro do espaço 3D, mas possivelmente um espaço 3D dentro de um espaço 4D, onde não temos acesso à quarta dimensão (neste caso a quarta dimensão não é o tempo), mas é análogo ao espaço 2D dentro do espaço 3D.

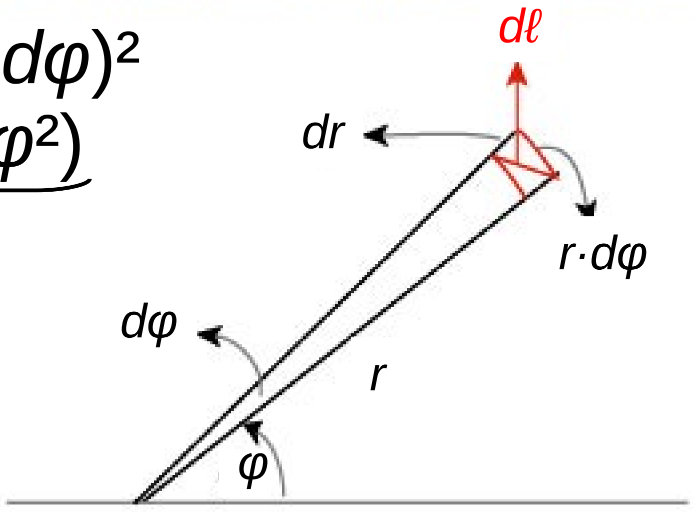
Em princípio podemos determinar a geometria do nosso Espaço observando o comportamento de linhas ou planos paralelos na distância, medindo ângulos em triângulos (grandes) e/ou medindo circunferências ou áreas de círculos (também grandes), ou áreas de superfície ou volumes de esferas (grandes).

A Métrica do Espaço Curvo

Lembrete: A métrica do espaço plano (euclidiano):

Em coordenadas cartesianas:
3D: $(d\ell)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$
2D: $(d\ell)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

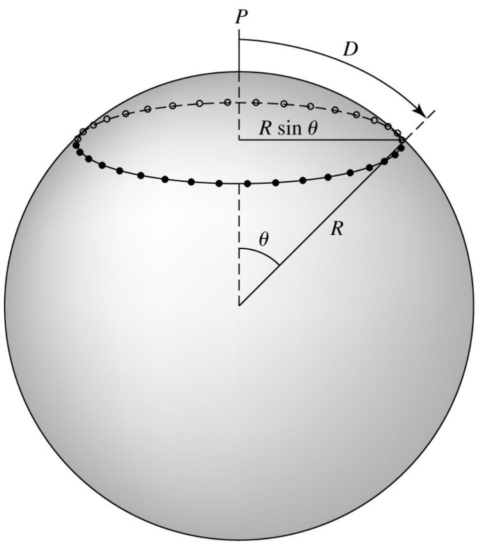
Em coordenadas esféricas/polares:
3D: $(d\ell)^2 = (dr)^2 + (r \cdot d\theta)^2 + (r \cdot \mathrm{sen}\,\theta \cdot d\varphi)^2$
$= (dr)^2 + r^2 \cdot \underbrace{(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\,\theta \cdot d\varphi^2)}_{\text{ou } d\Omega}$
2D: $(d\ell)^2 = (dr)^2 + (r \cdot d\varphi)^2$



ou seja:
$(d\ell)^2 = (dr)^2 + (r \cdot d\text{"angular"})^2$

A Métrica do Espaço Curvo

E se o nosso espaço 2D for, na verdade, uma esfera no espaço 3D com raio R, ou seja, tiver geometria elíptica ou fechada.



Def. curvatura da esfera $K := 1/R^2$

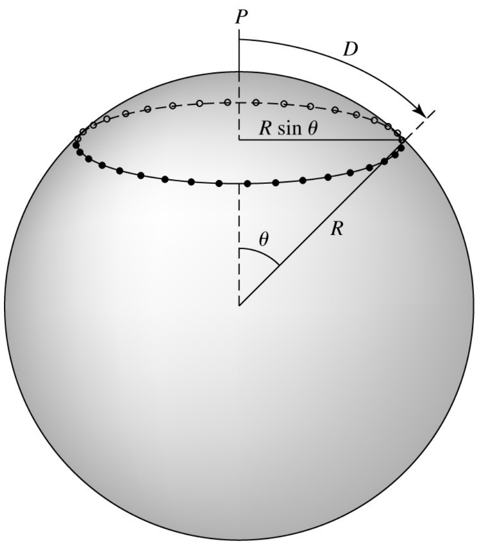
Será que um ser 2D vivendo neste espaço e sem acesso à terceira dimensão consegue descobrir, que o mundo dele é curvo e determinar a curvatura?

Sim! Medindo a circunferência de um círculo com raio D.

Def. círculo: O conjunto de pontos com a mesma distância*, chamada raio, até um dado ponto, chamado centro do círculo.

*Distância entre dois pontos num espaço curvo: $\int ds$ ao longo da geodésica que passa pelos dois pontos, aqui ao longo de um círculo máximo.

A Métrica do Espaço Curvo



Nosso ser espera medir a circunferência:

$C_{esp} = 2\pi D$

Porém, ele mede:

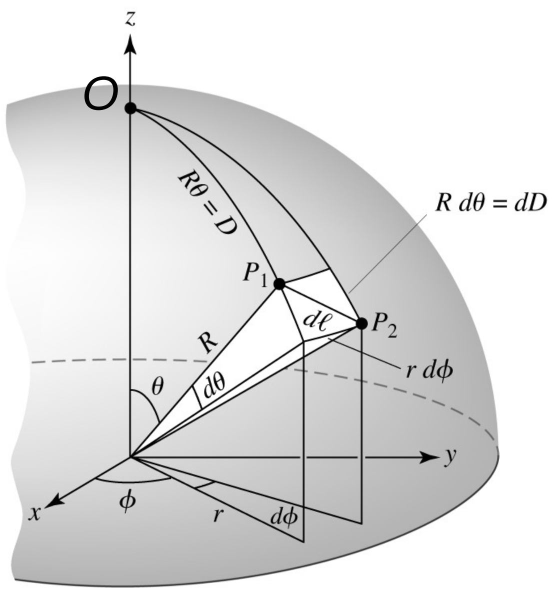
$C_{med} = 2\pi R \text{ sen } \theta = 2\pi R \text{ sen } (D/R)$

Para determinar a curvatura realmente localmente, ele subtrai estes valores um do outro, multiplica por $3/\pi D^3$ e encolhe o círculo até raio zero:

$$3/\pi D^3 \cdot (C_{esp} - C_{med}) = 3\cdot(2\cancel{\pi}D - 2\cancel{\pi}R \text{ sen } (D/R))/\cancel{\pi}D^3 =$$
$$= 6/D^3 \cdot \{D - R\cdot[D/R - {}^1/_{3!} \cdot (D/R)^3 + {}^1/_{5!} \cdot (D/R)^5 - \ldots]\}$$
$$= 1/R^2 - {}^1/_{20} \cdot D^2/R^4 + \ldots$$
$$\Rightarrow \lim_{D \to 0} 3/\pi D^3 \cdot (C_{esp} - C_{med}) = 1/R^2 = K$$

A Métrica do Espaço Curvo

Como esta curvatura afeta a métrica $d\ell$?



(b)

Determinando $d\ell$ no sistema de coordenadas polares (D, φ) centrado em O:

$$(d\ell)^2 = (dD)^2 + (r \cdot d\varphi)^2 = (R \cdot d\theta)^2 + (r \cdot d\varphi)^2$$

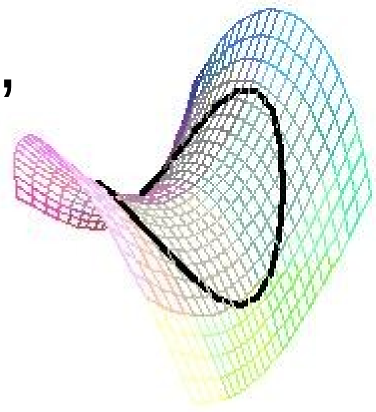
Mas $r = R \operatorname{sen} \theta \;\Rightarrow\; dr = R \cos \theta \, d\theta$

$$\Rightarrow R \cdot d\theta = dr/\cos\theta = R\,dr/\sqrt{R^2 - r^2} = dr/\sqrt{1 - r^2/R^2} = dr/\sqrt{1 - Kr^2}$$

$$\Rightarrow (d\ell)^2 = (dr/\sqrt{1-Kr^2})^2 + (r \cdot d\varphi)^2 = (dr/\sqrt{1-Kr^2})^2 + (r \cdot d\text{"angular"})^2$$

A parte radial da métrica é multiplicada por $1/\sqrt{1-Kr^2}$, onde K é a curvatura do espaço (2D).

A Métrica do Espaço Curvo



Em um mundo 2D com geometria hiperbólica, também chamada aberta, círculos têm circunferências maiores que $2\pi D$, e a curvatura é negativa.

Num mundo plano (euclidiano), a curvatura é nula (o raio de curvatura é infinito), e a métrica tem a forma $(d\ell)^2 = (dr)^2 + (r \cdot d\varphi)^2$, como esperado.

A Métrica do Espaço Curvo

Voltando à métrica do espaço curvo, vemos que, no caso de uma espaço 2D, a métrica é

$$(d\ell)^2 = (dr/\sqrt{1-Kr^2})^2 + (r \cdot d\varphi)^2 = (dr/\sqrt{1-Kr^2})^2 + (r \cdot d\text{"angular"})^2,$$

onde K é a curvatura do espaço:

$K = 0$ para um espaço com geometria plana,

$K > 0$ para geometria elíptica e

$K < 0$ para geometria hiperbólica.

Analógicamente, a métrica de um espaço tridimensional curvo (ou plano para $K = 0$) é

$$(d\ell)^2 = (dr/\sqrt{1-Kr^2})^2 + (r \cdot d\text{"angular"})^2$$

$$= (dr/\sqrt{1-Kr^2})^2 + (r \cdot d\theta)^2 + (r \cdot \text{sen}\,\theta \cdot d\varphi)^2.$$

A Métrica do Espaço-Tempo Curvo

Extendendo para o espaço-tempo, e levando em conta que, num Universo homogêneo e isotrópico (princípio cosmológico), o tempo corre à mesma taxa em todas as posições, isto é, a métrica não contém termos mistos como $dx \cdot dt$, $dy \cdot dt$, $dz \cdot dt$, resp. $dr \cdot dt$, $d\theta \cdot dt$ ou $d\varphi \cdot dt$.

Se o Universo for estático (as suas propriedades, quantificadas por $d\ell$, não dependem do tempo t) obtemos:

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (d\ell)^2$$
$$= (cdt)^2 - (dr/\sqrt{1-Kr^2})^2 - (r \cdot d\theta)^2 - (r \cdot \mathrm{sen}\, \theta \cdot d\varphi)^2.$$

A Métrica do Espaço-Tempo Curvo

Porém, sabemos que o nosso Universo não é estático:

$d\ell = d\ell(t)$ e
$K = K(t)$.

Pelas homogeneidade e isotropia podemos escrever $d\ell(t)$ como:

$$d\ell^2(t) = \left(dr(t)/\sqrt{1-K(t)r(t)^2}\right)^2 + (r(t)\cdot d\theta)^2 + (r(t)\cdot \mathrm{sen}\,\theta \cdot d\varphi)^2$$

A Métrica do Espaço-Tempo Curvo

Definindo ainda (igual como na cosmologia Newtoniana):

$r(t) =: R(t)\varpi$, onde

$\varpi = r(t_0)$ "$= r_0$" é chamado coordenada comovente

(a distância atual até a galáxia de interesse), e

$R(t) = R(z) = 1/(1+z)$, fator de escala

=> $dr(t) = dR(t)\varpi + R(t)d\varpi$

Em $d\ell(t)$, que é a parte espacial de $ds(t)$ (t = const.), $dR(t) = 0$

=> $dr(t) = R(t)d\varpi$

A Métrica do Espaço-Tempo Curvo

O raio da curvatura do espaço aumenta com o fator de escala.
=> A curvatura diminui (em módulo) com o quadrado do fator de escala:

$K(t) = k/R^2(t)$, onde $k = K(t_0)$ é a curvatura hoje (poderíamos ter chamado de K_0):
$k = 0$: Universo plano
$k > 0$: Universo fechado
$k < 0$: Universo aberto

Cosmologia Relativística

Um Universo só de Matéria

$K(t) = k/R^2(t)$ => A curvatura diminui com o tempo.

Parece contraditório, já que na aula Cosmologia Newtoniana tinhamos
"Ω evolui para longe de 1, quer dizer:
o Universo se “curva” com o tempo"

O (módulo do) raio da curvatura aumenta, sim, mas a escala do Universo aumenta junto, e a curvatura no sentido de "parâmetro de densidade da curvatura"
$1 - \Omega = -kc^2 / (dR/dt)^2 = -kc^2 / R^2H^2$
aumenta, isto é, a densidade se afasta cada vez mais da densidade crítica (do estado curvatura zero).

A Métrica do Espaço-Tempo Curvo

Substituindo $d\ell(t)$ (isto é, $r(t)$ e $dr(t)$) e $K(t)$ na métrica:

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (d\ell(t))^2$$

$$= (cdt)^2 - [(dr(t)/\sqrt{1-K(t)r(t)^2})^2 + (r(t)\cdot d\theta)^2 + (r(t)\cdot \mathrm{sen}\,\theta \cdot d\varphi)^2]$$

$$= (cdt)^2 - [(R(t)d\varpi/\sqrt{1-k/R^2(t)\cdot(R(t)\varpi)^2})^2 + (R(t)\varpi\cdot d\theta)^2 + (R(t)\varpi\cdot \mathrm{sen}\,\theta \cdot d\varphi)^2]$$

$$= (cdt)^2 - R^2(t)\cdot\underbrace{[(d\varpi/\sqrt{1-k\varpi^2})^2 + (\varpi\cdot d\theta)^2 + (\varpi\cdot \mathrm{sen}\,\theta \cdot d\varphi)^2]}_{\text{"}d\ell_0^2\text{"}}.$$

Esta métrica, que descreve, então, o intervalo no espaço-tempo entre dois eventos num Universo homogêneo e isotrópico em grande escala, é chamada métrica de Robertson-Walker.

A Métrica de Robertson-Walker

Howard Percy Robertson

Arthur Geoffrey Walker

$(ds)^2 = (cdt)^2 - R^2(t) \cdot [(d\varpi/\sqrt{1-k\varpi^2})^2 + (\varpi \cdot d\theta)^2 + (\varpi \cdot \text{sen}\,\theta \cdot d\varphi)^2]$

A forma tensorial desta métrica em coordenadas (t, ϖ, θ, φ) é

$g_{\mu\nu} = \text{diag}\{c^2, -R^2(t)/(1-k\varpi^2), -R^2(t) \cdot \varpi^2, -R^2(t) \cdot \varpi^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta\}$

A Equação de Friedmann Relativística

Para saber, como a densidade de massa/energia (e mais algo?) em combinação com a taxa de expansão do Universo afetam a evolução dinâmica do Universo, temos que substituir esta métrica na Equação de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} ,$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento, $R_{\mu\nu}$, o tensor de curvatura de Ricci, e R, o escalar de curvatura de Ricci.

Aplicando conceitos de geometria diferencial (=> Cálculo Vetorial e Tensorial) chegamos na Equação de campo de Einstein, ou Equação de Friedmann relativística.

Isto é feito em detalhes na disciplina Relatividade Geral.

A Equação de Friedmann Relativística

Obtemos:

$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho\right] R^2 = -kc^2 \text{ ou } \left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G(\rho_m + \rho_{\text{rel}})\right] R^2 = -kc^2$$

(tem numerosas maneiras de escrevé-la), onde

ρ_m = densidade de matéria (bariônica(comum) + Escura), basicamente o ρ_{mat} (ou ρ) da aula sobre comologia Newtoniana

$\rho_{rel} = u_{rel}/c^2$ = densidade em componentes relativísticas (fótons e neutrinos), o ρ_{rad} da aula cosmologia Newtoniana

$\rho = \rho_m + \rho_{rel}$ = densidade total.

A Equação de Friedmann Relativística

Obtemos:

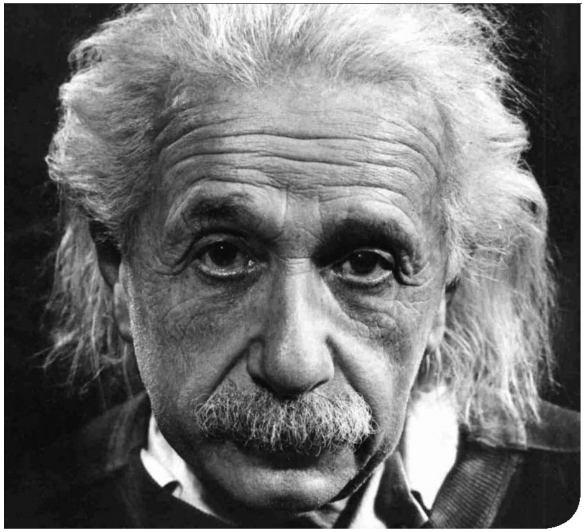
$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho\right]R^2 = -kc^2 \text{ ou } \left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G(\rho_m + \rho_{\text{rel}} \quad)\right]R^2 = -kc^2$$

É exatamente a mesma que a da cosmologia Newtoniana!!!

Só que agora o *k* tem um significado, a curvatura atual do espaço.

Num Universo só de matéria e componentes relativísticas (veremos que isto é uma boa aproximação para as primeiras fases), podemos manter as soluções daquela aula, só precisamos reinterpretar o *k*.

A Constante Cosmológica



Porém:
A dedução da Equação de Friedmann permite introduzir mais um termo, contendo uma constante chamada constante cosmológica Λ, que pode ser asociada a um componente adicional (além de matéria e componentes relativísticas) de densidade constante, que chamaremos, por enquanto, de Energia Escura.

A densidade desta componente seria:

$$\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G = \text{constante!}$$

A Constante Cosmológica

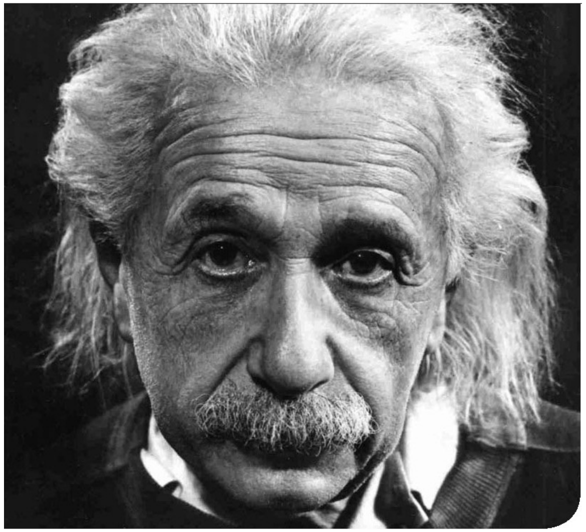
Quais as propriedades desta tal de Energia Escura?

A energia potencial de uma esfera de raio *r* e massa *m*,
$U_\Lambda \equiv -\frac{1}{6}\cdot\Lambda m c^2 r^2$ diminui quando *r* aumenta
(se a densidade dela for positiva)

Isto gera uma força repulsiva que aumenta com *r*:
$\mathbf{F}_\Lambda = -\nabla U_\Lambda = \frac{1}{3}\cdot\Lambda m c^2 \mathbf{r}$ => F_Λ prop. *r*
=> Expansão acelerada

A Constante Cosmológica

Inicialmente, Einstein, acreditando num Universo estacionário, tinha introduzido a constante cosmológico para contrabalancear as componentes atrativas (matéria e partículas relativísticas).



Quando Hubble descobriu a expansão do Universo, a constante não era mais necessária e Einstein a retirou, chamando a o "maior erro da vida" dele.

A Equação de Friedmann Relativística

Agora temos:

$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{1}{3}\Lambda c^2\right]R^2 = -kc^2 \quad \text{ou} \quad \left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G(\rho_m + \rho_{\text{rel}} + \rho_\Lambda)\right]R^2 = -kc^2$$

com

ρ_m = densidade de matéria (bariônica(comum) + Escura),

$\rho_{rel} = u_{rel}/c^2$ = densidade em componentes relativísticas (fótons e neutrinos) e

$\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G$ = densidade da Energia Escura.

Cosmologia Relativística

E se queremos usar o parâmetro de Hubble $H(t)$ em lugar de dR/dt nas fórmulas?

Já sabemos, que este parâmetro varia com o tempo.
A "constante" de Hubble, H_0 é apenas o valor atual.

Como $v(t) = dr(t)/dt = dR(t)/dt \cdot \varpi$,
a Lei de Hubble dependente do tempo é:

$v(t) = H(t)r(t) = H(t)R(t)\varpi$.

$\Rightarrow H(t) = 1/r(t) \cdot v(t) = 1/\varpi R(t) \cdot dR(t)/dt \cdot \varpi$
$\qquad = 1/R(t) \cdot dR(t)/dt$ (igual como no caso newtoniano).

Cosmologia Relativística

Na cosmologia relativística também podemos definir a densidade crítica como $\rho c(t) = 3H^2(t)/8\pi G$, hoje: $\rho_{c,0} = 3H_0^2/8\pi G$,

e o parâmetro de densidade do componente X:
$\Omega_X(t) \equiv \rho_X(t)/\rho_c(t) = 8\pi G\rho_X(t)/3H^2(t)$
hoje: $\Omega_{X,0} = \rho_{X,0}/\rho_{c,0} = 8\pi G\rho_{X,0}/3H_0^2$
(exemplo $\Omega_\Lambda = \rho_\Lambda/\rho c = \Lambda c^2/3H^2$, $\Omega_{\Lambda,0} = \rho_\Lambda/\rho_{c,0} = \Lambda c^2/3H_0^2$)

O parâmetro da densidade total é $\Omega(t) \equiv \Omega_m(t)+\Omega_{rel}(t)+\Omega_\Lambda(t)$
hoje: $\Omega_0 = \Omega_{m,0} + \Omega_{rel,0} + \Omega_{\Lambda,0}$

usando $H(t) = 1/R(t)\cdot dR(t)/dt$, a equação de Friedman se torna $H^2(t)[1-(\Omega_m+\Omega_{rel}+\Omega_\Lambda)]R^2(t) = H^2(t)[1-\Omega]R^2(t) = -kc^2$
hoje: $H_0^2[1-(\Omega_{m,0}+\Omega_{rel,0}+\Omega_{\Lambda,0})] = H_0^2\ [1-\Omega_0] = -kc^2$

Cosmologia Relativística

=> Se a densidade total, $\rho_m + \rho_{rel} + \rho_\Lambda$, é

- menor que a densidade crítica => $k < 0$
  => O Universo é aberto/hiperbólico

- igual à densidade crítica => $k = 0$
  => O Universo é plano/euclidiano

- maior que a densidade crítica => $k > 0$
  => O Universo é fechado/elíptico

geometricamente.

!!! Agora, estes termos não necessariamente determinam o destino do Universo.

Cosmologia Relativística

A Equação de Einstein também deve ser usada para achar a versão relativística da Equação de Fluido (ou 1ª lei da termodinâmica):

$$d(R^3\rho)/dt = -P/c^2 \cdot d(R^3)/dt$$

que também é a mesma que no caso Newtoniano, só que agora

$\rho = \rho_m + \rho_{rel} + \rho_\Lambda$ e

$P = P_m + P_{rel} + P_\Lambda$,
onde (Equação de Estado):
$P_m = 0 \Leftrightarrow w_m = 0$ (=> aula Cosmologia Newtoniana),
$P_{rel} = \rho_{rel}c^2/3 = u_{rel}/3 \Leftrightarrow w_{rel} = 1/3$ (idem) e
$P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2 \Leftrightarrow w_\Lambda = -1$ (! negativa para densidade positiva)

Cosmologia Relativística

Para um Universo que consiste de (ou é dominado por) apenas um componente, a Equação de Fluido leva a (=> aula cosmologia Newtoniana):

$R^{3(1+w)}\rho$ = const. = ρ_0,

e, para um Universo de qualquer composição,

para a densidade da matéria ($w_m = 0$): $\rho_m = \rho_{m,0}/R^3$

das compontes relativísticas ($w_{rel} = ⅓$): $\rho_{rel} = \rho_{rel,0}/R^4$

e da Energia Escura ($w_\Lambda = -1$): ρ_Λ = const. = $\rho_{\Lambda,0}$

Cosmologia Relativística

Também igual como na cosmologia Newtoniana, podemos derivar a partir das equações de Friedmann e de fluido, a Equação de Aceleração da cosmologia relativística, $d^2R/dt^2 = -4\pi G/3 \cdot (\rho + 3P/c^2) \cdot R$, ou

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \left\{ -\frac{4}{3}\pi G \left[\rho_m + \rho_{\mathrm{rel}} + \rho_\Lambda + \frac{3(P_m + P_{\mathrm{rel}} + P_\Lambda)}{c^2} \right] \right\} R$$

que descreve a aceleração da expansão do Universo.

! Como já visto na parte Newtoniana, pressão positiva (P_{rel}) freia a expansão e pressão negativa (P_Λ) a acelera. (P_m é nula, e aparece aqui só para completeza).

Cosmologia Relativística

Juntando as constituentes do Universo

A Equação de Aceleração

$d^2R/dt^2 = -4\pi G/3 \cdot (\rho + 3P/c^2) \cdot R$

exprimida em termos dos parâmetros de densidade

$d^2R/dt^2 = -(dR/dt)^2 / R \cdot \Sigma_i\, 0.5\cdot(1 + 3w_i)\Omega_i$

agora também tem um termo a mais (i = m, rel, Λ), assim como o parâmetro de desaceleração:

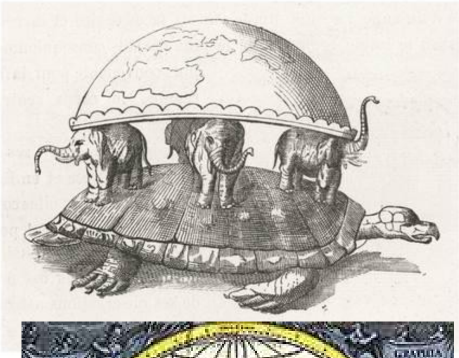
$$q(t) \equiv -\,R(t)\cdot[d^2R(t)/dt^2]/[d\,R(t)/dt]^2$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \Sigma_i\, (1 + 3w_i)\Omega_i(t) \;=\; 0.5\cdot\Omega_\mathrm{m}(t) + \Omega_\mathrm{rel}(t) - \Omega_\Lambda(t)$$

confirmando que matéria e componentes relativísticos freiam a expansão e Energia Escura a acelera (se ela tiver densidade positiva).

Universidade Federal do ABC

Introdução à Cosmologia



FIM PRA HOJE