



Universidade Federal do ABC

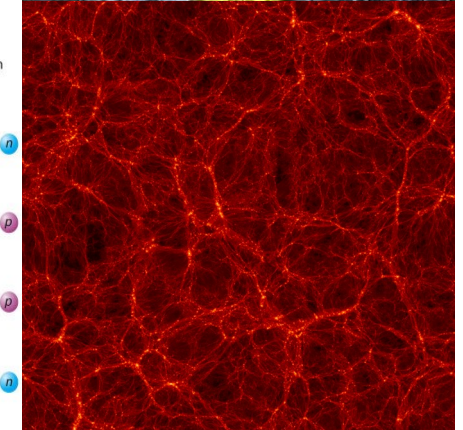
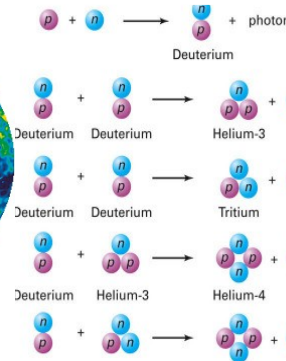
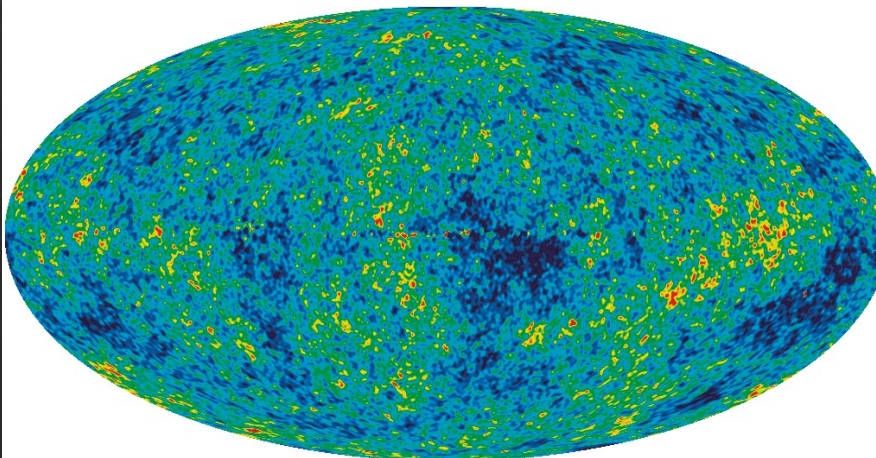
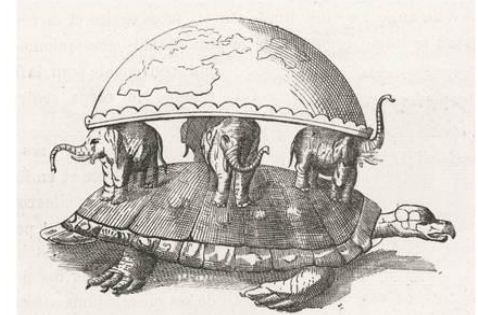
Introdução à Cosmologia

12. Cosmologia Relativística: Medidas de distância, Horizontes

Prof. Pieter Westera

pieter.westera@ufabc.edu.br

<http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/Cosmo.html>



Cosmologia Relativística

Algumas medidas diferentes de distância

Observando um objeto com *redshift* z , que **emitiu** no **tempo** $t(z)$, a **luz** chegando em **nós agora**.

É intuitivo suspeitar que o objeto se encontra a uma distância de $\int_t^{t_0} c dt' = t_L c$ ($t_L = t_0 - t = \textit{lookback time}$ de z) já que a luz viajou pelo tempo t_L com velocidade c até chegar em nós.

Esta distância se chama **distância de percurso da luz**, uma medida de distância não muito usada.

Cosmologia Relativística

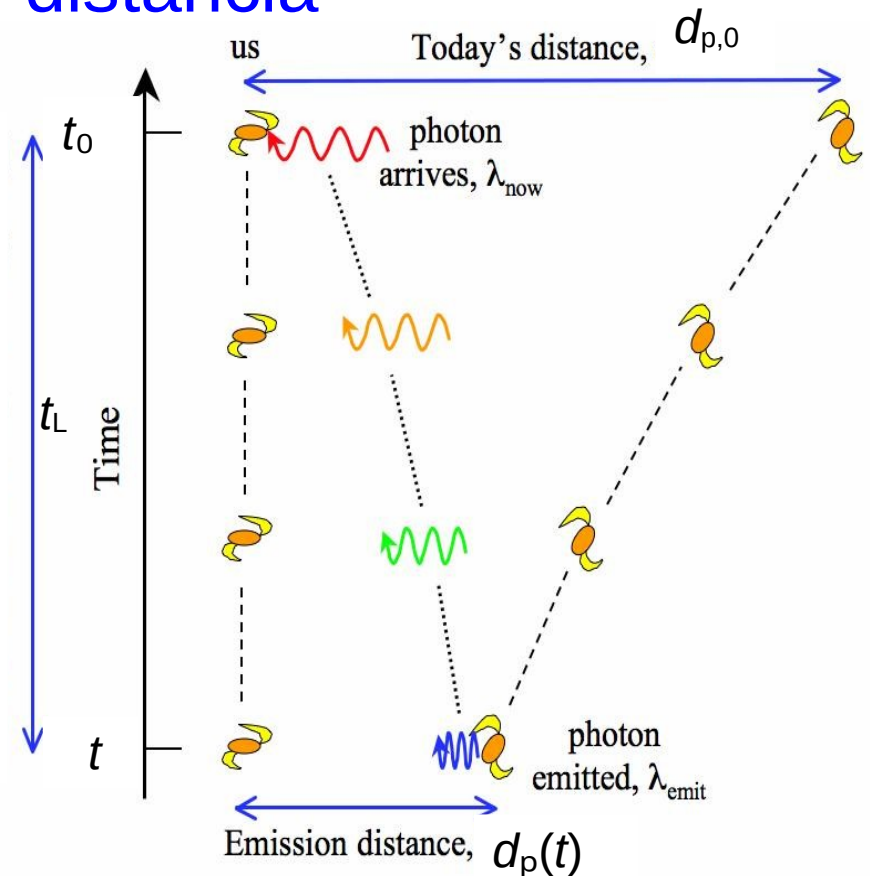
Algumas medidas diferentes de distância

Porém, durante a viagem o espaço se **expandiu**, e um **trecho** que num **momento t'** da viagem ($t < t' < t_0$) era

$$d\ell' = \left| d\varpi' / \sqrt{1 - k\varpi'^2} \right| = c dt'$$

hoje é $R_0/R(t') \cdot c dt' = c dt'/R(t')$

e na **época da emissão t** era $R(t)/R(t') \cdot c dt'$, $R(t) < R(t')$

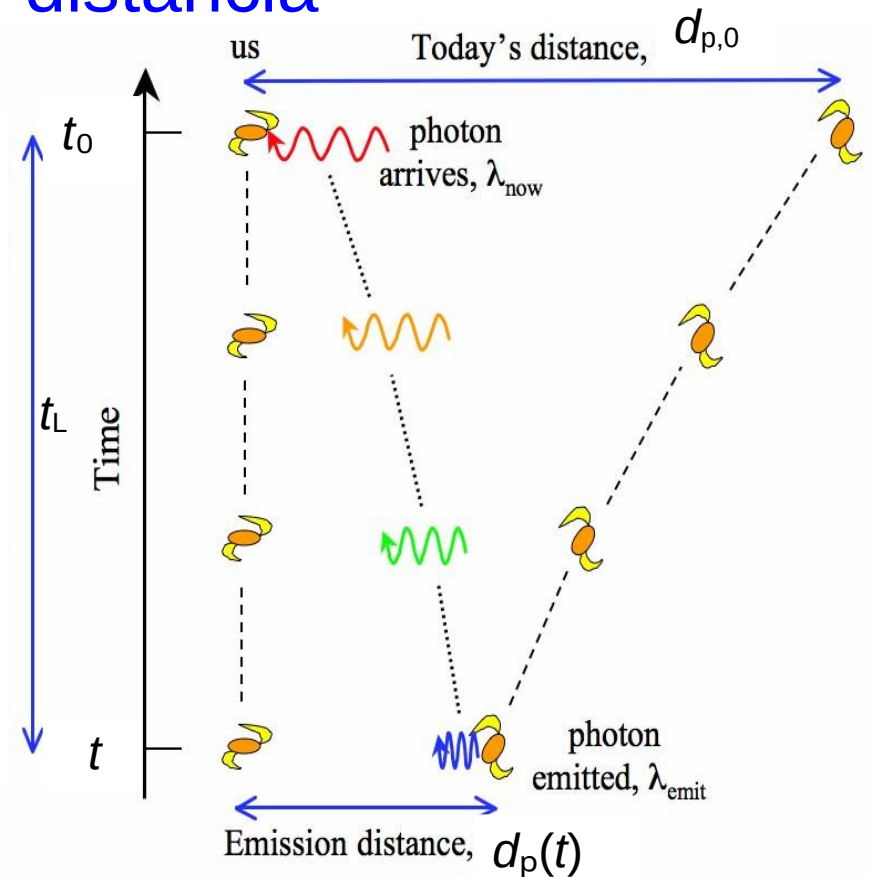


Cosmologia Relativística

Algumas medidas diferentes de distância

=> A distância até o objeto na época da emissão da luz, chamada **distância própria em t** , $d_p(t)$, é menor que t_{LC} e pode ser encontrada integrando:

$$\begin{aligned}d_p(t) &= \int_0^{\varpi} R(t) d\varpi' / \sqrt{1 - k\varpi'^2} \\ &= R(t) \int_0^{\varpi} d\varpi' / \sqrt{1 - k\varpi'^2} \\ &= R(t) \int_t^{t_0} c dt' / R(t')\end{aligned}$$



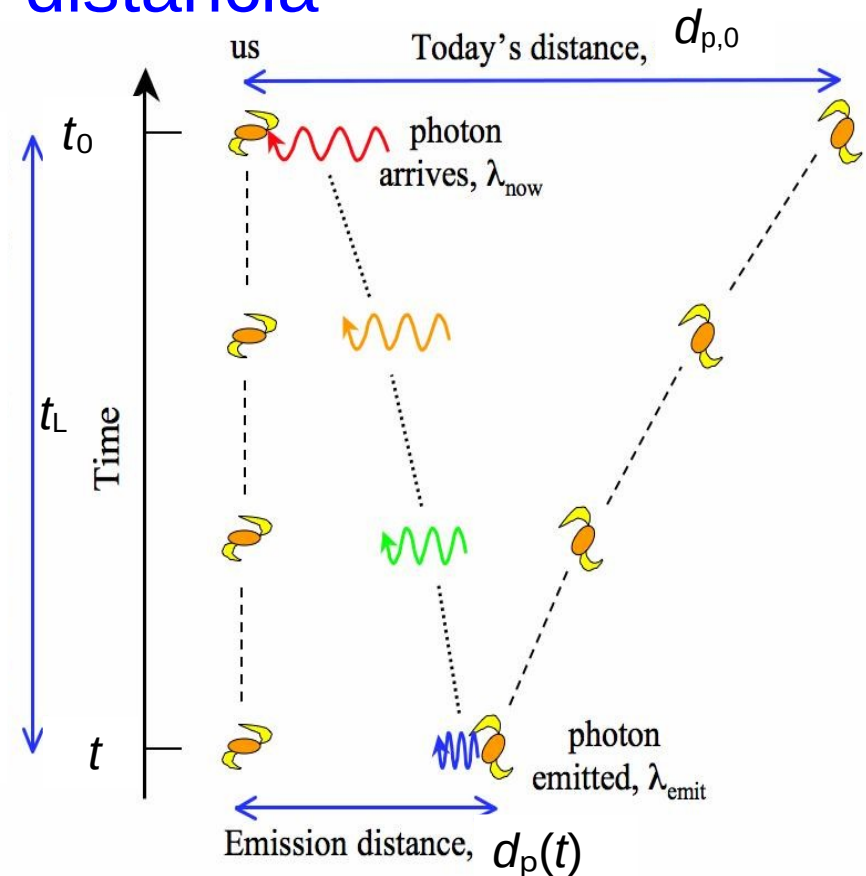
Cosmologia Relativística

Algumas medidas diferentes de distância

A **distância própria hoje**, também chamada **distância comovente** (a mais usada medida de distância) é

$$d_{p,0} = \int_0^{\varpi} d\varpi' / \sqrt{1 - k\varpi'^2} \\ = \int_t^{t_0} c dt' / R(t')$$

$$\Rightarrow d_p(t) = R(t) \cdot d_{p,0} = d_{p,0} / (1+z) \\ \text{como esperado}$$



Cosmologia Relativística

Algumas medidas diferentes de distância

Resolvendo a integral (\Rightarrow FUV) encontramos

- para um Universo plano ($k = 0$): $d_{p,0} = \varpi$
- Universo fechado ($k > 0$): $d_{p,0} = 1/\sqrt{k} \cdot \text{sen}^{-1}(\varpi\sqrt{k}) > \varpi$
- Universo aberto ($k < 0$): $d_{p,0} = 1/\sqrt{|k|} \cdot \text{senh}^{-1}(\varpi\sqrt{|k|}) < \varpi$

Ainda bem que aparentemente o Universo é plano!

Cosmologia Relativística

Algumas medidas diferentes de distância

Para obter uma expressão para $d_{p,0}(z)$, nos limitamos ao caso Universo plano*, onde $d_{p,0}(z) = \varpi(z)$.

*Para o caso geral, consulte o livre, p. 1209 e 1210.

Escrevendo $R(t')dt'$ como $R(dR/dt')/dR$,

$$d_{p,0} = \int_t^{t_0} c dt' / R(t') \text{ vira } d_{p,0} = \int_{R(t_e)}^{R(t_0)} \frac{c dR}{R(dR/dt)} = c/H_0 \cdot I(z),$$

$$\text{onde } I(z) = H_0 \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dR}{R(dR/dt)} = H_0 \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}$$

Cosmologia Relativística

Algumas medidas diferentes de distância

Substituindo $H(z')$ usando uma das versões da equação de Friedmann ($H = H_0(1+z) \left[\Omega_{m,0}(1+z) + \Omega_{rel,0}(1+z)^2 + \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{(1+z)^2} + 1 - \Omega_0 \right]^{1/2}$)

obtemos $I(z) \equiv \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_{m,0}(1+z')^3 + \Omega_{rel,0}(1+z')^4 + \Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_0)(1+z')^2}}$

expansão de Taylor em z' $= \int_0^z \left\{ 1 - (1+q_0)z' + \left[\frac{1}{2} + 2q_0 + \frac{3}{2}q_0^2 + \frac{1}{2}(1 - \Omega_0) \right] z'^2 + \dots \right\} dz'$

onde $q_0 = 0.5 \cdot \Omega_{m,0}(t) + \Omega_{rel,0}(t) - \Omega_{\Lambda,0}(t)$ é o valor atual do parâmetro de desaceleração.

Cosmologia Relativística

Algumas medidas diferentes de distância

A integral dá

$$l(z) = z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + \left[\frac{1}{6} + \frac{2}{3}q_0 + \frac{1}{2}q_0^2 + \frac{1}{6}(1 - \Omega_0)\right]z^3 + \dots$$

=> para $z \ll 1$:

$$d_{p,0} = \varpi \approx \underbrace{cz/H_0}_{\text{Lei de Hubble para uma taxa de expansão constante}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}(1+q_0)z\right)}_{\text{Lei de Hubble aprimorada}} \quad (\text{vale até } z \approx 0.13)$$

Medindo o desvio de $d(z)$ da Lei de Hubble-leMaître, dá para determinar o parâmetro de desaceleração.

Cosmologia Relativística

Algumas medidas diferentes de distância

Qual **percurso** tomaram os **fótons** que **chegam** em **nós hoje**, isto é, qual a função $d_{p,0}(t)$ ou $d_p(t)$?

Para simplificar, tomemos o Universo como **plano** e dominado por **matéria**, o que dá uma ideia pelo menos qualitativa.

Neste caso, $R(t) = (t/t_0)^{2/3}$

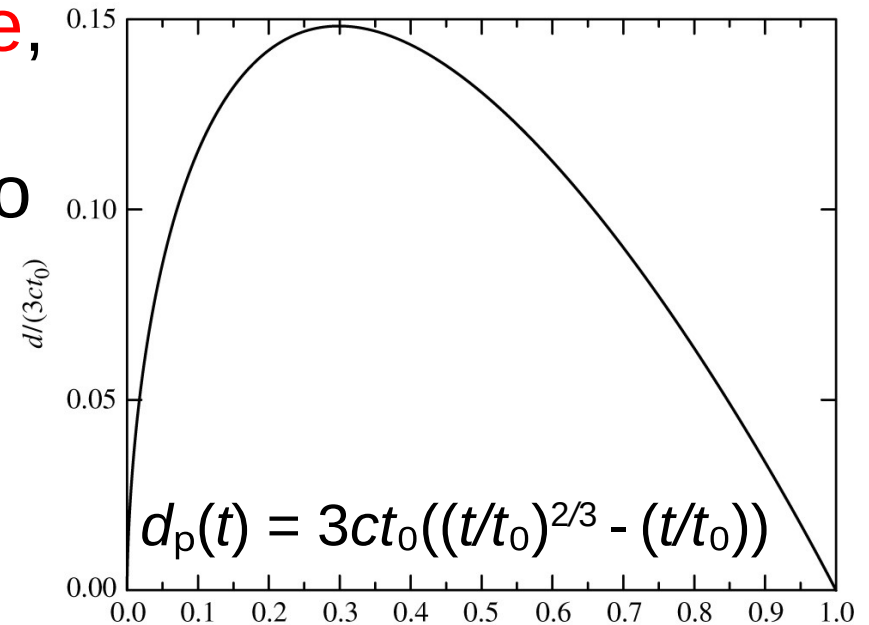
$$\begin{aligned} \Rightarrow d_{p,0} &= \int_t^{t_0} c dt' / R(t') = ct_0^{2/3} \int_t^{t_0} t'^{-2/3} dt' = ct_0^{2/3} (3t_0^{1/3} - 3t^{1/3}) \\ &= 3c(t_0 - t_0^{2/3}t^{1/3}) = 3ct_0(1 - (t/t_0)^{1/3}) = 3ct_0 - 3ct_0(t/t_0)^{1/3} \end{aligned}$$

$$d_p(t) = R(t) \cdot d_{p,0} = (t/t_0)^{2/3} \cdot 3ct_0(1 - (t/t_0)^{1/3}) = 3ct_0((t/t_0)^{2/3} - (t/t_0))$$

Cosmologia Relativística

Algumas medidas diferentes de distância

Enquanto a **distância comovente**, $d_{p,0} = 3ct_0(1 - (t/t_0)^{1/3})$ está **diminuindo** desde o começo (estamos falando de fótons indo rumo Terra), em termos de **distância própria**, inicialmente a expansão **afastou** eles da Terra.



A **distância comovente máxima**, a partir daquela fótons podem chegar em nós é $d_{p,0}(t = 0) = 3ct_0$, o que corresponde ao **tamanho atual** do **Universo observável**, ou a **atual distância do horizonte** (vide daqui a pouco).

Cosmologia Relativística

Algumas medidas diferentes de distância

A **distância de luminosidade** é definida como $d_L \equiv \sqrt{L/4\pi F}$

Como o **fluxo** diminui com o **quadrado** da **distância própria mais** um fator $(1+z)^2$,

um fator $1+z$ pela perda de energia de cada fóton, e mais um fator $1+z$ pela redução de frequência de chegada dos fótons (o espaço entre os fótons é esticado por $1+z$),

d_L vira $(1+z) \cdot d_{p,0} = (1+z)^2 \cdot d_{p(z)} = (1+z) \cdot \varpi$ (para $\Omega_0 = 1$).

Cosmologia Relativística

Algumas medidas diferentes de distância

=> medindo as **magnitudes aparentes** m e os **redshifts** de **velas padrão** (objetos com magnitude absoluta M conhecida) consegue-se determinar, como

$$d_L = 10^{(m-M+5)/5} \text{ pc} \Leftrightarrow m - M = 5 \log_{10}(d_L/10 \text{ pc})$$

depende de z , o que dá dicas sobre a **evolução** do **fator de escala** em função do **tempo/redshift**.

Cosmologia Relativística

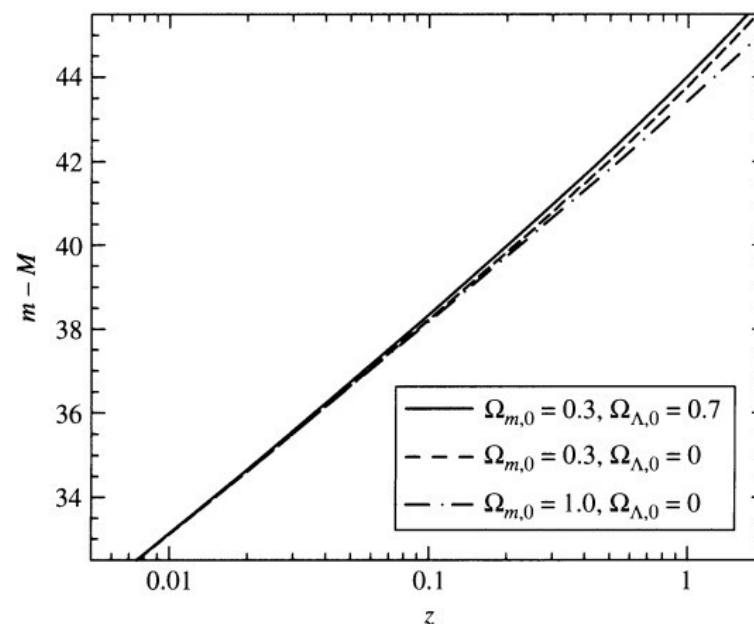
Algumas medidas diferentes de distância

Para $z \ll 1$ vale (\Rightarrow livro)

$$m - M \approx 42.38 - 5 \log_{10}(h) + 5 \log_{10}(z) + 1.086 \cdot (1 - q_0)z,$$

onde h é a constante de Hubble em unidades de $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, jeito de determinar q_0 .

Fazendo isto com **Supernovas tipo IA**, descobriram a **aceleração** da **expansão** do Universo, e então, a **Energia Escura** (\Rightarrow Aula Energia Escura).



Cosmologia Relativística

A **distância de diâmetro angular** é

$$d_A \equiv D/\theta = \varpi/(1+z) = d_L/(1+z)^2,$$

onde D é o **tamanho** do objeto perpendicular à linha de visada na época da emissão, e θ , o **tamanho angular observado**.

Em um Universo plano, isto dá

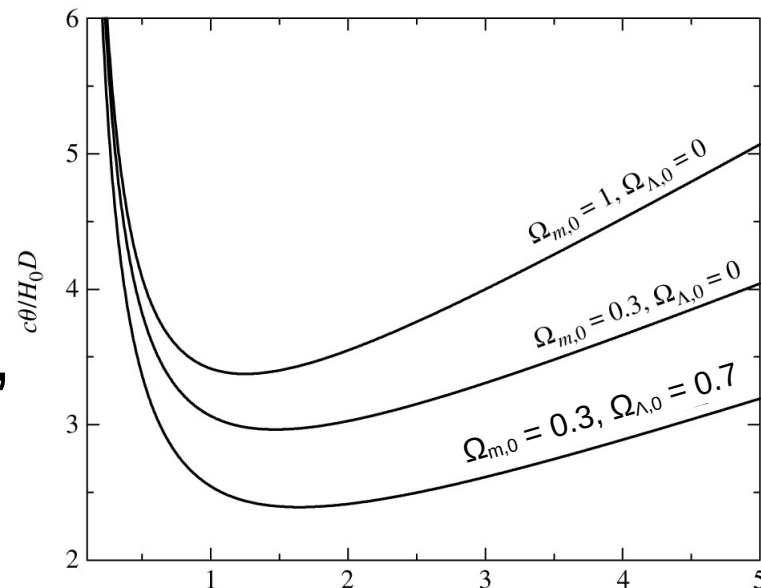
$$d_A = d_p(t) = d_{p,0}/(1+z)$$

Cosmologia Relativística

Dependendo da **geometria** do **Universo**, objetos de tamanhos iguais podem parecer **maiores**, quando **mais longes** (Universo atuando como "lente gravitacional"), já que $\theta = D/d_A = D/d_p(z)$.

Universo plano

=> **Observar** os **tamanhos angulares** de objetos de tamanhos intrínsecos conhecidas (chamadas **réguas padrão**) em **função** do **redshift** dá dicas sobre a **geometria** do **Universo**.



tamanho angular de um objeto de tamanho D em função do seu *redshift*

Cosmologia Relativística

Usando este efeito na observação das **estruturas** na **radiação cósmica de fundo** (\Rightarrow aula CMB II), consegue-se confirmar, que o Universo é plano.

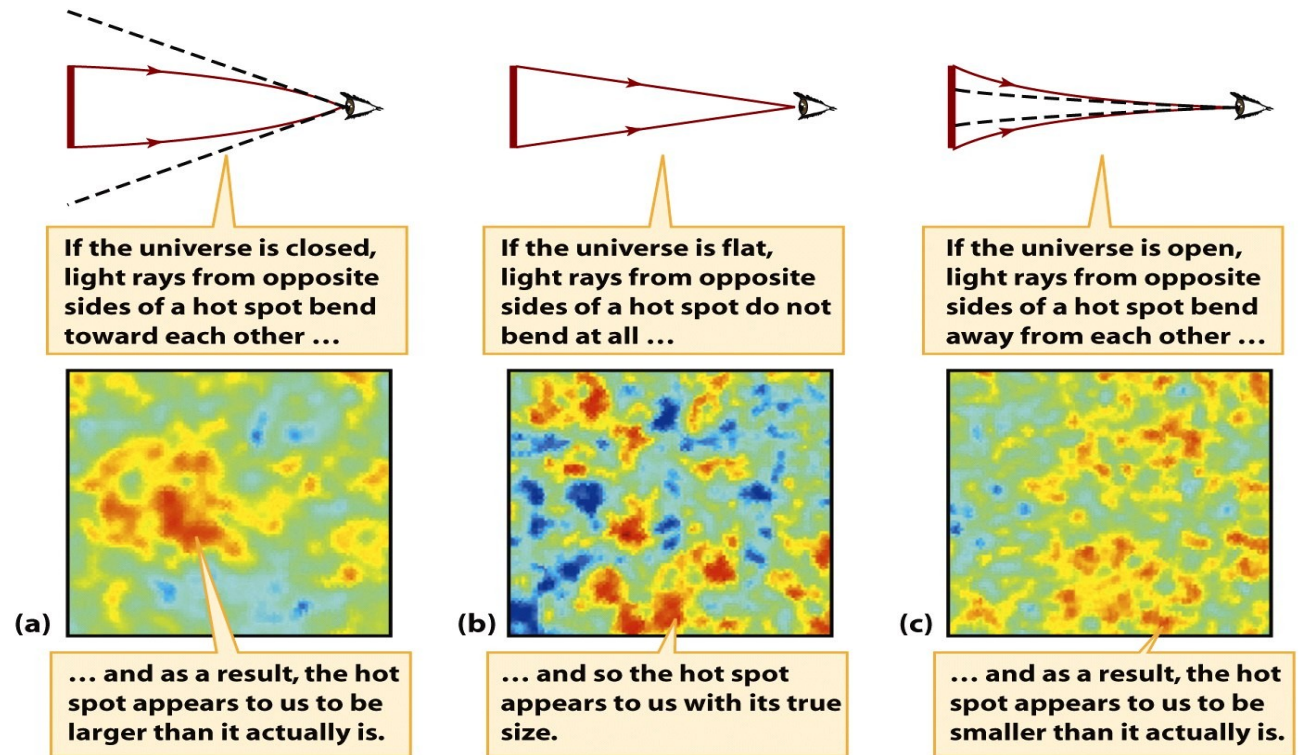


Figure 26-16
Universe, Eighth Edition
© 2008 W.H. Freeman and Company

Cosmologia Relativística

Resumo medidas diferentes de distância em um Universo plano

- Distância de percurso da luz: $\int_t^{t_0} c dt' = t_L c$
- Distância própria em t : $d_p(t) = R(t) \int_t^{t_0} c dt' / R(t')$
- Distância própria hoje, ou **distância comovente**:
 $d_{p,0}(t) = R_0 \int_t^{t_0} c dt' / R(t') = d_p(t) / R(t) = \varpi$
- Distância de luminosidade: $d_L \equiv \sqrt{L/4\pi F} = (1+z) \cdot d_{p,0}$
- de diâm. angular: $d_A \equiv D/\theta = d_L / (1+z)^2 = d_p = d_{p,0} / (1+z)$

Cosmologia Relativística

Os Horizontes da Observação

Pela **velocidade finita** da **luz**, há lugares **causalmente desligados** da Terra, quer dizer, de onde luz (ou qualquer outro sinal) **nunca** chegou em nós (e vice-versa)

A **distância própria** até o ponto **observável mais distante**, chamado **horizonte de partículas**, é a **distância de horizonte**,

$$d_h(t) = R(t) \int_0^t c/R(t') dt'$$

$d_h(t)$ é, então, o **diâmetro** da **maior** região **causalmente ligada** no tempo t .

Logicamente $d_h(t)$ **aumenta** com o tempo.

Cosmologia Relativística

Os Horizontes da Observação

Na **era da radiação**, $R(t) \propto t^{1/2}$, $R(t) = C \cdot t^{1/2}$
 $\Rightarrow d_h(t) = R(t) \int_0^t c/R(t') dt' = \cancel{C} \cdot t^{1/2} \int_0^t c/\cancel{C} t'^{1/2} dt'$
 $= c \cdot t^{1/2} \cdot [(1/2)^{-1} \cdot t'^{1/2}]_{t'=0}^t = 2ct.$

de maneira análoga obtemos pra **era da matéria**,
quando $R(t) \propto t^{2/3}$ (lista): $d_h(t) = 3ct.$

Usando $R(t) \simeq \left(\frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{m,0}}\right)^{2/3} = \left(\frac{3\sqrt{\Omega_{m,0}}}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{t}{t_H}\right)^{2/3}$ podemos

escrever d_h em função do **redshift**: $d_h(z) = \frac{2c}{H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}}} \frac{1}{(1+z)^{3/2}}$

Para $z = 0$ isto dá ~ 16 Gpc, o que significa que só conseguiríamos **observar** objetos que atualmente se encontram **até 16 Gpc** de nós, se o Universo fosse **só matéria**.

Cosmologia Relativística

Os Horizontes da Observação

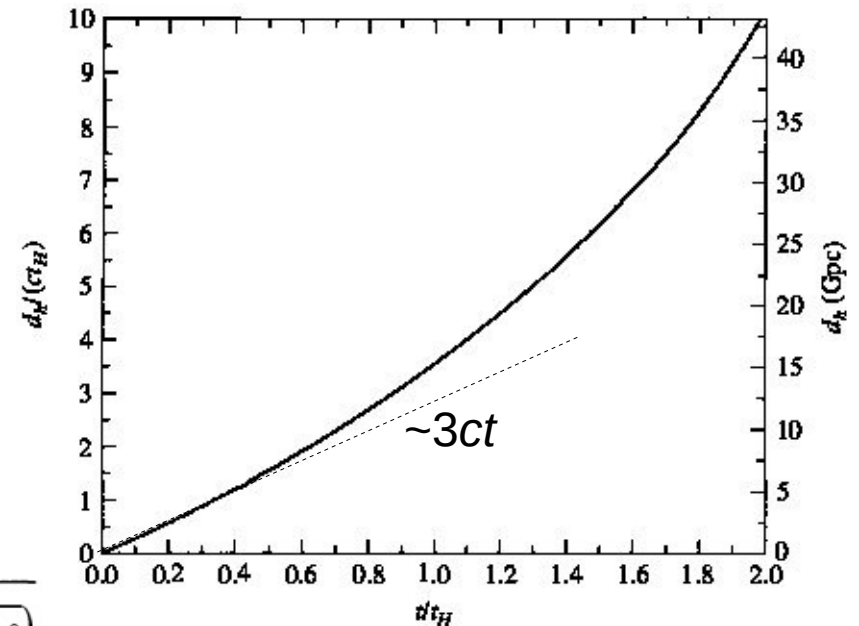
Na verdade, estamos numa fase, naquela a **matéria** e a **Energia Escura** contribuem pra evolução (podemos desprezar a componente relativística), tal que a integral a ser resolvida é

$$d_h(t) = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} \right) \int_0^t \frac{c dt'}{\left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3}{2} H_0 t' \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} \right)}$$

um pouco mais complicado...

Integração numérica resulta na curva em cima, e a **atual distância de horizonte** acaba sendo $d_{h,0} = 14.6 \text{ Gpc}$.

No futuro distante, d_h aumentará como $e^{H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}$, igual como $R(t)$.



Cosmologia Relativística

Os Horizontes da Observação

É importante se dar conta, que, no **Universo jovem**, nas eras da **radiação** e da **matéria**, a **distância de horizonte**, d_h , **aumentou** proporcional a t , **mais rapidamente**, do que o **fator de escala** $R(t)$, $\propto t^{1/2}$, resp. $t^{2/3}$.

Nestas fases, mais e mais partes de Universo **entraram** no **horizonte**, e

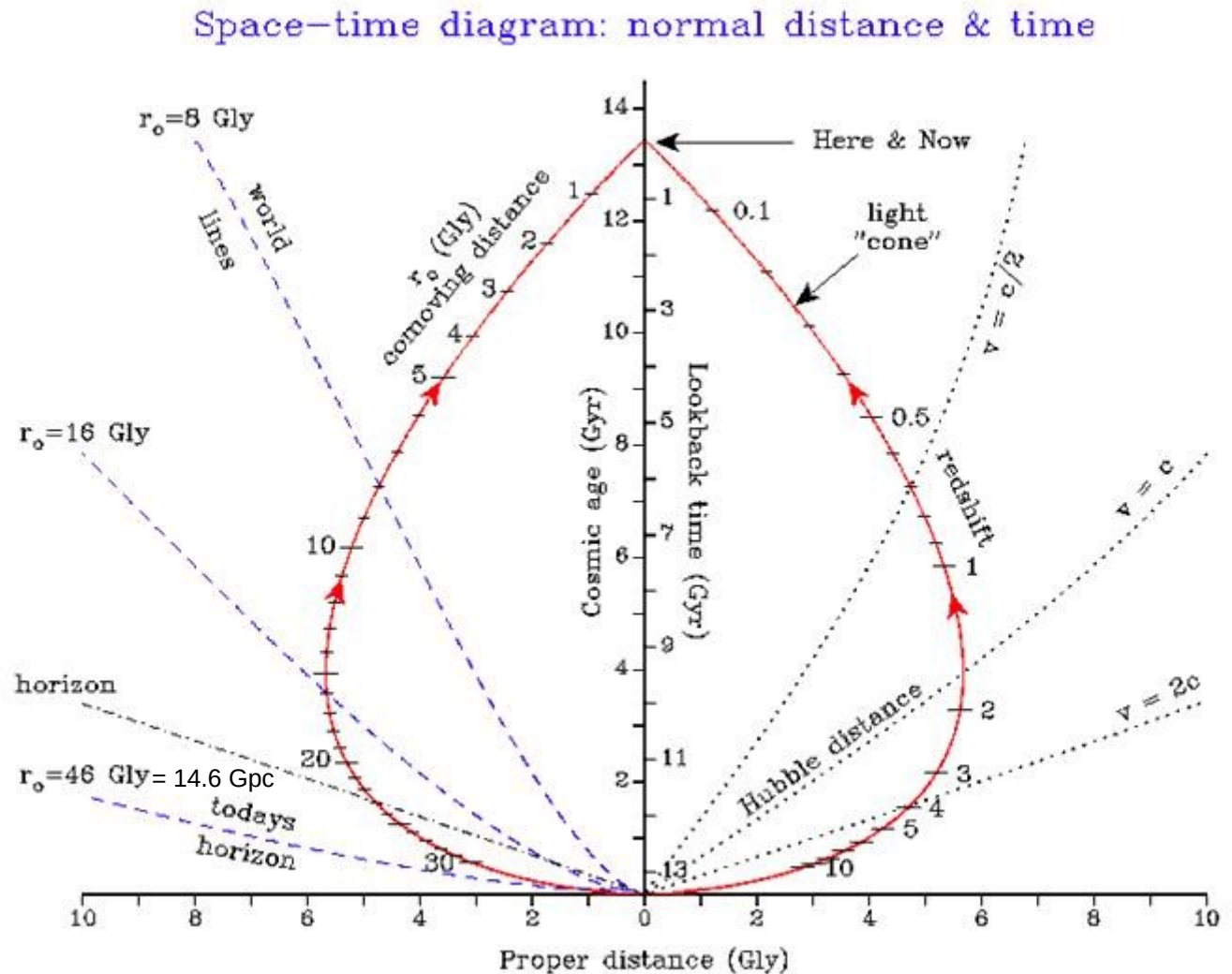
$d_{\text{comovente}} = "R_0" \int_0^t c/R(t') dt' = \int_0^t c/R(t') dt' = d_h(t)/R(t)$,
a **distância comovente** de **horizonte**, **aumentou**.

=> O Universo se tornou mais e **mais causalmente ligado**.

Cosmologia Relativística

Os Horizontes da Observação

Ilustração da relação entre o percurso dos fótons chegando em nós hoje, o "cone de luz (passado) atual" e a distância do horizonte.



Cosmologia Relativística

Os Horizontes da Observação

Para $t \rightarrow \infty$, enquanto $d_h(t) \propto e^{H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}$ diverge,
 $d_{\text{comovente}}(t) = d_h(t)/R(t)$,

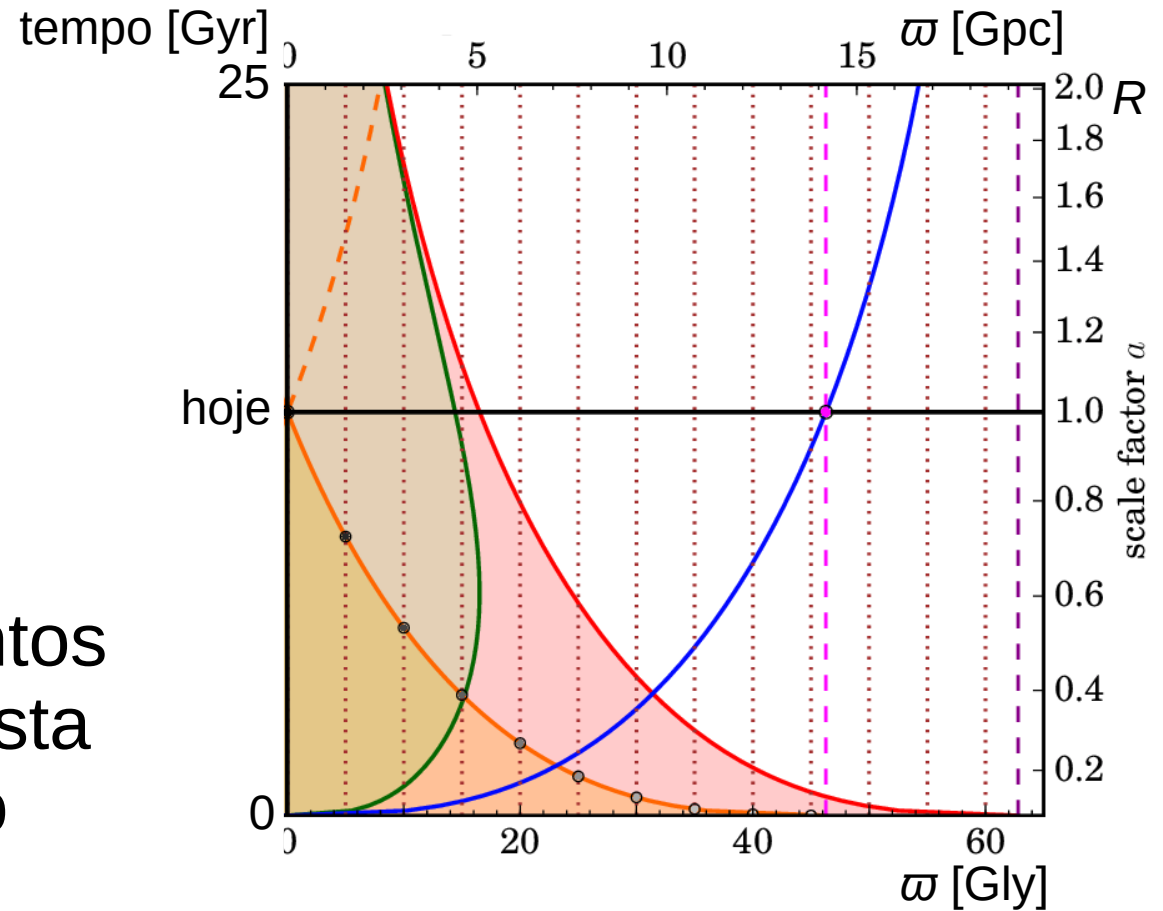
linha azul, converge

para 19.3 Gpc,

(já que $R(t)$ também é $\propto e^{H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}$)

o que significa, que pontos que hoje ficam além desta distância **nunca** estarão **observáveis** daqui.

(O cone de luz atual é a linha em laranja)



Cosmologia Relativística

Os Horizontes da Observação

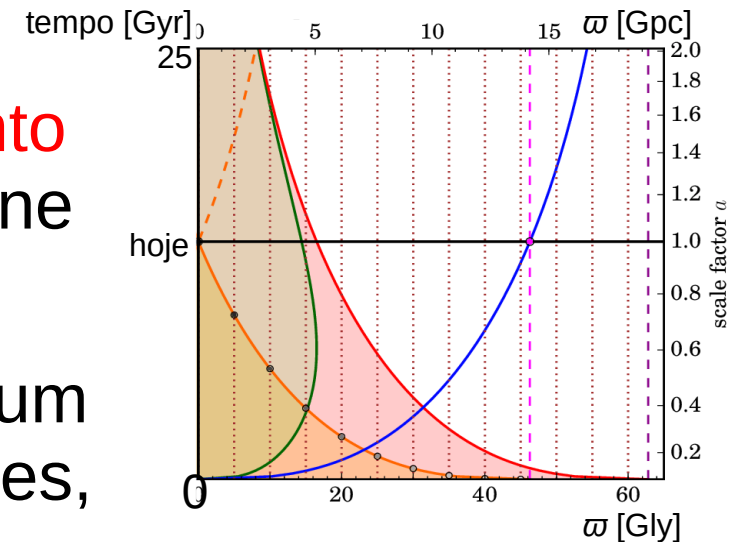
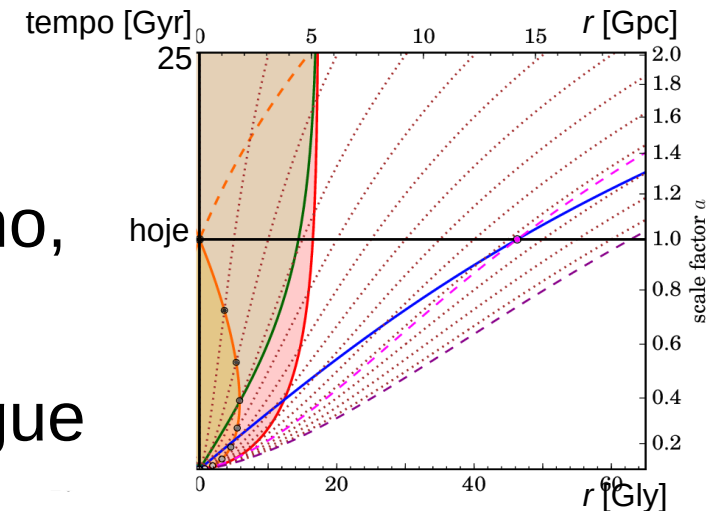
Supondo uma galáxia emitindo **luz** na **nossa direção**:

Dependendo do *Hubble Flow* no caminho, a luz **consegue chegar** em nós ou **não**.

Luz partindo da **região vermelha** consegue chegar e luz de fora, não.

O **limite**, a partir daquele ela consegue chegar chamamos de **horizonte de evento** (**linha vermelha**), basicamente nosso cone de luz no futuro infinito.

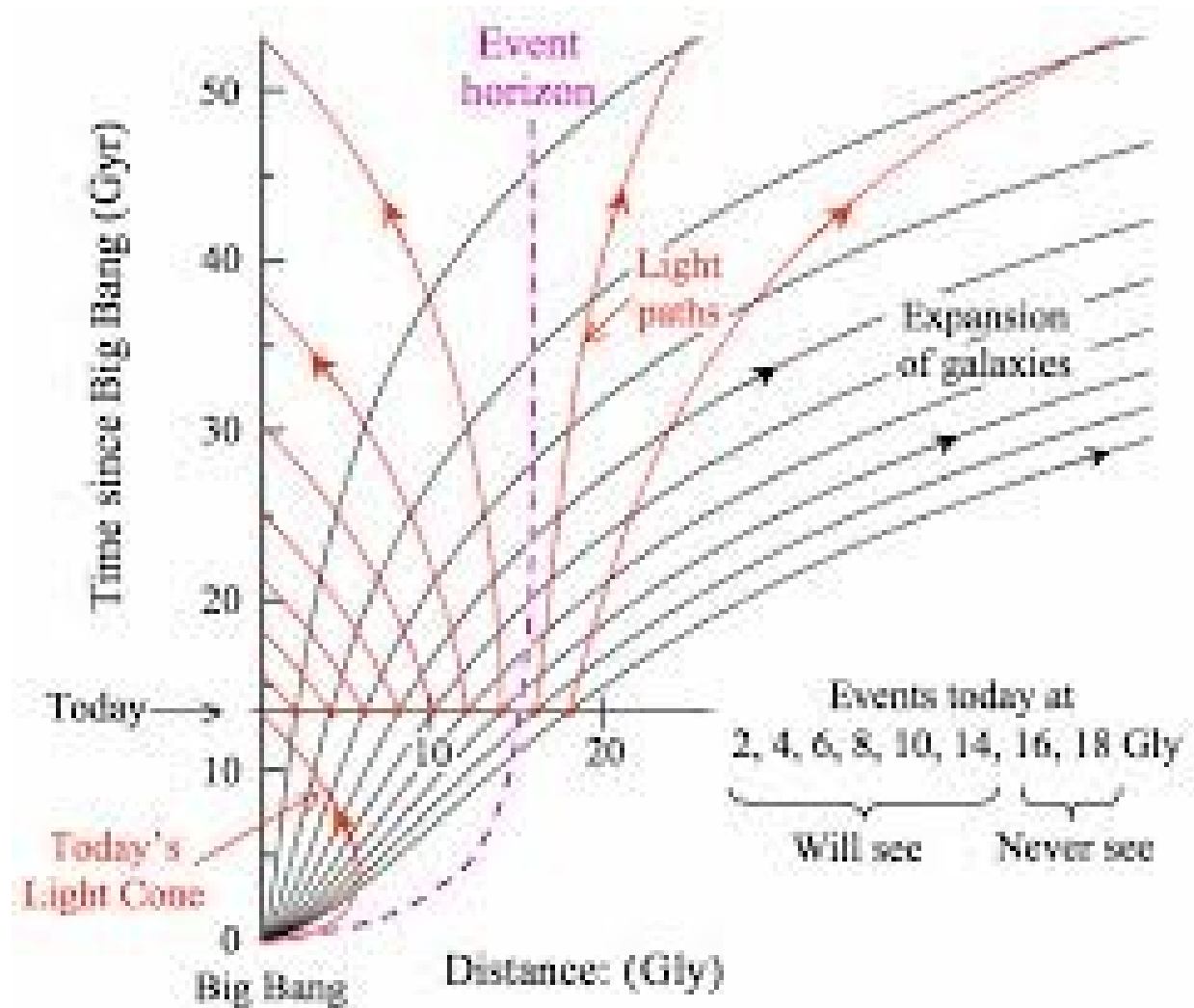
O horizonte de evento também tende a um valor finito e em coordenadas comoventes, a zero.



Cosmologia Relativística

Os Horizontes da Observação

Ilustração do conceito de horizonte de evento usando seu valor atual, da ordem de 5 Gpc.



Cosmologia Relativística

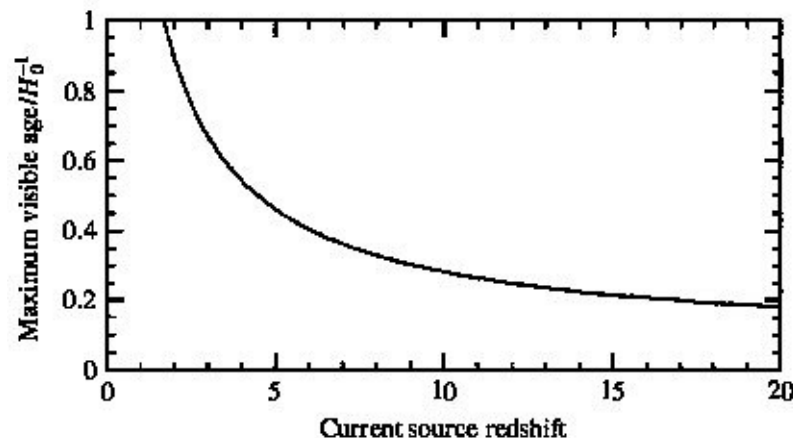
Os Horizontes da Observação

Por causa disso, objetos **atualmente observáveis** se tornarão **inobserváveis**, q. d. os seus **redshifts** tenderão ao **infinito**: a **radiação** emitida por eles ficará mais e mais **vermelha** e **fraca**, e a sua **evolução** se tornará infinitamente **lenta**.

Só conseguiremos **observá**-los evoluir até uma certa **idade máxima**, que depende do seu **redshift** hoje.

Exemplo: **Nunca** veremos as galáxias atualmente observadas com **redshift** ≥ 1.8 como elas estão hoje.

O **contato** entre as galáxias **cessará**, e o **Universo** se tornará **causalmente fragmentado**.



Cosmologia Relativística

O Tempo Conformal

Para entender estes assuntos de horizontes, é instrutivo definir o **tempo conformal** (ou conforme) $d\eta = dt/dR$
 $\Rightarrow \eta = \int_0^t dt'/R(t') = d_{\text{comovente}}/c$

Assim, $d\varpi/d\eta = (dr/R(t))/(dt/R(r)) = dr/dt$

\Rightarrow Num **diagrama $\varpi - \eta$** , melhor $\varpi - c\eta$, **velocidades** correspondem a **inclinações**.

Em particular, linhas com **inclinação 45°** representam **caminhos de luz**, igual como em **diagramas espaço-tempo** da Relatividade Restrita.

A métrica de Robertson-Walker pode ser escrita:

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - R^2(t) \cdot d\ell_0^2 = R(t)^2 \cdot (c^2\eta^2 + d\ell_0^2)$$

Cosmologia Relativística

O Tempo Conformal

Em termos do **tempo conformal**, as **eras** da **evolução** do **Universo** podem ser descritas assim:

Era da radiação:

$$\begin{aligned} \eta &\propto t^{1/2}, & R(t) &\propto t^2 \propto \eta, \\ d_h = 2ct &\propto R^2 \propto \eta^2, & d_{\text{comovente}} &\propto t^2 \propto R \end{aligned}$$

Era da matéria:

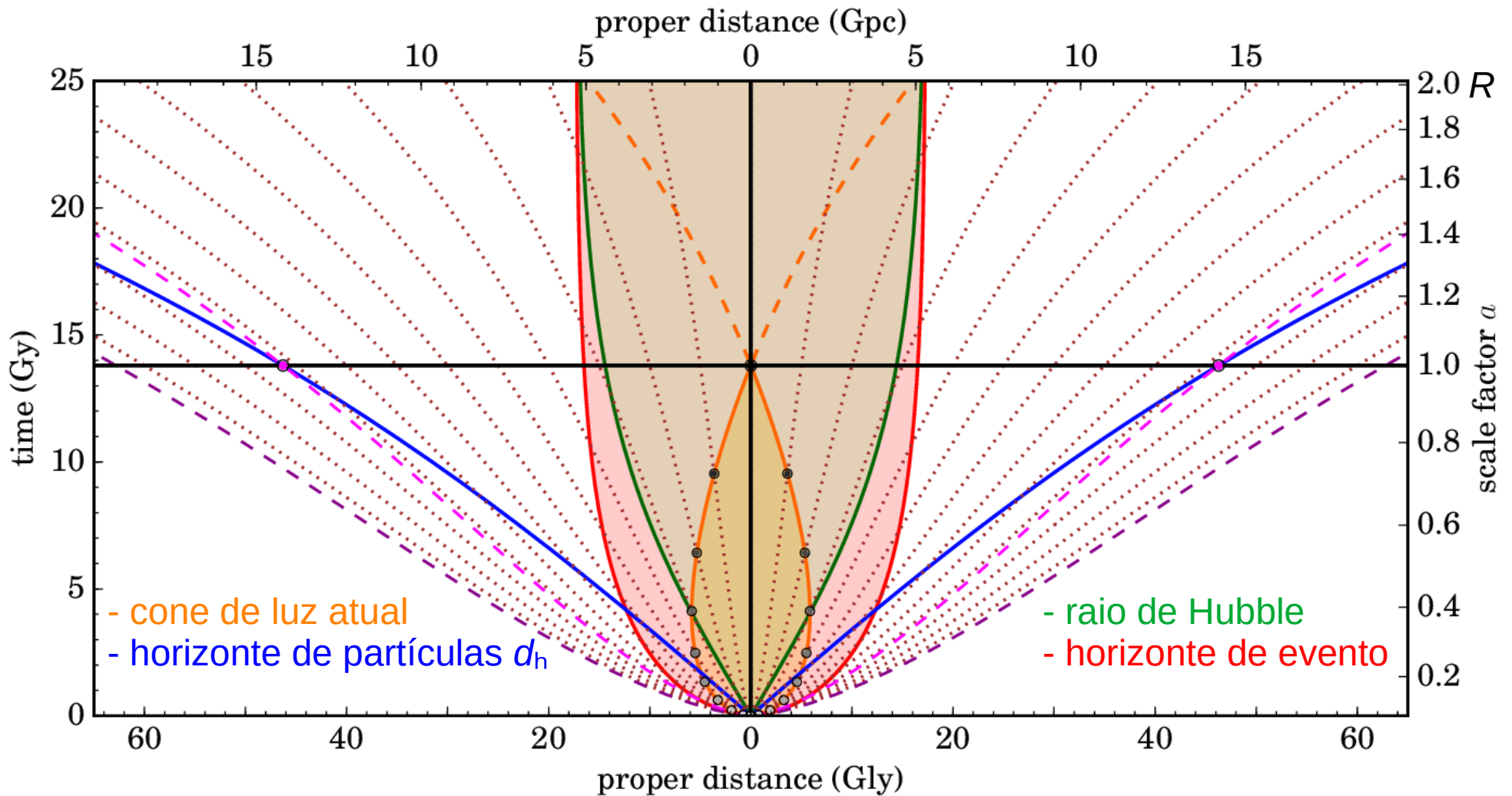
$$\begin{aligned} \eta &\propto t^{1/3}, & R(t) &\propto t^{2/3} \propto \eta^2, \\ d_h = 3ct &\propto R^{3/2} \propto \eta^3, & d_{\text{comovente}} &\propto t^{1/3} \propto R^{1/2} \end{aligned}$$

Era Λ (no futuro distante, quando o efeito da matéria será desprezível):

$$\begin{aligned} \eta \text{ e } d_{\text{comovente}} &\propto (1 - e^{-H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}) \text{ tendem a um valor finito!} \\ R \text{ e } d_h &\propto e^{H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}} \end{aligned}$$

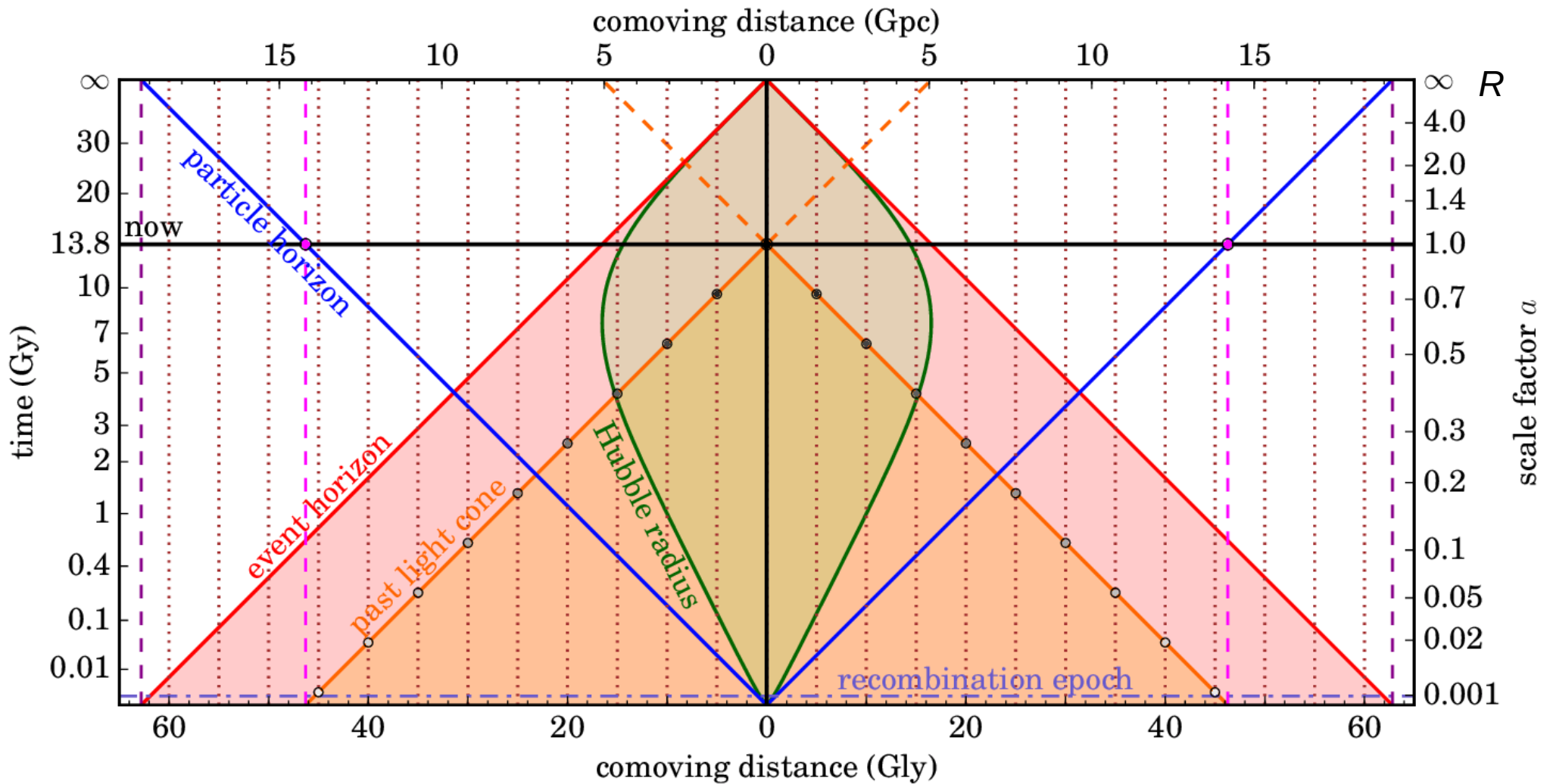
Cosmologia Relativística

O Diagrama de Antes em r vs. t



Cosmologia Relativística

Diagrama Conformal, isto é ϖ vs. η





Universidade Federal do ABC

Introdução à Cosmologia

FIM PRA HOJE

