Introdução à Cosmologia

Inflação Cósmica

Welder Melo

4 de abril de 2026

Universidade Federal do ABC

O Que é o Big Bang Quente?

- **Big Bang Quente (Hot Big Bang – BBH):** Modelo de expansão rápida do próprio espaço-tempo a partir de um estado extremamente quente e denso.
- **Evolução térmica:** Quanto mais primordial, maiores as temperaturas e densidades.
- **Singularidade inicial:** O modelo clássico prevê uma singularidade em $t = 0$ onde a densidade e temperatura divergem.
- **Evidências de sucesso:** Abundância de elementos leves (He, Li), existência da CMB, expansão do universo.

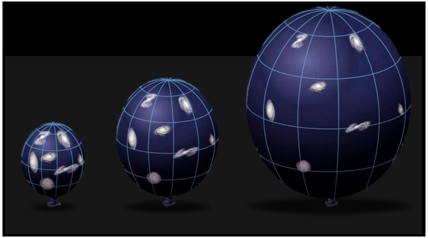

Figura: Expansão do universo como um balão sendo inflado.

Contexto Histórico:

- **George Gamow (1904-1968):** Físico russo-americano, ”pai”do Big Bang Quente.
- Transformou a ideia da expansão do universo (Hubble, 1929) em um **modelo físico detalhado** com predições quantitativas.
- **Predição da CMB (1948):** Seus colaboradores **Ralph Alpher e Robert Herman** calcularam que o ”eco”térmico do Big Bang deveria existir com temperatura $T \approx 5$ K.
- Gamow inicialmente foi cético, mas mais tarde contribuiu para popularizar a ideia.
- **Confirmação (1965):** Penzias e Wilson descobriram a CMB acidentalmente, confirmando a predição de $T \approx 2{,}7$ K.

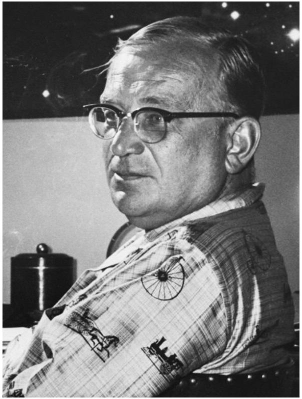

Figura: George Gamow, pioneiro da cosmologia nuclear.

Apesar de seu sucesso, o modelo BBH padrão enfrenta três problemas conceituais graves que exigem condições iniciais extremamente específicas:

1. **Problema do Horizonte:** Como regiões separadas por mais de 1° no céu, que nunca tiveram contato causal desde o início do universo, exibem temperaturas praticamente idênticas ($\Delta T/T \sim 10^{-5}$) na CMB?
2. **Problema da Planicidade:** Por que a geometria do universo é tão próxima da plana ($\Omega_k \sim 10^{-2}$ hoje)? Se houvesse qualquer desvio inicial, ele teria sido amplificado exponencialmente, exigindo um ajuste fino de $\sim 10^{-60}$ no tempo de Planck.
3. **Origem das Estruturas:** O que gerou as sementes primordiais das galáxias e aglomerados? As flutuações de densidade observadas na CMB precisam de uma origem física.

O que é o horizonte?

- O **horizonte de partículas** é a distância máxima que a luz pode ter percorrido desde o início do universo até um dado instante.
- Regiões fora do horizonte **nunca trocaram informação** (cones de luz passados não se sobreponham).
- Na última superfície de espalhamento (CMB), regiões separadas por mais de $\sim 1^\circ$ estavam fora do horizonte no modelo BBH padrão.

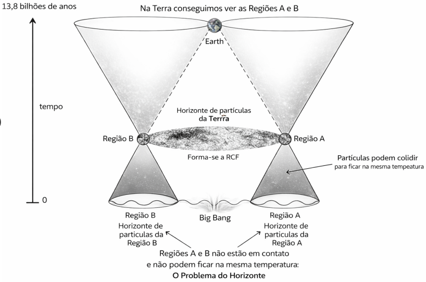

Figura: Regiões na CMB com mesma temperatura mas sem contato causal.

O paradoxo: Como essas regiões ”sabem”que devem ter a mesma temperatura ($\Delta T/T \sim 10^{-5}$) se nunca se comunicaram?

O Problema da Planicidade: Evolução da Curvatura

Contexto geométrico: O universo pode ter geometria:

- **Aberta** ($k < 0$, $\Omega_k > 0$): curvatura negativa, ângulos de triângulos somam $< 180°$
- **Fechada** ($k > 0$, $\Omega_k < 0$): curvatura positiva, ângulos somam $> 180°$
- **Plana** ($k = 0$, $\Omega_k = 0$): geometria Euclidiana

Evolução do parâmetro de curvatura:
Definimos a densidade crítica $\rho_{\text{crit}} = 3M_{\text{Pl}}^2 H^2$ e o parâmetro de curvatura:

$$\Omega_k(t) \equiv \frac{\rho_{\text{crit}} - \rho}{\rho_{\text{crit}}} = 1 - \Omega_{\text{total}} = -\frac{k}{(aH)^2} \tag{1}$$

Problema: Em um universo dominado por radiação ou matéria, Ω_k cresce com o tempo! Se $\Omega_k \neq 0$ inicialmente, ele divergiria rapidamente.

Calculando em épocas fundamentais (considerando evolução em radiação/matéria):

- $|\Omega_{k,0}| < 0.005$ - Limite superior para o tamanho do parâmetro de curvatura hoje.
- $|\Omega_k(t_{\text{eq}})| < 10^{-6}$ - Fase de transição da radiação-matéria
- $|\Omega_k(t_{\text{BBN}})| < 10^{-16}$ - Big Bang Nucleosíntese
- $|\Omega_k(t_{\text{EW}})| < 10^{-29}$ - fase de transição eletrofraca

Isso significa que o universo começou extremamente plano, então deveria haver um ajuste fino para explicar essa planicidade com precisão absurda de $\approx 10^{30}$?

O problema: Para explicar $\sim 10^{-60}$ no tempo de Planck sem inflação, precisaríamos de um **ajuste fino** das condições iniciais com precisão de 1 parte em 10^{60} — uma coincidência extremamente improvável!

O problema agravado:

- Não podemos simplesmente ”descartar”os problemas do horizonte e planicidade como condições iniciais arbitrárias.
- **Observação crucial:** O universo possui **flutuações de densidade** ($\delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$) em escalas **super-horizonte** (maiores que o horizonte causal no momento da recombinação).
- Essas flutuações são as sementes das galáxias e aglomerados que vemos hoje.
- **Exigência:** Precisamos de uma **explicação dinâmica** — um mecanismo físico que gere essas correlações em escalas acausais.

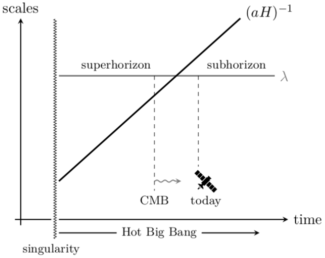

Figura: Evolução de uma flutuação comóvel λ vs raio de Hubble $(aH)^{-1}$.

Definição: A inflação é uma fase de **expansão exponencial acelerada** do universo muito cedo em sua história, durante a qual o fator de escala cresce como $a(t) \sim e^{Ht}$ com $\ddot{a} > 0$.

Características fundamentais:

- **Duração:** Muito breve, mas com enorme expansão ($\Delta t \sim 10^{-36}$ s, $N \sim 60$ e-folds)
- **Energia:** Ocorre quando o universo é dominado por uma forma de energia com **pressão negativa** ($w < -1/3$)
- **Espaço-tempo:** Aproximadamente de Sitter (curvatura escalar constante)
- **Resultado:** ”Estica”o universo até torná-lo macroscopicamente plano e causalmente conectado

Histórico: Proposta por **Alan Guth** (1981) e refinada por Linde, Albrecht e Steinhardt (1982) como solução para os problemas do BBH.

Mecanismo: Durante a inflação, o **raio de Hubble comóvel** $(aH)^{-1}$ **diminui** (ao contrário do BBH padrão onde aumenta).

Evolução do horizonte:

- **Antes da inflação:** Regiões que vemos hoje estavam dentro do horizonte (causalmente conectadas).
- **Durante a inflação:** $(aH)^{-1}$ diminui $\Rightarrow$ regiões **saem** do horizonte.
- **Após a inflação:** $(aH)^{-1}$ aumenta novamente $\Rightarrow$ regiões **reentram** no horizonte.

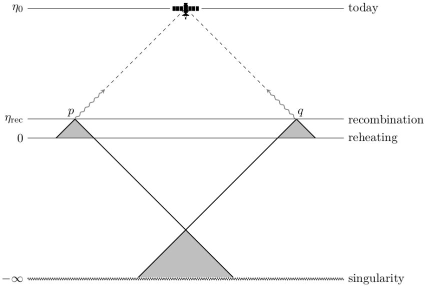

Figura: Solução inflacionária: a superfície de reaquecimento substitui a singularidade do BBH padrão.

Resultado: Todas as regiões na CMB têm **cones de luz passados sobrepostos** — originaram-se de uma região causalmente conectada!

Resolução do Problema da Planicidade (1/2)

Intuição: A inflação ”estic”a curvatura até torná-la imperceptível, como inflar um balão até sua superfície parecer plana.

Evolução em radiação/matéria (BBH padrão):

- Ω_k cresce rapidamente
- Universo plano ($\Omega_k = 0$) é um **repulsor**
- Qualquer desvio inicial diverge

Evolução durante a inflação (energia do vácuo):

- Ω_k diminui exponencialmente
- Universo plano ($\Omega_k = 0$) é um **atrator**
- Qualquer curvatura inicial é suprimida

Resolução do Problema da Planicidade (2/2)

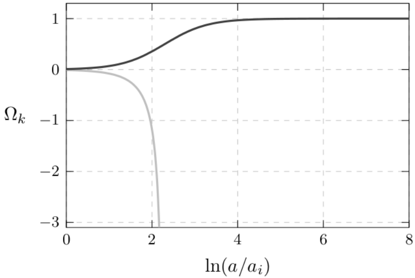

Figura: Evolução de Ω_k em universo dominado por radiação (repulsor).

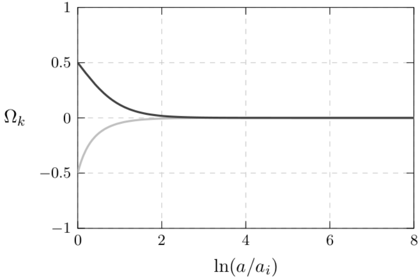

Figura: Evolução de Ω_k em universo dominado por energia do vácuo (atrator).

Resolução das Correlações de Super-Horizonte

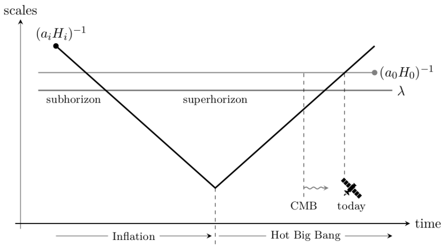

Figura: Modo de flutuação que parece super-horizonte na recombinação, mas estava dentro do horizonte durante a inflação.

Mecanismo:

1. Flutuações quânticas do campo inflaton são geradas **dentro do horizonte** durante a inflação.
2. O rápido crescimento de $a(t)$ "estica" essas flutuações para escalas super-horizonte.
3. Após a inflação, quando o modo reentra no horizonte, ele carrega as **correlações estabelecidas causalmente** durante a inflação.
4. Resultado: Flutuações coerentes em toda a escala observável, explicando a CMB e estrutura em grande escala.

Pergunta central: Quantos e-folds (N) são necessários para resolver os problemas do BBH?

Condição para resolver o problema do horizonte: O universo observável hoje (~ 14 bilhões de anos luz) deve ter cabido dentro do horizonte no início da inflação:

$$(a_0 H_0)^{-1} < (a_i H_i)^{-1} \tag{2}$$

Ferramenta: Raio de Hubble comóvel

- $(aH)^{-1}$ é o **horizonte comóvel** — critério de causalidade
- Durante a inflação: $H \approx$ constante, $a \sim e^{Ht} \Rightarrow (aH)^{-1}$ diminui
- Após a inflação: $(aH)^{-1}$ aumenta novamente

Definição: O número de e-folds (ou ”dobras exponenciais”) mede quanto o universo expandiu durante a inflação:

$$N \equiv \ln\left(\frac{a_e}{a_i}\right) \tag{3}$$

Significado físico:

- $N = 1$: expansão por fator $e \approx 2{,}7$
- $N = 60$: expansão por fator $e^{60} \approx 10^{26}$
- Cada e-fold aumenta o horizonte em uma escala de tempo H^{-1}

Por que $N \sim 60$? Para resolver o problema do horizonte observável hoje, precisamos que a região correspondente tenha estado dentro do horizonte no início da inflação. Isso requer tipicamente $N \gtrsim 60$.

Estimativa do Número Mínimo de e-folds

Considerando a transição da inflação para a fase de radiação (reaquecimento):

$$N > 60 + \ln\left(\frac{T_R}{10^{10}\ \text{GeV}}\right) \tag{4}$$

Análise:

- Para $T_R \sim 10^{10}$ GeV (reaquecimento "instantâneo"): $N > 60$
- Para $T_R \sim 10^{16}$ GeV (escala GUT): $N > 74$
- Para $T_R \sim 10^{9}$ GeV (limite do gravitino): $N > 58$

Conclusão: Tipicamente, $N \sim 50$–70 e-folds são necessários, dependendo da temperatura de reaquecimento T_R.

Nota: Temperaturas $T_R > 10^{10}$ GeV podem causar sobreprodução de gravitinos (problema cosmológico em supersimetria), favorecendo N menor ou modelos de baixa energia.

Durante a inflação, o raio de Hubble comóvel deve diminuir:

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{(aH)^2} = -\frac{1}{a}\left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right) \tag{5}$$

$$= -\frac{1}{a}(1-\epsilon) < 0 \tag{6}$$

onde definimos o **parâmetro de Hubble lentamente variável**:

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d\ln H}{dN} < 1 \tag{7}$$

Condição de inflação: $\epsilon < 1$ garante que $(aH)^{-1}$ diminui (expansão acelerada).

Fim da inflação: Quando $\epsilon \approx 1$, a expansão deixa de ser acelerada e a inflação termina.

Para que a inflação dure tempo suficiente ($N \sim 60$), ϵ deve crescer **lentamente**:

$$\eta \equiv \frac{d \ln \epsilon}{dN} = \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon} \tag{8}$$

Condição de slow-roll: $|\eta| \ll 1$

Interpretação física:

- Se $|\eta| \ll 1$, o parâmetro ϵ permanece pequeno por muitos e-folds
- Isso garante que o universo expanda exponencialmente por tempo suficiente
- Quando $|\eta| \sim 1$, ϵ cresce rapidamente e a inflação termina

Nota: Na literatura de slow-roll, $\eta_V = M_{\text{Pl}}^2 V''/V$ é o parâmetro de curvatura do potencial, relacionado à variação da inclinação do potencial.

Da equação de aceleração de Friedmann:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_{\text{Pl}}^2}(\rho + 3p) \tag{9}$$

Condição para expansão acelerada ($\ddot{a} > 0$):

$$\rho + 3p < 0 \quad \Rightarrow \quad w \equiv \frac{p}{\rho} < -\frac{1}{3} \tag{10}$$

O que tem pressão negativa?

- **Constante cosmológica (energia do vácuo):** $p = -\rho$ ($w = -1$)
- **Campo escalar com energia potencial dominante:** $p \approx -V(\phi)$ quando $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$

Conclusão: Precisamos de uma forma de matéria/energia com $w < -1/3$ para acelerar a expansão — o **campo escalar inflaton** é a candidata natural.

Considere um campo escalar ϕ (o "inflaton") com potencial $V(\phi)$, homogêneo no espaço (aproximação de fundo):

Tensor energia-momento:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \, \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial^\alpha \phi \, \partial_\alpha \phi + V(\phi) \right) \tag{11}$$

Densidade de energia e pressão:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad \text{(energia cinética + potencial)} \tag{12}$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad \text{(cinética - potencial)} \tag{13}$$

Observação crucial: Se $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, então $p \approx -V \approx -\rho$ ($w \approx -1$), satisfazendo a condição de inflação!

Equações de Friedmann

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2}\rho \tag{14}$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{\text{Pl}}^2}(\rho + p) = -\frac{\dot{\phi}^2}{2M_{\text{Pl}}^2} \tag{15}$$

Campo escalar

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \tag{16}$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \tag{17}$$

Derivação da equação de movimento

Derivando $H^2 = \rho/(3M_{\text{Pl}}^2)$:

$$2H\dot{H} = \frac{\dot{\rho}}{3M_{\text{Pl}}^2} \tag{18}$$

Com $\dot{\rho} = \dot{\phi}(\ddot{\phi} + V')$:

$$2H\left(-\frac{\dot{\phi}^2}{2M_{\text{Pl}}^2}\right) = \frac{\dot{\phi}(\ddot{\phi} + V')}{3M_{\text{Pl}}^2} \tag{19}$$

Simplificando:

$$\boxed{\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0} \tag{20}$$

$$\boxed{\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0} \tag{21}$$

Interpretação física:

- $\ddot{\phi}$: aceleração do campo (inércia)
- $3H\dot{\phi}$: termo de **atrito de Hubble** — a expansão do universo resiste ao movimento do campo
- $V'(\phi)$: força derivada do potencial (”inclinação da rampa”)

Analogia mecânica: Imagine uma bola rolando em uma rampa com atrito viscoso:

- Sem atrito ($H = 0$): oscilações em torno do mínimo do potencial
- Com atrito forte ($3H\dot{\phi} \gg \ddot{\phi}$): movimento lento, quase estacionário — **regime slow-roll**

Hipóteses slow-roll

O campo rola lentamente pelo potencial:

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \tag{22}$$

Aceleração desprezível comparada ao atrito:

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}| \tag{23}$$

Consequências:

- Energia potencial domina
- Pressão negativa $p \approx -V$
- Expansão quase-de Sitter

Equações aproximadas

Da equação de Friedmann:

$$H^2 \simeq \frac{V(\phi)}{3M_{\mathrm{Pl}}^2} \tag{24}$$

Da equação de Klein-Gordon:

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi) \tag{25}$$

Resultado fundamental:

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{M_{\mathrm{Pl}}^2 V'}{V} \cdot H \tag{26}$$

O campo evolui na direção de menor energia potencial, determinando quando a inflação termina.

Definição de ϵ (variação de H)

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\dot{\phi}^2}{2M_{\mathrm{Pl}}^2 H^2} \tag{27}$$

Usando $3H\dot{\phi} \simeq -V'$ e $H^2 \simeq V/(3M_{\mathrm{Pl}}^2)$:

$$\epsilon_V \simeq \frac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \tag{28}$$

Condição: $\epsilon_V \ll 1$ para inflação.

Definição de η (curvatura do potencial)
O segundo parâmetro mede a variação da inclinação:

$$\eta_V \equiv M_{\mathrm{Pl}}^2 \frac{V''}{V} \tag{29}$$

Condição: $|\eta_V| \ll 1$ para slow-roll prolongado.

Significado:

- $\epsilon_V \ll 1$: potencial plano (inclinação pequena)
- $|\eta_V| \ll 1$: curvatura pequena (potencial muito suave)

Nota: Na notação original do documento, $\kappa = 8\pi G = M_{\mathrm{Pl}}^{-2}$, então $\epsilon_V = \frac{1}{2\kappa}(V'/V)^2$ e $\eta_V = \frac{1}{\kappa}(V''/V)$.

Potencial caótico (monomial):

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad \text{ou} \quad V(\phi) = \lambda\phi^4 \tag{30}$$

- Inflação ocorre quando $\phi \gg M_{\mathrm{Pl}}$ (campo deslocado do mínimo)
- Termina quando $\phi \sim M_{\mathrm{Pl}}$ e $\epsilon \sim 1$
- Oscilações em torno de $\phi = 0$ após a inflação

Potencial de Starobinsky (R^2):

$$V(\phi) = \frac{3}{4}M^2M_{\mathrm{Pl}}^2\left(1 - e^{-\sqrt{2/3}\,\phi/M_{\mathrm{Pl}}}\right)^2 \tag{31}$$

- Originado da gravidade modificada $f(R) = R + R^2/(6M^2)$
- Predições em excelente acordo com observações do Planck
- Inflação ocorre no regime de plateau do potencial

Condições de término:

- Quando $\epsilon_V \approx 1$ ou $|\eta_V| \approx 1$, a aproximação slow-roll falha.
- O campo inflaton atinge a região de curvatura forte do potencial.
- Inicia-se fase de **oscilações** em torno do mínimo.

Reaquecimento:

- O inflaton **decai** em partículas do Modelo Padrão (γ, $e^{\pm}$, quarks...).
- Energia potencial $\rightarrow$ energia cinética $\rightarrow$ radiação relativística.
- Temperatura T_R marca o início do BBH padrão.

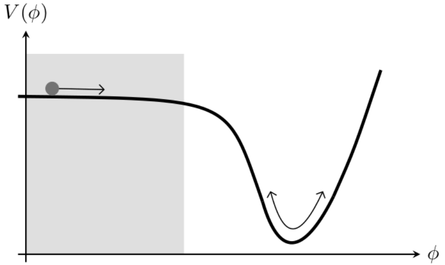

Figura: Potencial típico de slow-roll. Inflação na região plana (sombreada), reaquecimento nas oscilações.

Escala de temperatura: $T_R \sim 10^9$–10^{16} GeV, dependendo do acoplamento do inflaton à matéria ordinária.

Resumo: Como a Inflação Resolve Tudo

Problema	**Antes (BBH padrão)**	**Depois (com Inflação)**
Horizonte	Regiões desconectadas, mesma temperatura?	Todas as regiões na CMB causalmente conectadas
Planicidade	Ω_k diverge, ajuste fino 10^{-60}	$\Omega_k \to 0$ exponencialmente, plano é atrator natural
Estruturas	Sem origem para flutuações primordiais	Flutuações quânticas esticadas para escalas cosmológicas

Previsões adicionais da inflação:

- Espectro de potência aproximadamente escalar: $P(k) \sim k^{n_s-1}$ com $n_s \approx 0{,}96$ (observado!)
- Ondas gravitacionais primordiais (amplitude r, ainda não detectadas)
- Não-gaussianidades sutis no CMB (testes de modelos específicos)