



Universidade Federal do ABC

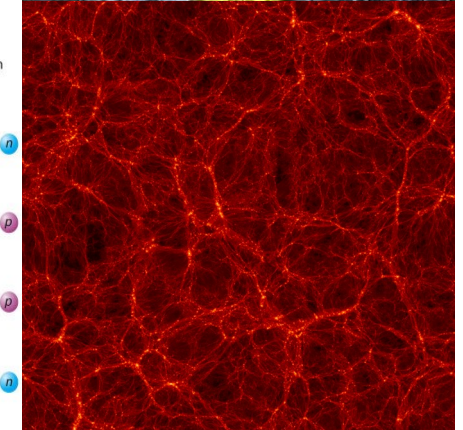
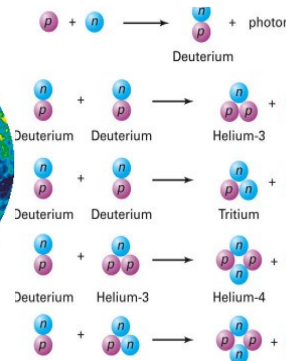
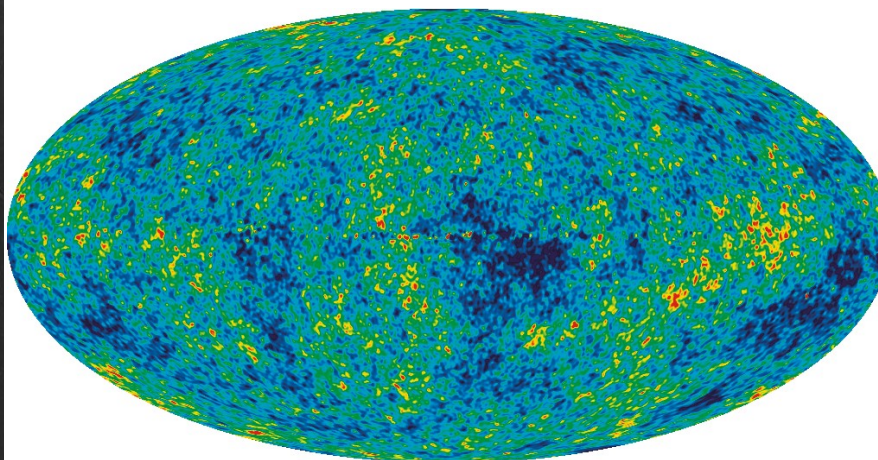
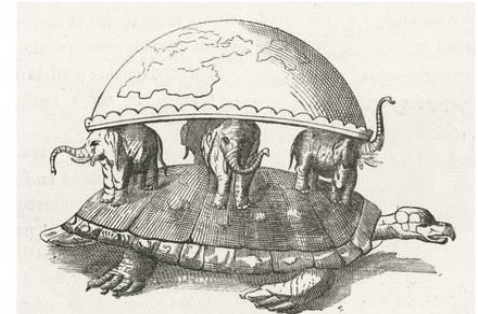
Introdução à Cosmologia

11. Cosmologia Relativística: O Modelo Λ CDM

Prof. Pieter Westera

pieter.westera@ufabc.edu.br

<http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/Cosmo.html>



A Equação de Friedmann Relativística

Aula anterior:

$$\left[\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{8}{3} \pi G \rho - \frac{1}{3} \Lambda c^2 \right] R^2 = -kc^2 \quad \text{ou} \quad \left[\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{8}{3} \pi G (\rho_m + \rho_{\text{rel}} + \rho_\Lambda) \right] R^2 = -kc^2$$

com

ρ_m = **densidade de matéria** (bariônica(comum) + Escura),

$\rho_{\text{rel}} = u_{\text{rel}}/c^2 =$ **densidade em componentes relativísticas** e

$\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G =$ **densidade da Energia Escura.**

Cosmologia Relativística

Como **cada componente** influencia a **evolução** do **Universo**?

Sem Energia Escura (apenas matéria e componentes relativísticas), a **Equação de Friedmann** é a **mesma** que no caso **newtoniano**, ergo os resultados também devem ser iguais (=> aula Cosmologia Newtoniana), mas vamos lembrá-los mesmo assim para o caso de um Universo com Matéria ou componentes Relativísticas de **densidade crítica**, $\rho_c(t) = 3H^2(t)/8\pi G$.

Cosmologia Relativística

Um Universo só de Matéria

Para **matéria**, a **densidade** $\rho(z)$ é **inversamente proporcional** ao **volume comovente**, ou seja, a **densidade comovente** é **constante**:

$\rho_m(z) = (1+z)^3 \rho_{m,0} = R^{-3}(t) \rho_{m,0}$, onde $\rho_{m,0}$ = densidade atual

e $\Omega_m(t)/\Omega_{m,0} = \rho_m(t)/\rho_{m,0}(t) \cdot H_0^2/H^2(t) = (1+z)^3 H_0^2/H^2(t)$

A **equação** de **Friedmann** é: $\left[\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{8}{3} \pi G \rho_m \right] R^2 = -kc^2$

ou $\left(H^2 - \frac{8}{3} \pi G \rho_m \right) R^2 = -kc^2$

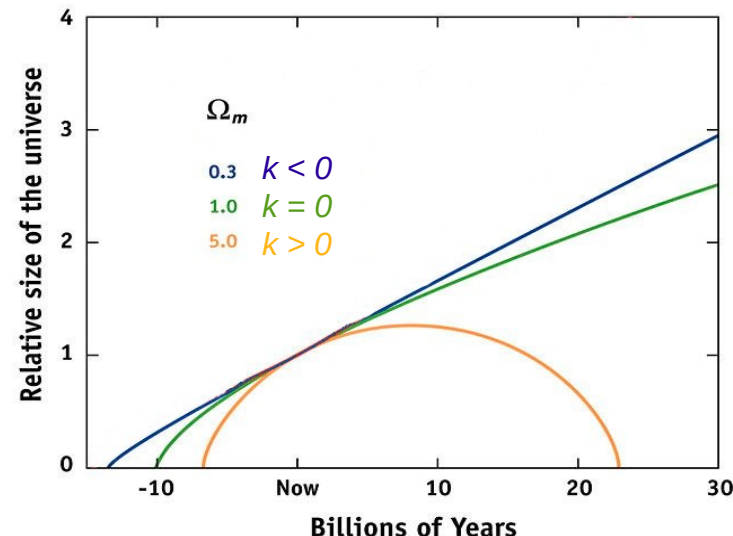
isto é zero (Universo plano), para $k = 0 \Leftrightarrow \rho_m(t) = \rho_c(t)$.

Cosmologia Relativística

Um Universo só de Matéria

=> Para **Universos** só de **matéria**, a **geometria** (que depende da densidade de massa) determina o **destino**, isto é:

- **fechado** na **geometria** ($k > 0$, $\rho_m(t) > \rho_c(t)$) significa fechado no **tempo** (**recolapsa**),
- **aberto** na geometria ($k < 0$, $\rho_m(t) < \rho_c(t)$) significa aberto no tempo (**expande por sempre**) e
- **plano** na geometria ($k = 0$, $\rho_m(t) = \rho_c(t)$) significa plano no tempo (**caso limite** entre os dois, naquele a taxa de expansão alcança 0 no infinito).



Cosmologia Relativística

Um Universo só de Matéria

Para um **Universo plano** só de matéria, $k = 0$ e $\rho_0 = \rho_{m,0} = \rho_{c,0}$, obtivemos:

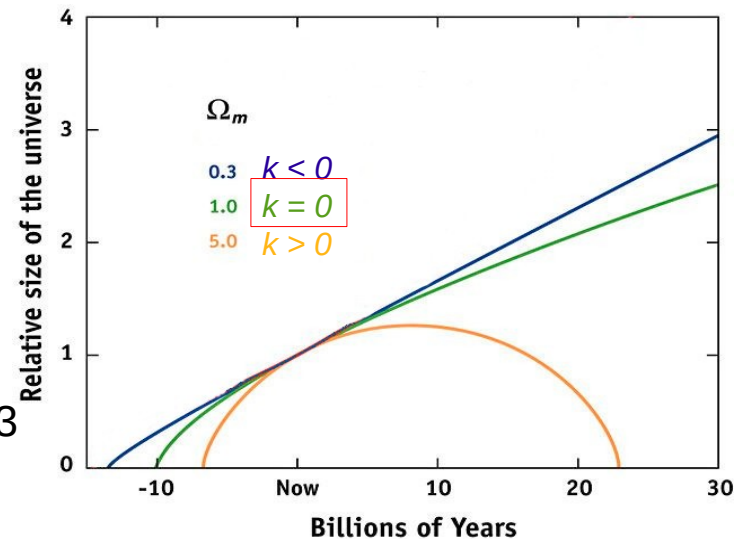
$$R_{\text{plano}} = (6\pi G\rho_{c,0})^{1/3}t^{2/3} = (3/2)^{2/3}H_0^{2/3}t^{2/3} \\ = (3/2)^{2/3}(t/t_H)^{2/3} = (t/t_{\text{plano},0})^{2/3},$$

onde $t_H \equiv 1/H_0 =$ tempo de Hubble,

$$t_{\text{plano},0} = 2/3 \cdot t_H \text{ (a idade atual do Universo)}$$

$$\Rightarrow \rho(t) \propto t^{-2}$$

$\rho(t) \propto t^{-2}$, $dR(t)/dt \propto t^{-1/3}$ e $H(t) \propto t^{-1}$ tendem a zero p. $t \rightarrow \infty$



Cosmologia Relativística

Um Universo só de Matéria

$$\Omega = 1 + (\Omega_0 - 1)/(1 + \Omega_0 z)$$

$\Rightarrow \Omega - 1 = kc^2/(dR/dt)^2$ **não muda** de **sinal**, ou seja:

uma vez aberto, sempre aberto, ou
uma vez fechado, sempre fechado, ou
uma vez plano, sempre plano.

\Rightarrow Para $z \rightarrow \infty$, $\Omega \rightarrow 1$

$\Rightarrow \Omega$ **evolui** para **longe** de **1**, quer dizer:

o Universo aumenta sua "natureza" com o tempo, ou seja:

- Se o Universo era um pouco aberto no passado, ele está mais aberto hoje, ou

- se era um pouco fechado no passado, se "fechou mais", resp. para ser **plano hoje**, deve ter sido **muito plano** no **passado**.

Cosmologia Relativística

Um Universo só de Matéria

" Ω evolui para longe de 1, quer dizer: o Universo se "curva" com o tempo"

Parece contraditório, já que na aula anterior tínhamos $K(t) = k/R^2(t) \Rightarrow$ A curvatura diminui com o tempo.

O raio da curvatura aumenta, sim, mas a escala do Universo aumenta junto, e a curvatura no sentido de "parâmetro de densidade da curvatura"

$$1 - \Omega = -kc^2 / (dR/dt)^2 = -kc^2 / R^2H^2$$

aumenta, isto é, a densidade se afasta cada vez mais da densidade crítica (do estado curvatura zero).

Cosmologia Relativística

Como se comportam as **partículas relativísticas**?

A **densidade** cai com a **quarta potência** de $(1+z)$, **três** pelo **volume comovente**, e **um** por causa do **aumento** do **comprimento de onda**, já que " m " = $E/c^2 = h/c\lambda$:

$$\rho_{\text{rel}} = R^{-4} \rho_{\text{rel},0} = (1+z)^4 \rho_{\text{rel},0}$$

A **temperatura** vai como $R^{-1} = 1+z$: $T = R^{-1} T_0 = (1+z) T_0$

e o **fator de escala** evolui: $R_{\text{rel,plano}}(t) \propto t^{1/2}$

$\Rightarrow \rho_{\text{rel}}(t) \propto t^{-2}$, $T(t) \propto t^{-1/2}$, $dR(t)/dt \propto t^{-1/2}$ e $H(t) \propto t^{-1}$
tendem a zero para $t \rightarrow \infty$

$$\Omega = 1 + (\Omega_0 - 1)/(1 + 2\Omega_0 z + \Omega_0 z^2)$$

\Rightarrow Um Universo destes também "se curva com o tempo"

Cosmologia Relativística

E a tal de **Energia Escura**?

Já sabemos que $\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G = \text{constante}$
 \Rightarrow a **densidade comovente** cresce como o **volume**,
proporcional a R^3 .

Equação de Friedmann para um Universo com apenas
Energia Escura e $k = 0$:

$$[(1/R \cdot dR/dt)^2 - 1/3 \cdot \Lambda c^2] \cdot R^2 = 0$$

$$\Rightarrow dR/dt = \sqrt{\Lambda c^2/3} \cdot R$$

$$=(\text{IEDO}) \Rightarrow R(t) \simeq \left(\frac{\Omega_{m,0}}{4 \Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} e^{H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}$$

Um **Universo de Energia Escura expande exponencialmente!**

Neste caso, **não** vale "O Universo se curva cada vez mais com o tempo".

Cosmologia Relativística

Juntando as constituintes do Universo

Expressando as **densidades** das **componentes** em função de $\Omega_{x,0}$ e R , e substituindo $-kc^2$ por $H_0^2(1-\Omega_0)$, a **equação de Friedmann** se torna uma **equação diferencial** para a **evolução do fator de escala** com o tempo:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m,0}}{R} + \frac{\Omega_{rel,0}}{R^2} + \Omega_{\Lambda,0}R^2 + 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{rel,0} - \Omega_{\Lambda,0} \right)$$

Transformada, ela dá o **parâmetro de Hubble** em função do **redshift**:

$$H = H_0(1+z) \left[\Omega_{m,0}(1+z) + \Omega_{rel,0}(1+z)^2 + \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{(1+z)^2} + 1 - \Omega_0 \right]^{1/2}$$

Cosmologia Relativística

A expansão do Universo vai continuar por sempre?

Isto depende do balanço entre vários fatores:

- A **taxa** da **expansão**, H_0 .

- A **densidade** da **matéria**:

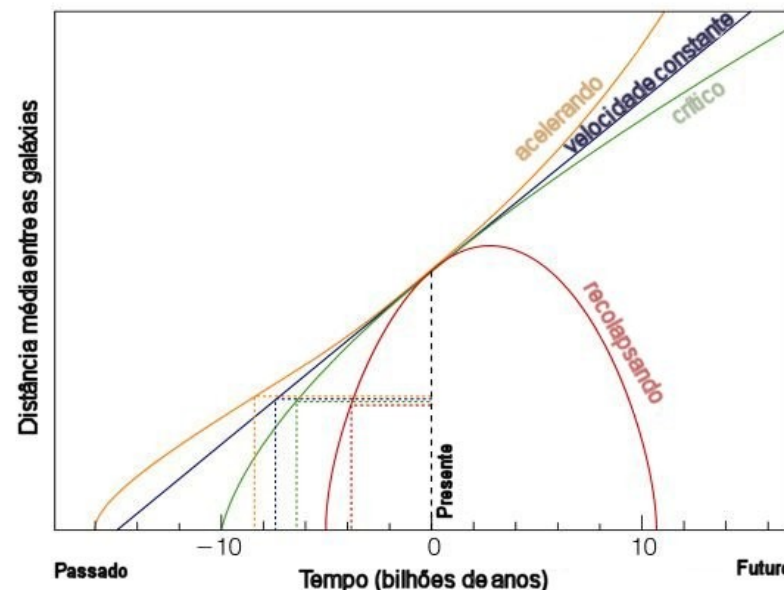
A atração gravitacional da matéria **freia** a expansão.

A partir de uma certa densidade, que num Universo de matéria é a **densidade crítica**, a gravitação consegue parar e reverter a expansão, resultando no **recolapso** do Universo: *Big Crunch* (Douglas Adams: *Gnab Gib*).

- A densidade da **Energia Escura**, relacionada à constante cosmológica Λ , que tende a **acelerar** a expansão.

Até recentemente, os cientistas acreditavam que Λ era 0.

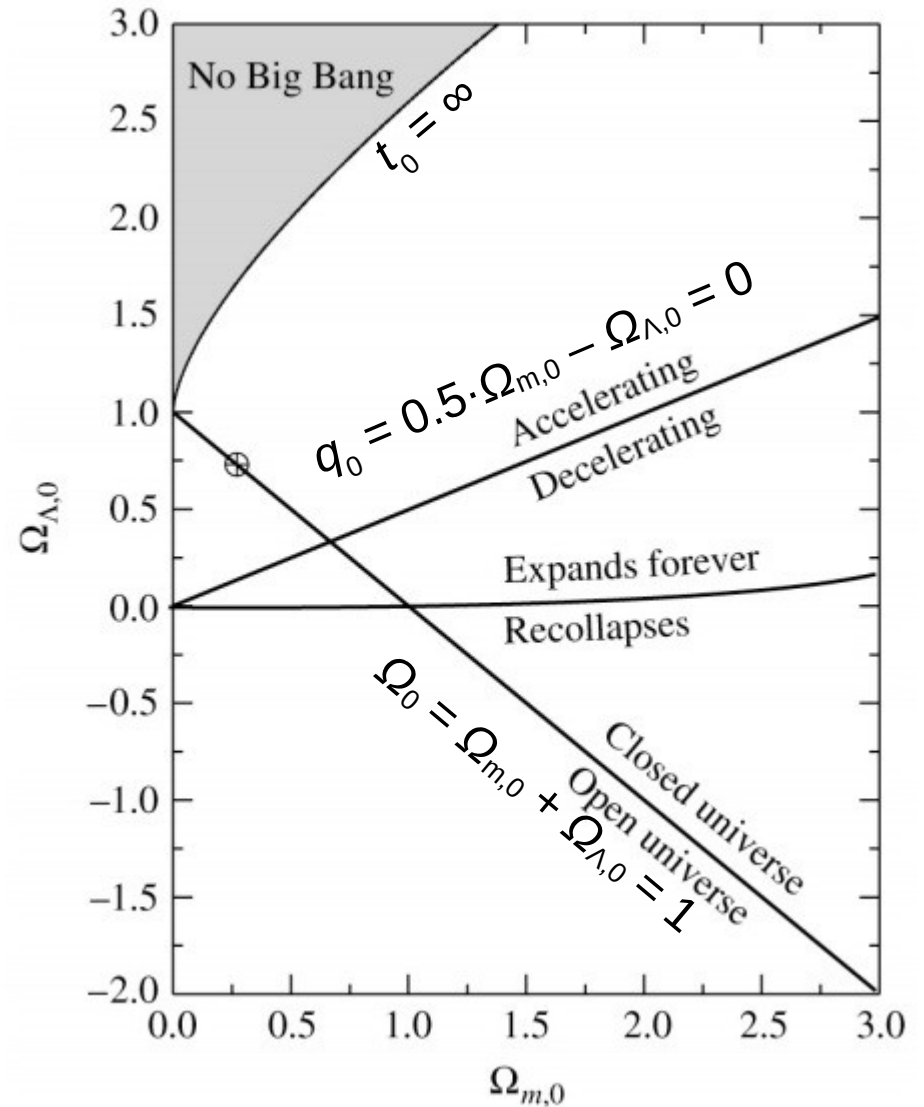
(- O componente relativístico se torna desprezível logo depois do *Big Bang*.)



Cosmologia Relativística

A expansão do Universo vai continuar por sempre?

Ignorando o componente relativístico, que é desprezível depois de uma primeira fase do Universo, podemos fazer um **diagrama dos possíveis destinos do Universo** em função das **densidades de matéria e Energia Escura**.



Cosmologia Relativística

Esta expansão vai continuar por sempre?

Medidas recentes (=> aulas Evidências) indicam que:

- A **matéria** no Universo **não** chega nem perto da **densidade** necessária para parar e reverter a expansão.

A matéria "comum" (átomos), também chamada de **bariônica**, equivale a apenas **5%** da **densidade crítica**.

Além dela, parece existir uma matéria invisível, de outra natureza (p. e. partículas elementares ainda não detectadas), em quantidade **5 a 6 vezes maior** do que a bariônica, chamada **Matéria Escura** não-bariônica (=> aula Matéria Escura). Juntas, as matérias bariônica e Escura não-bariônica equivalem a apenas da ordem de **31%** da **densidade crítica**.

=> **O Universo continuará expandindo**

Cosmologia Relativística

Esta expansão vai continuar por sempre?

- Pior ainda: A **Energia Escura** não é nada zero.

Ela é da ordem de **69%** da **densidade crítica**.

=> O Universo não só continuará expandindo, a **expansão** está **acelerando!**

Juntas, as matérias bariônica e Escura não-bariônica e a Energia Escura equivalem à densidade crítica.

=> **95% do Universo são de natureza desconhecida !!!**

quer dizer: Matéria Escura e Energia Escura

O **modelo cosmológico** que contém todos estes ingredientes se chama **Λ CDM** (do inglês " *Λ Cold Dark Matter*", o "*Cold*" (frio) explicarei na aula sobre Matéria Escura), ou **modelo padrão**.

Composição do Universo



Cosmologia Relativística

Valores numéricos do **modelo** de **melhor ajuste** aos dados da **radiação cósmica de fundo** (\Rightarrow aula RCF II) do satélite Planck, combinados com reconstruções do **efeito lente** e outros dados:

Constante de Hubble: $H_0 = 67.7$ km/sMpc

Temperatura atual da radiação de fundo: $T_0 = 2.725$ K

Idade do Universo: $t_0 = 13.8$ bi. anos

Densidade crítica hoje: $\rho_{c,0} = 8.63 \cdot 10^{-27}$ kg m $^{-3}$

$\Omega_{m,0} = 0.31 \Rightarrow \rho_{m,0} = 0.31 \rho_{c,0} = 2.66 \cdot 10^{-27}$ kg m $^{-3}$

$\Omega_{b,0} = 0.05 \Rightarrow \rho_{b,0} = 4.2 \cdot 10^{-28}$ kg m $^{-3}$ (matéria bariônica)

$\Omega_{rel,0} = 9.1 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \rho_{rel,0} = 7.85 \cdot 10^{-31}$ kg m $^{-3}$

$\Omega_{\Lambda,0} = 0.69 \Rightarrow \rho_{\Lambda,0} = 5.96 \cdot 10^{-27}$ kg m $^{-3}$

$\Omega_0 = 1.0023 \pm 0.0055$ (compatível com $\Omega_0 = 1$, Universo plano)

parâmetro de desaceleração hoje: $q_0 = -0.54$

Cosmologia Relativística

Juntando as constituintes do Universo

Uma olhada mais detalhada na **equação da evolução**:

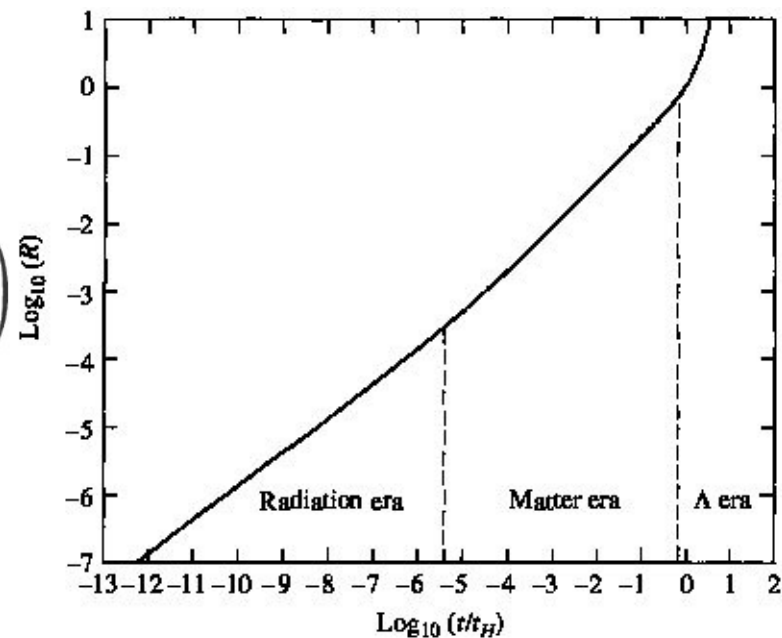
$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m,0}}{R} + \frac{\Omega_{rel,0}}{R^2} + \Omega_{\Lambda,0} R^2 + 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{rel,0} - \Omega_{\Lambda,0} \right)$$

- Para **R pequeno** (z alto, Universo jovem), o termo das **partículas relativísticas** domina.

- Para **R grande**, o termo da **Energia Escura** domina.

- Para valores de **R intermediários**, a **matéria** domina.

=> O **Universo** teve/tem **3 épocas dinâmicas**.



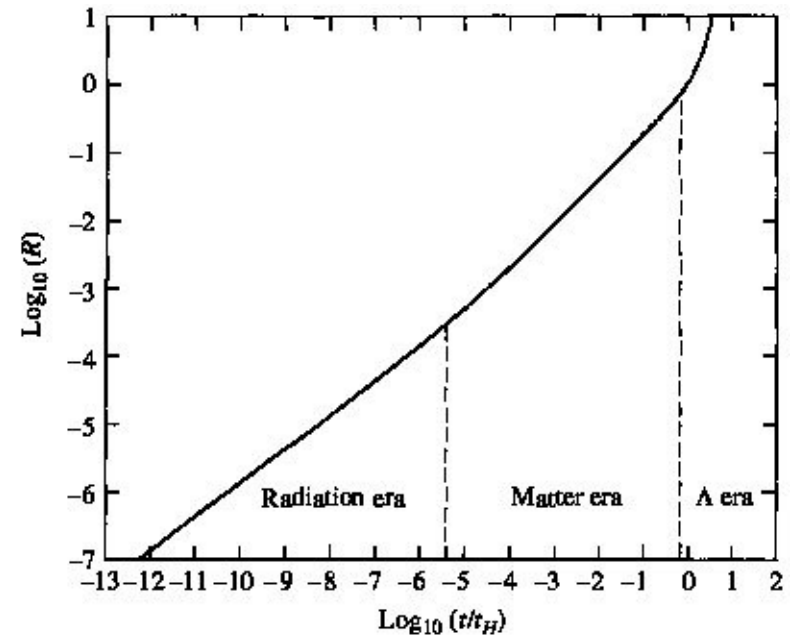
Cosmologia Relativística

Juntando as constituintes do Universo

Estes valores levam ao seguinte cenário, chamado **modelo Λ CDM**, ou **modelo padrão**:

Até $z_{\text{rel,m}} \sim 3400$ (\Rightarrow lista), quando o Universo tinha $\sim 50\,000$ anos e ~ 9000 K, **radiação** (fótons) dominava o Universo.

\Rightarrow Era da Radiação: $R(t) \propto t^{1/2}$,
 $\rho_{\text{rel}}(t) \propto t^{-2}$,
 $\rho_{\text{m}}(t) \propto t^{-3/2}$,
 $T(t) \propto t^{-1/2}$



Cosmologia Relativística

Juntando as constituintes do Universo

Na fase seguinte, **matéria** (bariônica e escura) dominava o Universo.

=> **Era da Matéria:** $R(t) \propto t^{2/3}$,
 $\rho_m(t) \propto t^{-2}$,
 $\rho_{\text{rel}}(t) \propto t^{-8/3}$

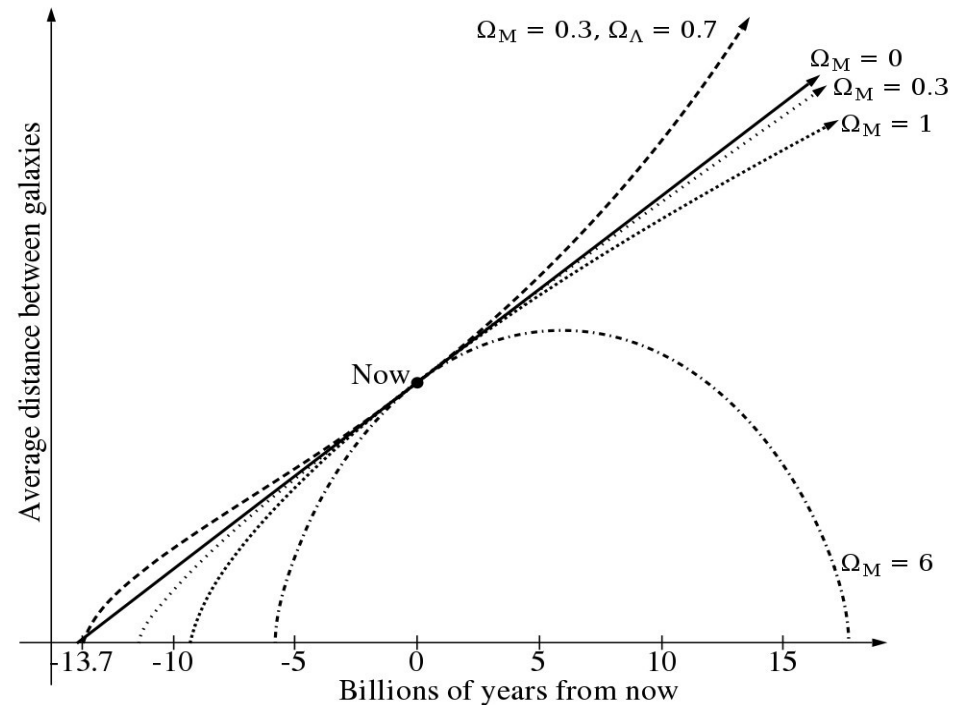
A evolução do Universo nestas primeiras duas fases é adequadamente descrita pelos resultados da cosmologia newtoniana (1ª parte), até o momento naquela a Energia Escura começa a influenciá-la.

Cosmologia Relativística

Juntando as constituintes do Universo

Em $z_{m,\Lambda} \sim 0.3$ (\Rightarrow lista),
quando $t \sim 10$ Gyr,
a **Energia Escura** começa
a **dominar** (por sempre?).

\Rightarrow **Era Λ** : $R(t)$ cresce
exponencialmente,
 $\rho(t)$ **constante**.



A aceleração da expansão começou em $z \sim 0.3$, então?

Cosmologia Relativística

Juntando as constituintes do Universo

Dêmos uma olhada na evolução de $R(t)$ num **Universo** com **matéria** e **Energia Escura** (quando a contribuição das partículas relativísticas já virou desprezível).

Matemática chata (\Rightarrow livro) dá:
$$R(t) = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{4\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \left(e^{3H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}/2}} - e^{-3H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}/2}} \right)^{2/3}$$
$$= \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} \right)$$

Nos **casos extremos** obtemos (\Rightarrow lista)

- $t \ll t_H$ (quando $\rho_m \gg \rho_\Lambda$): $R(t) \simeq \left(\frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{m,0}} \right)^{2/3} = \left(\frac{3\sqrt{\Omega_{m,0}}}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{t}{t_H} \right)^{2/3}$

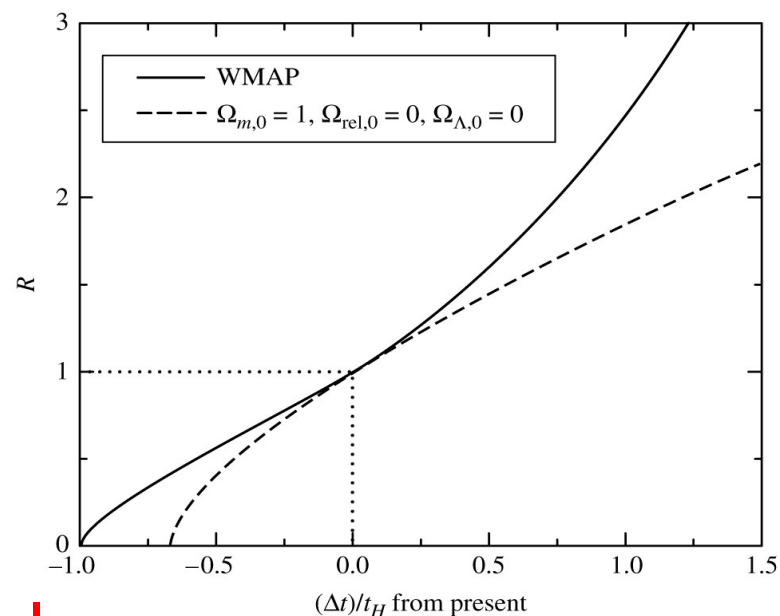
- $t \gg t_H$ (quando $\rho_m \ll \rho_\Lambda$): $R(t) \simeq \left(\frac{\Omega_{m,0}}{4\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} e^{H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}$

como esperado.

Cosmologia Relativística

Juntando as constituintes do Universo

Usando esta fórmula ou a equação de aceleração, conseguimos mostrar (\Rightarrow lista), que a **aceleração** da **expansão** já **começou** em $z \sim 0.65$, quando o Universo tinha ~ 7.6 bi. anos de idade, da ordem de **metade** da **idade atual**.



Cosmologia Relativística

Juntando as constituintes do Universo

As densidades das componentes do Universo em função do tempo.

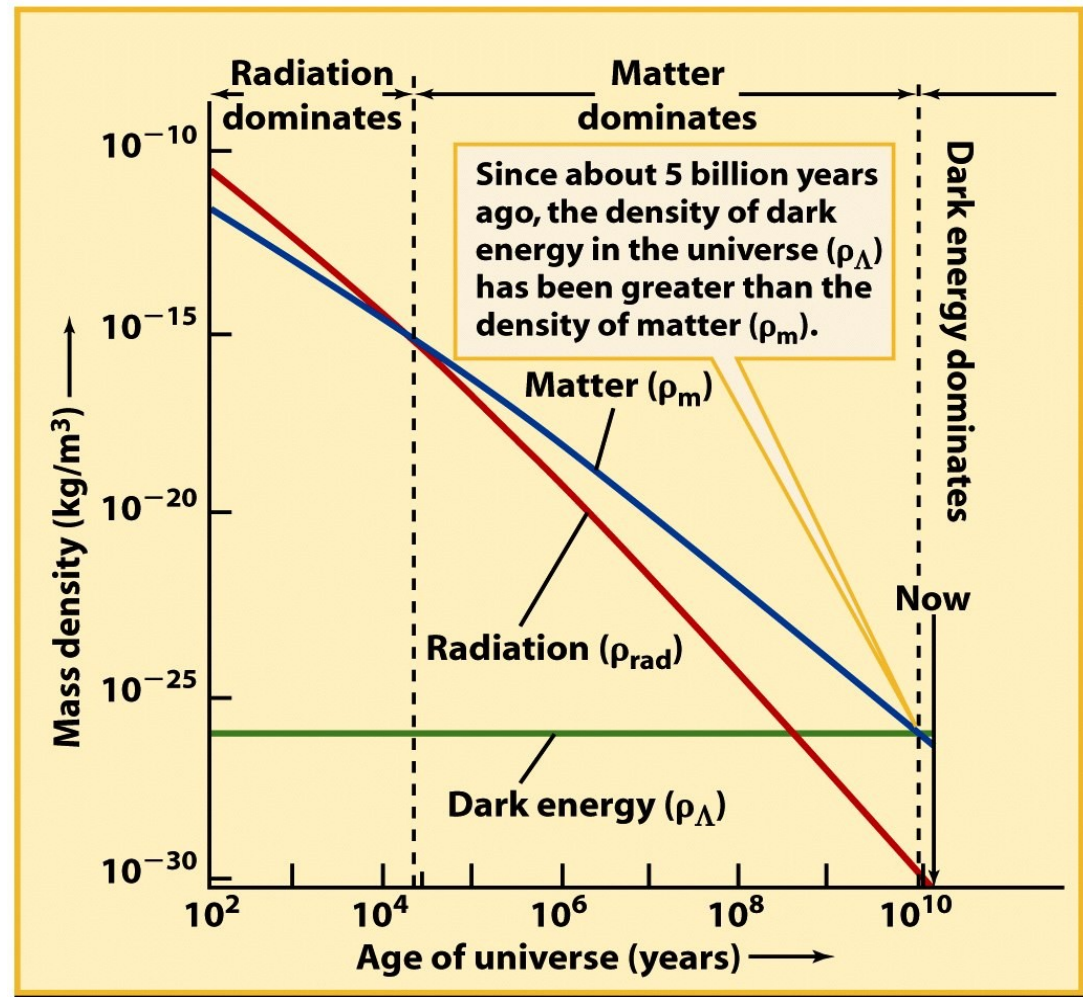
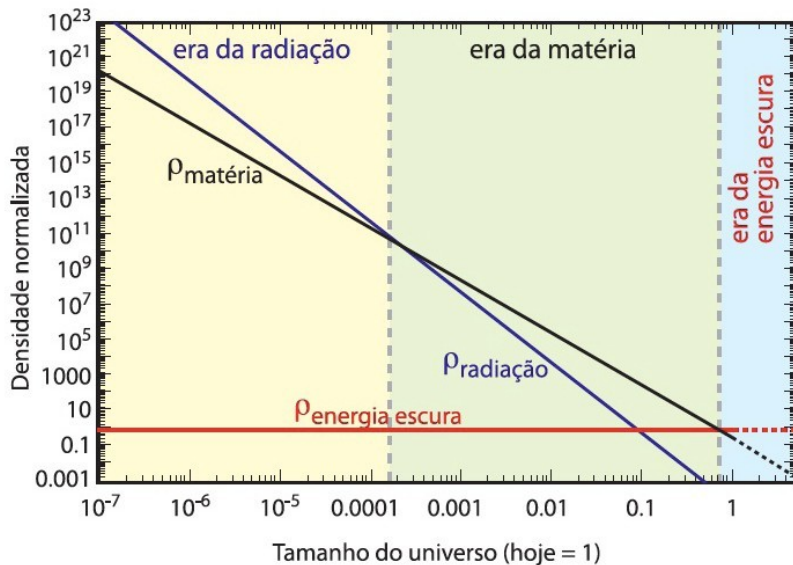


Figure 26-20
Universe, Eighth Edition
© 2008 W.H. Freeman and Company



Universidade Federal do ABC

Introdução à Cosmologia

FIM PRA HOJE

