Relatividade Geral

Mudança da frequência de um fóton percorrendo a diferença de altura Δh dentro de um campo gravitacional homogêneo g: $\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -\frac{g\Delta h}{c^2}$
Num potencial esférico $\Phi = -\frac{GM}{r}$ $(r > r_0)$: $\frac{\nu_\infty}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0 c^2}} \approx^* 1 - \frac{GM}{r_0 c^2}$
redshift gravitacional: $z = \frac{\lambda_\infty - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\nu_0}{\nu_\infty} - 1 = (1 - \frac{2GM}{r_0 c^2})^{-1/2} - 1 \approx^* \frac{GM}{r_0 c^2}$
dilatação gravitacional do tempo $\frac{\Delta t_0}{\Delta t_\infty} = \frac{\nu_\infty}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0 c^2}} \approx^* 1 - \frac{GM}{r_0 c^2}$
*para um campo fraco
Equação de campo de Einstein: $8\pi G T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$,
onde $T_{\mu\nu}$ = tensor energia-momento, $g_{\mu\nu}$ = tensor métrico (de Robertson-Walker),
$G_{\mu\nu}$ = tensor da curvatura,
R = escalar de curvatura de Ricci e $R_{\mu\nu}$ = tensor de curvatura de Ricci
Desvio de luz passando rente ao Sol: $\Delta\varphi = \frac{4GM_\odot}{c^2 R_\odot} = 1.74$”
Métrica de Schwarzschild: $(ds)^2 = (1 - \frac{R_\mathrm{S}}{r})(cdt)^2 - (1 - \frac{R_\mathrm{S}}{r})^{-1} dr^2 - (r \cdot d\theta)^2 - (r \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot d\varphi)^2$,
onde $R_\mathrm{S} = \frac{2GM}{c^2}$ = raio de Schwarzschild
Raio de Einstein: $\theta_\mathrm{E} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{D_\mathrm{LS}}{D_\mathrm{S} D_\mathrm{L}}}$, onde D_S = distância observador-fonte,
D_L = distância observador-lente e D_LS = distância lente-fonte
Potencial da Energia Escura: $U_\Lambda = -\frac{1}{6} \cdot \Lambda m c^2 r^2$
Força da Energia Escura: $F_\Lambda = \frac{1}{3} \cdot \Lambda m c^2 r$

Cosmologia Relativística

Tempo universal hoje: t_0
Lookback time: $t_\mathrm{L}(z) = t_0 - t(z)$
redshift: $\lambda = (1+z)\lambda_0$
para $z \ll 1$: $v = cz$
Dilatação cosmológica do tempo: $\frac{\Delta t_0}{\Delta t_\mathrm{e}} = 1 + z$
Fator de escala: $R = (1+z)^{-1}$, hoje: $R(t_0) = 1$
Parâmetro de Hubble: $H(t) = \frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt}$, hoje H_0
Lei de Hubble: $v = H_0 d$, para $z \leq 0.13$
até $z \sim 2$: $d \simeq \frac{c}{H_0}\frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1}$
Lei de Hubble dependente do tempo: $v(t) = H(t) \cdot r(t) = H(t) R(t) \cdot d_{\mathrm{p},0}$,
Curvatura do Espaço: $K(t) := 1/r^2(t) = \frac{k}{R^2(t)}$,
$r(t)$ = raio da curvatura, hoje $K(t_0) = k$:
$k = 0$: plano; $k > 0$: fechado, $k < 0$: aberto

Métrica de Robertson-Walker: $(ds)^2 = (cdt)^2 - (d\ell(t))^2$

$= (cdt)^2 - R^2(t) \cdot \left[\left(\frac{d\varpi}{\sqrt{1-k\varpi^2}} \right)^2 + (\varpi \cdot d\theta)^2 + (\varpi \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot d\phi)^2 \right]$,

onde ϖ é a coordenada comovente

$\rho_{\rm m}$ = densidade de matéria,

$w_{\rm m} = 0 \;\Leftrightarrow$ pressão: $P_{\rm m} = 0$

$\rho_{\rm b}$ = densidade de matéria bariônica,

$\rho_{\rm rel} = u_{\rm rel}/c^2$ = densidade de componentes relativísticos,

$w_{\rm rel} = \frac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; P_{\rm rel} = \frac{\rho_{\rm rel}c^2}{3} = \frac{u_{\rm rel}}{3}$

$\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G$ = densidade de Energia Escura.

$w_\Lambda = -1 \;\Leftrightarrow\; P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$

$\rho_{\rm c} = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$ densidade crítica, hoje $\rho_{\rm c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$

Parâmetro de densidade (componente X): $\Omega_X(t) = \rho_X(t)/\rho_{\rm c}(t)$,

hoje $\Omega_{X,0} = \rho_{X,0}/\rho_{\rm c,0}$

Parâmetro de densidade total: $\Omega(t) \equiv \Omega_{\rm m}(t) + \Omega_{\rm rel}(t) + \Omega_\Lambda(t)$,

hoje $\Omega_0 = \Omega_{\rm m,0} + \Omega_{\rm rel,0} + \Omega_{\Lambda,0}$

Variações da equação de Friedmann:

$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{1}{3}\Lambda c^2 \right] R^2 = -kc^2$$

$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{8}{3}\pi G(\rho_{\rm m} + \rho_{\rm rel} + \rho_\Lambda) \right] R^2 = -kc^2$$

$$H^2(t)[1 - (\Omega_{\rm m}(t) + \Omega_{\rm rel}(t) + \Omega_\Lambda(t))]R^2(t) = H^2(t)[1 - \Omega(t)]R^2(t) = -kc^2$$

$$H_0^2[1 - (\Omega_{\rm m,0} + \Omega_{\rm r,0} + \Omega_{\Lambda,0})] = H_0^2[1 - \Omega_0] = -kc^2$$

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{\rm m,0}}{R} + \frac{\Omega_{\rm rel,0}}{R^2} + \Omega_{\Lambda,0}R^2 + 1 - \Omega_{\rm m,0} - \Omega_{\rm rel,0} - \Omega_{\Lambda,0} \right)$$

$$H(z) = H_0(1+z) \left[\Omega_{\rm m,0}(1+z) + \Omega_{\rm rel,0}(1+z)^2 + \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{(1+z)^2} + 1 - \Omega_0 \right]^{1/2}$$

Equação de fluido (ou 1^a lei da termodinâmica): $\frac{R^3\rho}{dt} = -\frac{P}{c^2} \cdot \frac{R^3}{dt}$

$\Rightarrow\; R^{3(1+w)}\rho = \text{const.} = \rho_0$

$\rho_{\rm m}(z) = (1+z)^3\rho_{\rm m,0} = R^{-3}\rho_{\rm m,0}$,

$\rho_{\rm rel}(z) = (1+z)^4\rho_{\rm rel,0} = R^{-4}\rho_{\rm rel,0}$

$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0} = \Lambda c^2/8\pi G = \text{const.}$

temperatura: $T = R^{-1}T_0 = (1+z) \cdot T_0$

Equação de aceleração: $\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + \frac{3P}{c^2})R = \{-\frac{4}{3}\pi G \left[\rho_{\rm m} + \rho_{\rm rel} + \rho_\Lambda + \frac{3(P_{\rm m} + P_{\rm rel} + P_\Lambda)}{c^2} \right]\}R$

$= -\frac{4}{3}\pi G \cdot \Sigma_i(1 + 3w_i)\rho_i \cdot R$

Parâmetro de desaceleração: $q(t) \equiv -\frac{R(t)[d^2R(t)/dt^2]}{[dR(t)/dt]^2} = \frac{1}{2}\Sigma_i(1 + 3w_i)\Omega_i(t)$

$= 0.5 \cdot \Omega_{\rm m}(t) + \Omega_{\rm rel}(t) - \Omega_\Lambda(t)$

hoje $q_0 = 0.5 \cdot \Omega_{\rm m,0} + \Omega_{\rm rel,0} - \Omega_{\Lambda,0}$

Distância de percurso da luz: $t_{\mathrm{L}}c$
Distância própria entre um objeto e a Terra: $d_{\mathrm{p}}(t) = R(t) \cdot d_{\mathrm{p},0} = \frac{d_{\mathrm{p},0}}{1+z}$,
hoje: $d_{\mathrm{p},0} = d_{\mathrm{p}}(t_0) = \int_t^{t_0} \frac{cdt'}{R(t')}$ distância comovente
para um Universo plano ($k = 0$):$d_{\mathrm{p},0} = \varpi$
para um Universo plano de matéria: $d_{\mathrm{p},0} = 3ct_0 \left(1 - \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/3}\right) = 3ct_0 - 3ct_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/3}$
Distância de luminosidade: $d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}$
para um Universo plano: $d_L = (1+z) \cdot d_{\mathrm{p},0}$
Distância de diâmetro angular: $d_A \equiv \frac{D}{\theta} = \frac{\varpi}{1+z} = \frac{d_L}{(1+z)^2}$
para um Universo plano: $d_A = \frac{d_{\mathrm{p},0}}{1+z} = d_{\mathrm{p}}(t)$
Distância de horizonte: $d_h(t) = R(t) \int_0^t \frac{c}{R(t')} dt'$

Universo plano ($k = 0$) só de matéria ($\rho_{\mathrm{m}}(t) = \rho_{\mathrm{c}}(t)$, $\rho_{\mathrm{rel}}(t) = \rho_\Lambda(t) = 0$):
$R_{\mathrm{plano}}(t) = (6\pi G \rho_{\mathrm{c},0})^{1/3} t^{2/3} = (3/2)^{2/3} (t/t_{\mathrm{H}})^{2/3} = (t/t_{\mathrm{plano},0})^{2/3}$,
$\rho_{\mathrm{m}}(t) \propto t^{-2}$
$T(t) \propto t^{-2/3}$
idade do Universo: $t_{plano,0} = 2/3 \cdot t_{\mathrm{H}}$
evolução de Ω: $\Omega = 1 + \frac{\Omega_0 - 1}{1 + \Omega_0 z}$
Universo dominado por matéria:
$R(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\mathrm{m},0}}\right)^{2/3} = \left(\frac{3\sqrt{\Omega_{\mathrm{m},0}}}{2}\right)^{2/3} (t/t_{\mathrm{H}})^{2/3}$,
$d_{\mathrm{h}} = 3ct = \frac{2c}{H_0 \sqrt{\Omega_{\mathrm{m},0}}} \frac{1}{(1+z)^{3/2}}$
evolução de Ω: $\Omega = 1 + \frac{\Omega_0 - 1}{1 + \Omega_{\mathrm{m},0} z}$
Universo só de componentes relativísticos ($\rho_{\mathrm{m}}(t) = \rho_\Lambda(t) = 0$):
$R(t) \propto t^{1/2}$,
$\rho_{\mathrm{rel}}(t) \propto t^{-2}$,
$T(t) \propto t^{-1/2}$
$d_{\mathrm{h}}(t) = 2ct$
evolução de Ω: $\Omega = 1 + \frac{\Omega_0 - 1}{1 + \Omega_{\mathrm{rel},0}(2z + z^2)}$
Universo de Energia Escura ($\rho_{\mathrm{m}}(t) = \rho_{\mathrm{rel}}(t) = 0$):
$R(t) \simeq \left(\frac{\Omega_{\mathrm{m},0}}{4\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3} e^{H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}$
$d_{\mathrm{h}} \propto e^{H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}$

Nucleossíntese Promordial

Distribuição de Maxwell-Boltzmann: $n_E dE = \frac{2n}{\pi^{1/2}} \frac{1}{k_B T^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/k_B T} dE$
As 12 reações involvidas ($^1\text{H} = p^+$, $^2\text{H} = d$, $^3\text{H} = t$, $^4\text{He} = \alpha$):

1. $n \longrightarrow {}^1\text{H} + e^- + \bar{\nu}_e$ (decaimento β)
2. $^1\text{H} + n \longrightarrow {}^2\text{H} + \gamma$
3. $^2\text{H} + {}^1\text{H} \longrightarrow {}^3\text{He} + \gamma$
4. $^2\text{H} + {}^2\text{H} \longrightarrow {}^3\text{He} + n$
5. $^2\text{H} + {}^2\text{H} \longrightarrow {}^3\text{H} + {}^1\text{H}$
6. $^2\text{H} + {}^3\text{H} \longrightarrow {}^4\text{He} + n$
7. $^3\text{H} + {}^4\text{He} \longrightarrow {}^7\text{Li} + \gamma$
8. $^3\text{He} + n \longrightarrow {}^3\text{H} + {}^1\text{H}$
9. $^3\text{He} + {}^2\text{H} \longrightarrow {}^4\text{He} + {}^1\text{H}$
10. $^3\text{He} + {}^4\text{He} \longrightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$
11. $^7\text{Li} + {}^1\text{H} \longrightarrow {}^4\text{He} + {}^4\text{He}$
12. $^7\text{Be} + n \longrightarrow {}^7\text{Li} + {}^1\text{H}$

Sequências mais eficientes: 2-4-9 e 2-5-6
Composição de gás primordial: ^1H: $\sim 76\%$, ^4He: 23 a 24%, $^2\text{H} \sim 0.01\%$, Li $< 0.01\%$

Radiação Cósmica de Fundo

Função de partição: $Z = \Sigma_{j=1}^{\infty} g_j e^{-(E_j - E_1)/k_B T}$
Equação de Saha: $\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2Z_{i+1}}{n_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi_i/k_B T}$
Momento Dipolo da Radiação de Fundo: $T_{\text{mov}} = \frac{T_{\text{rep}}\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-(v/c)\cos\theta} \simeq T_{\text{rep}}\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta\right)$
Velocidade do som no Universo jovem: $v_s = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}} = \frac{c}{\sqrt{3}}$
Horizonte sonoro: $d_s(t) = ct\sqrt{3} = \frac{d_h(t)}{\sqrt{3}}$

Inflação Cosmológica

Fator de escala antes ($t < t_i$), durante ($t_i < t < t_f$) e depois ($t > t_f$) da inflação:
$R(t) = R_i\sqrt{\frac{t}{t_i}}; \quad R_i e^{H_i(t-t_i)}; \quad R_i e^{H_i(t_f - t_i)}\sqrt{\frac{t}{t_f}}$
Falso vácuo: $u_{fv} = \rho_{fv} c^2, \quad w_{fv} = -1 \Leftrightarrow P_{fv} = -u_{fv} = -\rho_{fv} c^2$

Modelos Alternativos

MOND: $F = \frac{GMm}{\mu r^2}$, onde $\mu = \frac{1}{1+a_0/a}$ ou $\sqrt{\frac{1}{1+(a_0/a)^2}}$, $a_0 \simeq 1.2 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$