

Introdução à Cosmologia - 2017.3

Lista 2: Cosmologia Relativística, ...

1. Suponha que a Terra fosse uma esfera perfeita de raio $R_{\oplus} = 6371$ km. Se você desenhasse um círculo perfeito de raio $D = 100$ m na superfície da Terra, qual discrepância você acharia entre os valores esperado (supondo uma superfície plana) e medido da circunferência do círculo?
2. Suponha que toda a matéria do Universo fosse convertida em energia na forma de radiação de corpo negro. Use a densidade de matéria bariônica determinada a partir dos dados do satélite Planck, $\rho_{b,0} = 4.2 \cdot 10^{-28}$ kg m⁻³. A qual temperatura cooresponde esta radiação de corpo negro? Em que comprimento de onda ficaria o pico do espectro, e em que região do espectro eletromagnético se encontra este comprimento de onda? (Lembrete sobre a radiação de corpo negro: densidade de energia: $u = \alpha T^4$, onde $\alpha = 7.566 \cdot 10^{-16}$ J m⁻³ K⁻⁴; Lei de Wien sobre o comprimento de onda do máximo do espectro: $\lambda_{\max} = \text{const}/T$, onde $\text{const} = 2.89 \cdot 10^{-3}$ m K.)
3. Inserindo a equação de estado $P = w\rho c^2$ na equação de fluido, mostre que

$$R^{3(1+w)}\rho = \text{const} = \rho_0$$

onde ρ_0 é o valor atual de ρ .

4. Calcule as densidades da matéria, dos componentes relativísticos (fótons e neutrinos) e da Energia Escura na época da Recombinação, $z = 1089$.
5. Encontre os redshifts de transição entre as eras de radiação e da matéria, $z_{\text{rel,m}}$, e entre as eras de matéria e Λ , $z_{\text{m},\Lambda}$. (Dica: São os redshifts para os quais as densidades da radiação e da matéria, ρ_{rel} e ρ_{m} , respectivamente, e as da matéria e da Energia Escura, ρ_{m} e ρ_{Λ} , respectivamente, são iguais.)

6. Mostre que, nos casos extremos $t \ll t_H$ e $t \gg t_H$, a fórmula da evolução de $R(t)$ num Universo de matéria e Energia Escura:

$$R(t) = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{4\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \left(e^{3H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}/2}} - e^{-3H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}/2}} \right)^{2/3}$$

$$= \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} \right)$$

pode ser aproximada por

$$t \ll t_H : R(t) \simeq \left(\frac{3\sqrt{\Omega_{m,0}}}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{t}{t_H} \right)^{2/3}$$

respectivamente

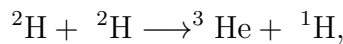
$$t \gg t_H : R(t) \simeq \left(\frac{\Omega_{m,0}}{4\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} e^{H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}$$

7. Ainda num Universo de matéria e Energia Escura, mostre, que a aceleração da expansão do Universo mudou de sinal, quando o fator de escala teve o valor

$$R_{\text{acel}} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{2\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3}$$

Dica: É possível mostrar isto usando a fórmula dada na pergunta anterior, mas é mais fácil usando a equação de aceleração.

8. Mostre, num Universo apenas de matéria, com $R(t) \propto t^{2/3}$, que a distância de horizonte é $d_h(t) = 3ct$.
9. Supondo que o alcance da força forte é $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$, Calcule a barreira de Coulomb para a reação



importante na criação do hélio primordial (no. 5 no esquema).

Em que temperatura as partículas têm esta energia em média?

A temperatura do Universo estava acima deste valor por quanto tempo, usando a aproximação. $T = 1.33 \cdot 10^{10} \text{ K s}^{1/2} \cdot t^{-1/2}$?

Se você acertou esta última pergunta, deve ter obtido um tempo curto demais para explicar toda a produção do hélio primordial. Por que a verdadeira produção foi mais alta?

10. Por que surge um neutrino no decaimento β :

$$n \longrightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e ?$$

11. Use a fórmula para o efeito Doppler para a luz para derivar a fórmula que dá a temperatura da radiação cósmica de fundo medida por um observador com velocidade peculiar \vec{v} na direção fazendo um ângulo θ com \vec{v} (T_{rep} é a temperatura da radiação no seu referencial de repouso):

$$T_{\text{mov}} = \frac{T_{\text{rep}} \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c) \cos \theta}$$

Mostre que, para para $v \ll c$, ela pode ser aproximada por

$$T_{\text{mov}} \simeq T_{\text{rep}} \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right)$$

12. Estime a massa de matéria bariônica dentro de uma estrutura típica na época da recombinação, i. e. de uma região esférica, cujo diâmetro corresponde ao tamanho dos maiores estruturas na Radiação Cósmica de Fundo, e compare este valor com a massa típica de um aglomerado de galáxias, $1 \cdot 10^{16} M_{\odot}$.
As estruturas na RCF podem ser a origem dos aglomerados atuais?

13. Segundo a teoria da Inflação Cosmológica, o fator de escala cresceu até o início da inflação, t_i , como $R(t) = R_i \cdot \sqrt{\frac{t}{t_i}}$, e durante a inflação, de t_i a t_f , como $R(t) = R_i \cdot e^{H_i(t-t_i)}$, $H_i \simeq \frac{1}{t_i}$.

Mostre, que o horizonte de partículas no final da inflação era

$$d_h(t) = e^N c(2t_i + H_i^{-1}) \simeq e^N 3ct_i,$$

onde $N \equiv H_i(t_f - t_i)$.

14. a) Mostre, para um modelo de Dinâmica Newtoniana Modificada (MOND), descrita por

$$F = \frac{GMm}{\mu r^2}, \text{ onde } \mu = \frac{1}{1 + a_0/a}, \text{ ou } \mu = \sqrt{\frac{1}{1 + (a_0/a)^2}},$$

que a força gravitacional para distâncias galacto-cêntricas r pequenas (onde a aceleração gravitacional a é grande, $a \gg a_0$) tende à força gravitacional “tradicional”, e para distâncias grandes ($a \ll a_0$) é proporcional a r^{-1} .

b) Supondo que, neste último caso, r grande, praticamente toda a massa da galáxia é contida dentro de r ($M = M_{\text{gal}} = \text{const}$), e identificando a força MOND com a força centrípeta mantendo m na sua órbita, este resultado, $F \propto r^{-1}$, resulta em $v(r) = \text{const}$.