A métrica em relatividade geral

O tensor métrico (ou simplesmente métrica) é um mapa bilinear que relaciona dois vetores a um número real

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

A métrica serve para definir como distâncias serão calculadas em um espaço qualquer.
Na prática, o tensor métrico tem como argumento dois vetores, e devolve um número real que pode ser interpretado quase como um produto escalar entre eles:

$$g(\vec{v}, \vec{w}) = d$$

O módulo quadrado de um vetor $\vec{V}$ pode então ser calculado por

$$g(\vec{V}, \vec{V}) = |\vec{V}|^2$$

Assim como em análise vetorial, é interessante sermos capazes de calcular este produto a partir das componentes dos elementos envolvidos. O tensor métrico g se comportará como uma matriz quadrada, tendo dois índices para cada componente, enquanto vetores tem somente um índice.

Exemplo

$$\vec{V} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k} \therefore \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcularmos o produto interno em uma geometria euclideana tradicional, geralmente fazemos:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{3} v_i \cdot w_i$$

Vamos introduzir a notação de Einstein, elevando um dos índices (e chamando este agora de vetor contravariante, enquanto o outro será o covariante).

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \sum_{i=1}^{3} v^i w_i$$

$w_i \to$ covariante

$v^i \to$ contravariante

Na notação de Einstein, a somatória não é explicitada, e fica implícita sempre que houver índices repetidos com um em cima e o outro embaixo:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \Sigma_i v^i w_i = \underbrace{v^i w_i}_{\text{somatória}}$$

somente métrica Lorentziana

Em 4 dimensões, usamos índices gregos (μ, ν). A métrica pode então ser dada por suas componentes:

$$g \to g_{\mu\nu}$$

Existe ainda a métrica inversa, que possui a seguinte propriedade:

delta de Kronecker $\begin{cases} 1 \text{ se } \alpha = \beta \\ 0 \text{ se } \alpha \neq \beta \end{cases}$

$$g^{\mu\alpha} g_{\mu\beta} = \delta^\alpha{}_\beta \Rightarrow g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \mathbb{1}$$

A métrica inversa pode ser usada para "levantar um índice" de um vetor, da seguinte maneira:

$$g^{\mu\nu} v_\nu = v^\mu$$

igualmente

$$g_{\mu\nu} v^\nu = v_\mu$$

Com isso, o produto entre dois vetores é finalmente dado por:

$$\boxed{\vec{v}\cdot\vec{w} = g(\vec{v},\vec{w}) = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu = v^\mu w_\mu}$$

Igualmente, o comprimento de um vetor é dado por

$$|\vec{v}|^2 = g(v,v) = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = v^\mu v_\mu$$

Em notação diferencial, temos outra forma de escrever a métrica:

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

Observação

As componentes da métrica dependem da escolha do sistema de coordenadas.

As componentes da métrica originam-se do produto interno entre os vetores de base escolhidos. Em uma base (geralmente ortonormal) $\hat{e}_i$, temos, por exemplo:

$$\vec{v} = v^i \hat{e}_i \quad ; \quad \vec{w} = w^j \hat{e}_j$$

$$g(v, w) = v^i \hat{e}_i w^j \hat{e}_j$$

$$= v^i w^j \underbrace{\hat{e}_i \hat{e}_j}_{g_{ij}}$$

Disso, deduzimos que as componentes são dadas por

$$g_{ij} = g(\hat{e}_i, \hat{e}_j)$$

Exemplos:

Espaço euclideano $\mathbb{R}^3$, em coordenadas cartesianas $(\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} = \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\})$

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \mathbb{1} \quad \text{ou} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Já em coordenadas esféricas, temos $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} = \{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi\}$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

Espaçotempo de Minkowski (Relatividade Restrita)

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

em coord. cartesianas

ou, em coordenadas esféricas:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

Espaçotempo de Schwarzschild (Buracos negros)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1-R/r)c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-R/r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

raio de Schwarzshild

$$ds^2 = -(1 - R/r)c^2dt^2 + (1 - R/r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2$$

Espaçotempo de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

Importante em cosmologia

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(1-kr^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

coord. esféricas

$$ds^2 = -c^2dt^2 + \underbrace{a(t)^2}_{\text{fator de escala}}\left[\frac{1}{1-kr^2}dr^2 + r^2 d\Omega^2\right]$$

se tomarmos $k=0$ (universo plano), teremos, em coordenadas cartesianas:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2\left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right]$$

Assinatura

Toda métrica possui uma <u>assinatura</u> relacionada aos sinais de suas componentes numa representação diagonal.

Assinaturas diferentes ainda podem representar a mesma métrica

Exemplo: Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^2 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Ass: $(-+++)$ Ass: $(+---)$

= Métrica Lorentziana

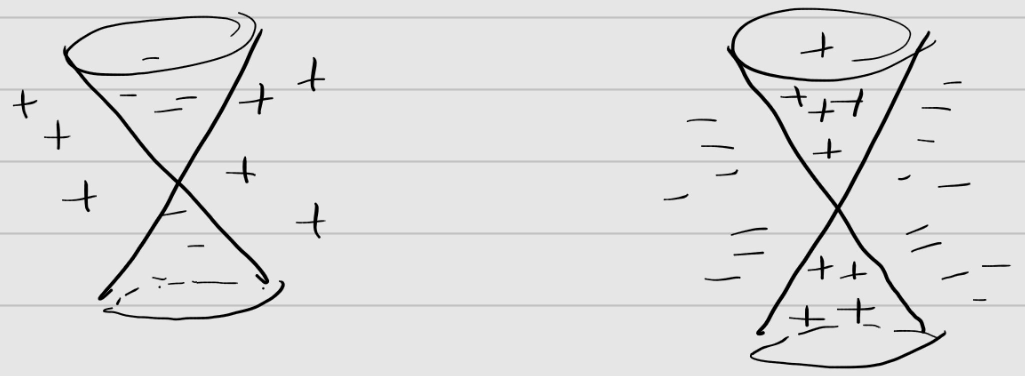
Algumas definições mudam com a assinatura.

Ex:

Intervalo tipo-tempo: $ds^2 < 0$ ou $ds^2 > 0$

tipo-espaço: $ds^2 < 0$ ou $ds^2 < 0$

tipo luz: $ds^2 = 0$



Nota: métricas com assinatura $(++++)$ [ou $(----)$] são chamadas Riemannianas. Em Relatividade Geral nós só trabalhamos com métricas Lorentzianas.

A métrica descreverá a curvatura do espaçotempo em relatividade geral, e é parte fundamental das equações de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \overset{\text{constante gravitacional}}{G}\, T_{\mu\nu} \qquad (\overset{\text{unidades naturais}}{c=1})$$

$G_{\mu\nu}$: Tensor de Einstein (contém informações sobre a métrica e a curvatura)

$T_{\mu\nu}$: Tensor de Energia e Momento (Contém informações sobre a distribuição da matéria e energia no espaçotempo)