Unidades e Constantes

$1\ \mathrm{u} = 1.660538921 \cdot 10^{-27}$ kg
$1\ \mathrm{eV} = 1.602177 \cdot 10^{-19}$ J
$1\ \mathrm{AU} = 1.49598 \cdot 10^{11}$ m
$1\ \mathrm{ly} = 9.46073 \cdot 10^{15}$ m
$1\ \mathrm{pc} = 2.062648 \cdot 10^{5}\ \mathrm{AU} = 3.26156\ \mathrm{ly} = 3.0856776 \cdot 10^{16}$ m
$1\ M_\odot = 1.989 \cdot 10^{30}$ kg
$\pi = 3.14159$
$e = 2.71828$
Constante gravitacional: $G = 6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$
Permissividade do vácuo: $\epsilon_0 = 8.85419 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
Permeabilidade do vácuo: $\mu_0 = 1.2566 \cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$
Velocidade da luz no vácuo: $c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.9979 \cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Massa do elétron: $m_\mathrm{e} = 9.10939 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} = 0.0005486\ \mathrm{u} = 511.0\ \frac{\mathrm{keV}}{c^2}$
Massa do próton: $m_\mathrm{p} = 1.6726 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1.007276\ \mathrm{u} = 938.27\ \frac{\mathrm{MeV}}{c^2}$
Massa do néutron: $m_\mathrm{n} = 1.6749 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1.0087\ \mathrm{u} = 939.57\ \frac{\mathrm{MeV}}{c^2}$
Carga elementar: $e = 1.602177 \cdot 10^{-19}$ C
Constante de Planck: $h = 6.626076 \cdot 10^{-34}$ Js
Constante de Planck reduzida: $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05457 \cdot 10^{-34}$ Js
Constante de Boltzmann: $k_\mathrm{B} = 1.38065 \cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$
Constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5.6704 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}^4}$
Energia de Bohr: $E_0 = \frac{m_\mathrm{e} e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} = 2,18 \cdot 10^{-18}$ J
Outros dados do Sol: $R_\odot = 696342$ km, $T_{\mathrm{ef},\odot} = 5777$ K, $L_\odot = 3.9 \cdot 10^{26}$ W, $m_{V,\odot} = -26.74$
Dados da Terra: $M_\oplus = 5.97237 \cdot 10^{24}$ kg, $R_\oplus = 6371$ km
Parâmetros cosmológicos
Constante de Hubble: $H_0 = 67.7\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{Mpc}}$
Tempo de Hubble: $t_\mathrm{H} = H_0^{-1} = 13.8 \cdot 10^9$ anos
Idade do Universo: $t_0 = 13.8 \cdot 10^9$ anos
Densidade crítica hoje: $\rho_{\mathrm{c},0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 8.63 \cdot 10^{-27}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
Densidade da matéria hoje: $\rho_{\mathrm{m},0} = 2.66 \cdot 10^{-27}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ ou $\Omega_{\mathrm{m},0} = 0.31$
Densidade da matéria bariônica hoje: $\rho_{\mathrm{b},0} = 4.2 \cdot 10^{-28}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ ou $\Omega_{\mathrm{b},0} = 0.05$
Densidade da componente relativística hoje: $\rho_{\mathrm{rel},0} = 7.85 \cdot 10^{-31}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ ou $\Omega_{\mathrm{rel},0} = 9.1 \cdot 10^{-5}$
Densidade da Energia Escura hoje: $\rho_{\Lambda,0} = 5.96 \cdot 10^{-27}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ ou $\Omega_{\Lambda,0} = 0.69$
Parâmetro de desaceleração hoje: $q_0 = -0.54$
Tempo universal do desacoplamento dos fótons (recombinação): $t_\mathrm{desac} = 378'000$ anos
Redshift do desacoplamento dos fótons: $z_\mathrm{desac} = 1089 \pm 1$
Temperatura atual da Radiação Cósmica de Fundo: $T_0 = 2.725$ K
Temperatura no desacoplamento dos fótons: $T_\mathrm{desac} = T_0(1 + z_\mathrm{desac}) = 2970$ K

Lembrete de Fórmulas Úteis

1^a Lei de Kepler: Os planetas descrevem órbitas elípticas, o Sol em um dos focos
2^a Lei de Kepler: Se $t_1 = t_2$, então $A_1 = A_2$
3^a Lei de Kepler: $T^2 = k \cdot a^3$, onde $T =$ período orbital, $k = 1\ \frac{\text{ano}^2}{\text{AU}^3}$
1^a Lei de Newton: Se $F = 0$, então $v =$ constante
2^a Lei de Newton: $\vec{F}_{\text{tot}} = m \cdot \vec{a}$
3^a Lei de Newton: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
Lei da gravitação: $F = G \cdot \frac{Mm}{r^2}$, vetorial: $\vec{F} = -G \cdot \frac{Mm}{r^2}\hat{r} = -G \cdot \frac{Mm}{r^3}\vec{r}$
Energia potencial gravitacional: $U = -G \cdot \frac{Mm}{r}$
Energia cinética: $K = \frac{mv^2}{2}$
Velocidade de escape: $v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$
Teorema da Casca Esférica: $F(r) = G \cdot \frac{M_r m}{r^2}$, onde $M_r = \int_0^r dM = \int_0^r \rho dV = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$
Teorema do Virial: $-2\langle K\rangle = \langle U\rangle$, ou $\langle E\rangle = \langle K\rangle + \langle U\rangle = \frac{1}{2}\langle U\rangle$
Fluxo da luz de uma estrela com luminosidade L na distância d: $F = \frac{L}{4\pi d^2}$
Magnitude aparente: $m = -2.5\log_{10}\frac{F}{F_0} = -2.5\log_{10} F + C = -2.5\log_{10}\frac{L}{4\pi d^2} + C$,
onde $C = 2.5\log_{10} F_0$
Magnitude absoluta: $M = -2.5\log_{10}\frac{L}{4\pi(10\ \text{pc})^2} + C$
Módulo de distância: $m - M$ ou $(m-M)_0 = 5\log_{10}\frac{d}{10\ \text{pc}} = 5\log_{10} d[\text{pc}] - 5$
Fluxo bolométrico: $F_{\text{bol}} = \int_0^\infty F_\lambda\, d\lambda$
Fluxo na banda X (função de sensitividade S_X): $F_X = \int_0^\infty S_X \cdot F_\lambda\, d\lambda$
Correção bolométrica: $BC_X := m_{\text{bol}} - m_X = M_{\text{bol}} - M_X = -2.5\log_{10}\frac{F_{\text{bol}}}{F_X} + C_{\text{bol}} - C_X$
Cores: $B - V := m_B - m_V = -2.5\log_{10}\frac{\int S_B \cdot F_\lambda d\lambda}{\int S_V \cdot F_\lambda d\lambda} + C_{B-V}, = -2.5\log_{10}\frac{F_B}{F_V} + C_{B-V}$,
onde $C_{B-V} = C_B - C_V$
Extinção interestelar: $m_X = M_X + 5\log_{10} d[\text{pc}] - 5 + A_X$,
onde $A_X = -2.5\log_{10}\frac{F_X}{F_{X,0}}$, $F_{X,0} := \frac{L_X}{4\pi d^2}$
Módulo de distância em X: $(m-M)_X := m_X - M_X = (m-M)_0 + A_X$
Avermelhamento: $E_{B-V} = E(B-V) := (B-V) - (B-V)_0 = (m_B - m_V) - (M_B - M_V)$
$= A_B - A_V$, onde $(B-V)_0 = M_B - M_V$ é a cor intrínseca
Relações de de Broglie: $E = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda}, \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h \cdot \nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$
Pressão de Radiação: $P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} \cdot aT^4$, onde $a = 7.56767 \cdot 10^{-16}\ \text{J}\,\text{m}^{-3}\,\text{K}^{-4}$
Lei de deslocamento de Wien: $\lambda_{\text{max}} T = 2,898 \cdot 10^{-3}$ mK
Lei de Stefan-Boltzmann: $P/A = \sigma \cdot T^4$
Níveis de energia do átomo de hidrogênio: $E_n = -\frac{1}{n^2} \cdot E_0$
Limite de Eddington: $L_{\text{Ed}} = \frac{4\pi G M m_{\text{p}} c}{\sigma_{\text{T}}} = \frac{4\pi G M c}{\bar{\kappa}}$, onde $\sigma_{\text{T}} =$ seção de choque Thomson
do elétron, $\bar{\kappa} = \frac{\sigma_{\text{T}}}{m_{\text{p}}} =$ opacidade do material acretado
Estrelas binárias (massas M_1 e M_2, velocidade angular ω):
Potencial num ponto a s_1 de M_1, a s_2 de M_2 e a r do eixo: $\Phi = -G(\frac{M_1}{s_1} + \frac{M_2}{s_2}) - \frac{1}{2}\omega^2 r^2$
Pontos lagrangianos: $\nabla\Phi = 0$
Relação Tully-Fisher: Sa: $M_B = -9.95 \cdot \log_{10} v_{\text{max}}[\text{km/s}] + 3.15$,
Sb: $M_B = -10.2 \cdot \log_{10} v_{\text{max}}[\text{km/s}] + 2.71$, Sc: $M_B = -11.0 \cdot \log_{10} v_{\text{max}}[\text{km/s}] + 3.31$
Relação Faber-Jackson: $L \propto \sigma_0^4$ ou $\log_{10}\sigma_0 = 0.1 \cdot M_B + \text{const.}$

Cosmologia Newtoniana

Tempo universal hoje: t_0
Lookback time: $t_{\mathrm{L}}(z) = t_0 - t(z)$
redshift: $\lambda = (1+z)\lambda_0$
para $z \ll 1$: $v = cz$
Dilatação cosmológica do tempo: $\frac{\Delta t_0}{\Delta t_{\mathrm{e}}} = 1+z$
Fator de escala: $R = (1+z)^{-1}$, hoje: $R(t_0) = 1$
Parâmetro de Hubble: $H(t) = \frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt}$, hoje H_0
Lei de Hubble-leMaître hoje: $v = H_0 d$, para $z \leq 0.13$
até $z \sim 2$: $d \simeq \frac{c}{H_0}\frac{(z+1)^2-1}{(z+1)^2+1}$
Distância de coordenada: $r(t)$
Coordenada comovente: $\varpi = r(t_0)$
Volumes: $V(t) = R(t)^3 V_0$
Equação de estado: $P = wu = w\rho c^2$, onde $P =$ pressão, $u =$ densidade de energia
$R^{3(1+w)}\rho = \text{const.} = \rho_0$
$\rho_{\mathrm{mat}} =$ densidade de matéria,
$w_{\mathrm{mat}} = 0 \Leftrightarrow P_{\mathrm{mat}} = 0$
$\rho_{\mathrm{mat}}(z) = (1+z)^3\rho_{\mathrm{mat},0} = R^{-3}\rho_{\mathrm{mat},0}$,
$\rho_{\mathrm{rad}} = u_{\mathrm{rad}}/c^2 =$ densidade de radiação,
$w_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P_{\mathrm{rad}} = \frac{\rho_{\mathrm{rad}}c^2}{3} = \frac{u_{\mathrm{rad}}}{3}$
$\rho_{\mathrm{rad}}(z) = (1+z)^4\rho_{\mathrm{rad},0} = R^{-4}\rho_{\mathrm{rad},0}$
$\rho_{\mathrm{c}} = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$ densidade crítica, hoje $\rho_{\mathrm{c},0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$
Parâmetro de densidade (componente X): $\Omega_X(t) = \rho_X(t)/\rho_{\mathrm{c}}(t)$,
hoje $\Omega_{X,0} = \rho_{X,0}/\rho_{\mathrm{c},0}$
Variações da equação de Friedmann:
$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho\right]R^2 = -kc^2$$
$$\left[H^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho\right]R^2 = -kc^2$$
$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8\pi G\rho_0}{3R} = -kc^2$$
$$H^2(t)[1-\Omega(t)]R^2(t) = -kc^2$$
$k = 0$: Universo plano; $k > 0$: fechado, $k < 0$: aberto
Equação de fluido (ou 1ª lei da termodinâmica): $\frac{d(R^3\rho)}{dt} = -\frac{P}{c^2}\cdot\frac{d(R^3)}{dt}$
Equação de aceleração: $\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + \frac{3P}{c^2})R = -\frac{4}{3}\pi G\cdot\Sigma_i(1+3w_i)\rho_i\cdot R$, $i =$ mat, rad
Parâmetro de desaceleração:
$$q(t) \equiv -\frac{R(t)[d^2R(t)/dt^2]}{[dR(t)/dt]^2} = \frac{1}{2}\Sigma_i(1+3w_i)\Omega_i(t) = 0.5\cdot\Omega_{\mathrm{mat}}(t) + \Omega_{\mathrm{rad}}(t)$$
hoje $q_0 = 0.5\cdot\Omega_{\mathrm{mat},0} + \Omega_{\mathrm{rad},0}$

Universo só de matéria:
evolução de Ω: $\Omega = 1 + \frac{\Omega_{\mathrm{mat},0}-1}{1+\Omega_{\mathrm{mat},0}\cdot z}$
Universo plano ($k=0$) só de matéria ($\rho_{\mathrm{mat}}(t) = \rho_{\mathrm{c}}(t)$):
$R_{\mathrm{plano}}(t) = (6\pi G \rho_{\mathrm{c},0})^{1/3} t^{2/3} = (3/2)^{2/3} (t/t_{\mathrm{H}})^{2/3} = (t/t_{\mathrm{plano},0})^{2/3}$,
$\rho_{\mathrm{mat}}(t) \propto t^{-2}$
$\frac{t_{\mathrm{plano}}(z)}{t_{\mathrm{H}}} = \frac{2}{3(1+z)^{3/2}}$
idade do Universo: $t_{plano,0} = 2/3 \cdot t_{\mathrm{H}}$
Lookback time: $\frac{t_{\mathrm{L}}(z)}{t_{\mathrm{H}}} = \frac{2}{3} \cdot \left[1 - (1+z)^{-3/2}\right]$
Universo só de radiação:
$R(t) \propto t^{1/2}$,
$\rho_{\mathrm{rad}}(t) \propto t^{-2}$,
$T(t) \propto t^{-1/2}$

Relatividade Restrita

Transformação de Lorentz (S' movimentando-se com $\vec{u} = (u,0,0)$ em relação a S):
$x' = \gamma(x - ut)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \gamma(t - \frac{ux}{c^2})$,
onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$ fator de Lorentz, e $\beta = \frac{u}{c}$
Dilatação do tempo: $\Delta t = \gamma \Delta t' \geq \Delta t'$, t' sendo o tempo próprio
Contração de comprimentos: $L = \gamma^{-1} L' \leq L'$, L' sendo o comprimento próprio
Transformação de Lorentz de velocidades:
$v'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{v_x - u}{1-uv_x/c^2}$, $v'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{v_y}{\gamma(1-uv_x/c^2)}$ $v'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{v_z}{\gamma(1-uv_x/c^2)}$
Efeito Doppler pra luz: $\nu_{\mathrm{obs}} = \nu_0 \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+u_{\mathrm{r}}/c}$,
onde u_{r} é a velocidade de afastamento radial entre fonte e observador
Efeito Doppler radial ($u_{\mathrm{r}} = u$, $u_{\mathrm{t}} = 0$): $\nu_{\mathrm{obs}} = \nu_0 \sqrt{\frac{1-u_{\mathrm{r}}/c}{1+u_{\mathrm{r}}/c}}$,
Efeito Doppler transversal ($u_{\mathrm{t}} = u$, $u_{\mathrm{r}} = 0$): $\nu_{\mathrm{obs}} = \nu_0 \sqrt{1 - u_{\mathrm{t}}^2/c^2}$
Ângulo φ da radiação Tcherenkov em relação à velocidade $\vec{v}$ de uma partícula viajando dentro de um meio com índice refratório n: $v = \frac{c}{n\cos\varphi}$
Momento linear relativístico: $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$
Energia relativística: $E = \gamma mc^2 = E_0 + K$, onde $E_0 = mc^2$, $K = (\gamma - 1)mc^2$
Fórmula útil: $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$
Intervalo no espaço-tempo (de Minkovskij): $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$
Métrica: $(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (cdt)^2 - (dr)^2 - (r \cdot d\theta)^2 - (r \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot d\varphi)^2$

Radiação Cósmica de Fundo I

Função de partição: $Z = \Sigma_{j=1}^{\infty} g_j e^{-(E_j - E_1)/k_{\mathrm{B}}T}$
Equação de Saha: $\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2Z_{i+1}}{n_{\mathrm{e}} Z_i} \left(\frac{2\pi m_{\mathrm{e}} k_{\mathrm{B}} T}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi_i/k_{\mathrm{B}}T}$
Momento Dipolo da Radiação de Fundo: $T_{\mathrm{mov}} = \frac{T_{\mathrm{rep}}\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-(v/c)\cos\theta} \simeq T_{\mathrm{rep}} \left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta\right)$

Evolução de Estruturas em Grande Escala

$d_{\mathrm{h}}(t) = R(t)\int_0^t \frac{c}{R(t')}dt'$

Na Era da radiação: $d_{\mathrm{h}}(t) = 2ct$, na Era da matéria: $d_{\mathrm{h}}(t) = 3ct$

Massa de Jeans: $M_{\mathrm{J}} \simeq \left(\frac{5k_{\mathrm{B}}T}{G\mu m_{\mathrm{H}}}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho_{\mathrm{b}}}\right)^{1/2}$

Raio de Jeans: $R_{\mathrm{J}} \simeq \sqrt{\frac{15k_{\mathrm{B}}T}{4\pi G\mu m_{\mathrm{H}}\rho_{\mathrm{b}}}}$

Percurso livre médio: $l = \frac{1}{n\sigma}$

Distância média percorrida após N choques: $d = \sqrt{N}\cdot l = \sqrt{\frac{vt}{n\sigma}}$

Densidade relativa de uma sobredensidade: $\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\rho'-\rho}{\rho} = \frac{3kc^2}{8\pi G\rho R^2}$