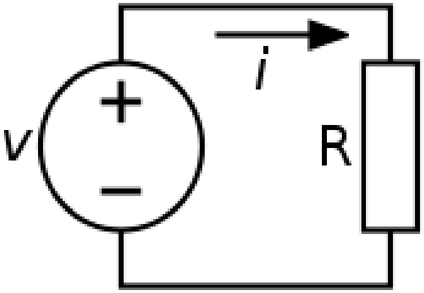
Fenômenos Eletromagnéticos

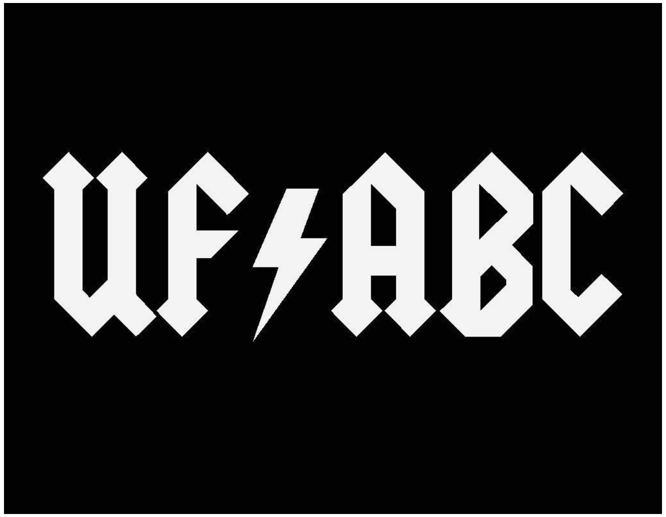
Universidade Federal do ABC

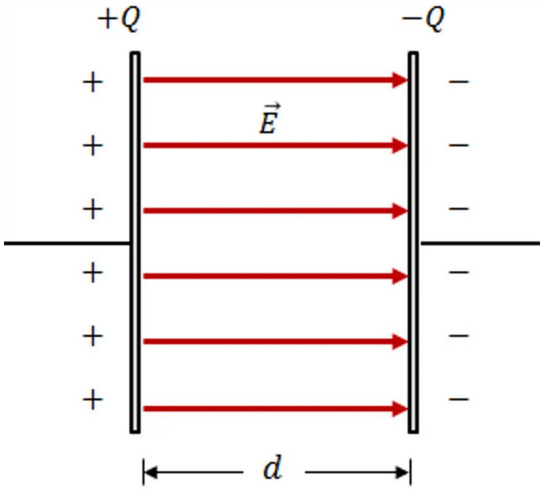
03. Fluxo elétrico,
Lei de Gauss

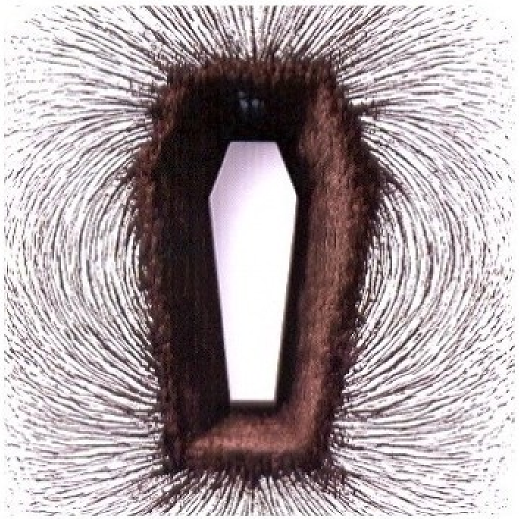
Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br



http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/EM.html

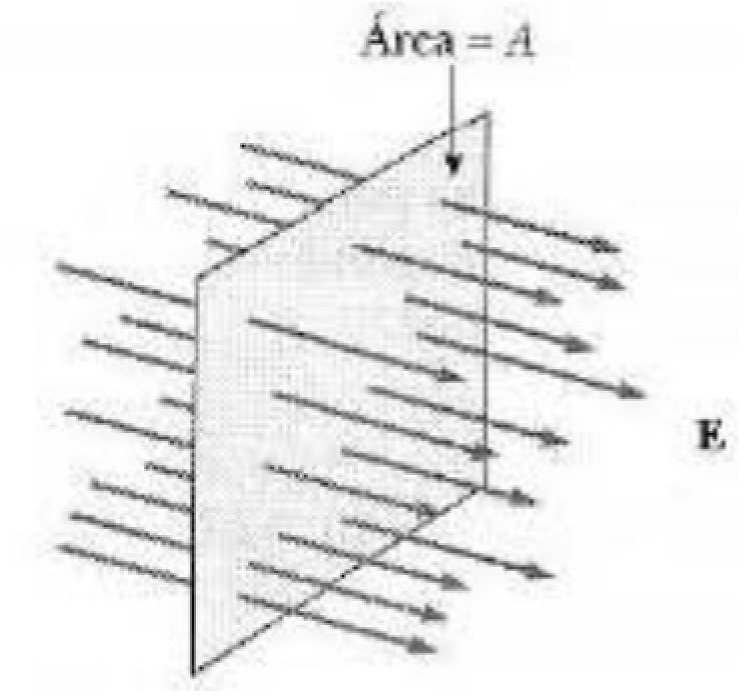






Fluxo Elétrico

Medida para o "montante de campo elétrico" (no. de linhas de campo) que atravessa uma dada área.

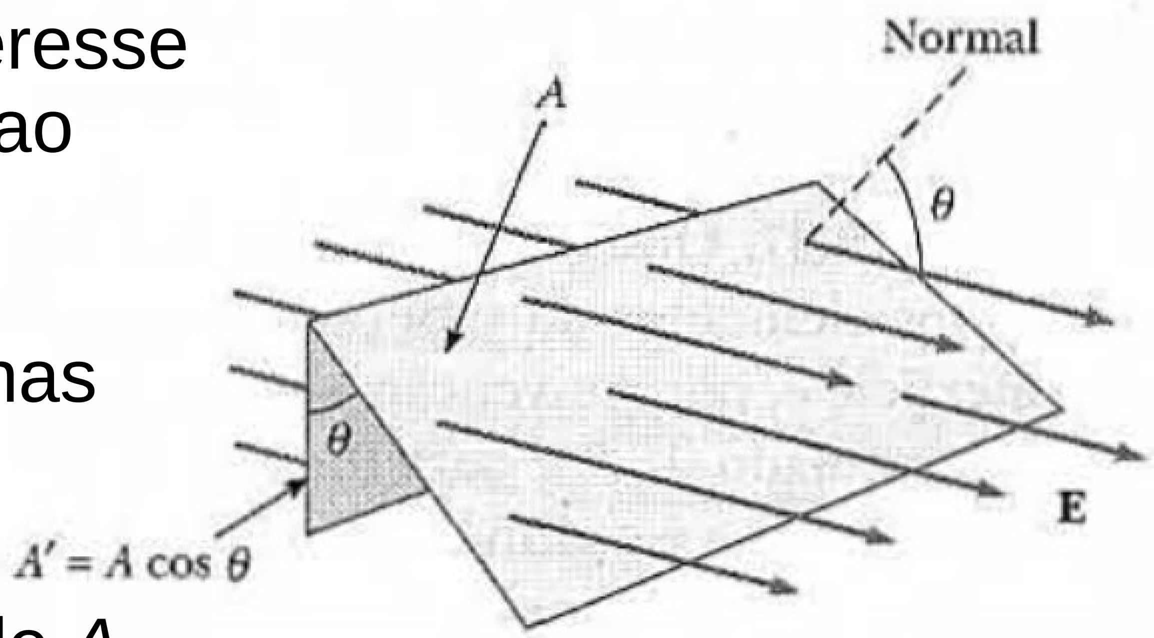


Seja o campo **E** homogêneo, e a área *A* plana e perpendicular a **E**, definimos como fluxo elétrico Φ_E (em módulo) a grandeza

$\Phi_E = EA$ (unidades SI Nm^2/C)

Fluxo Elétrico

Se a superfície de interesse não for perpendicular ao campo, obviamente passa “menos campo” através dela, i.e., apenas



$\Phi_E = EA'$,

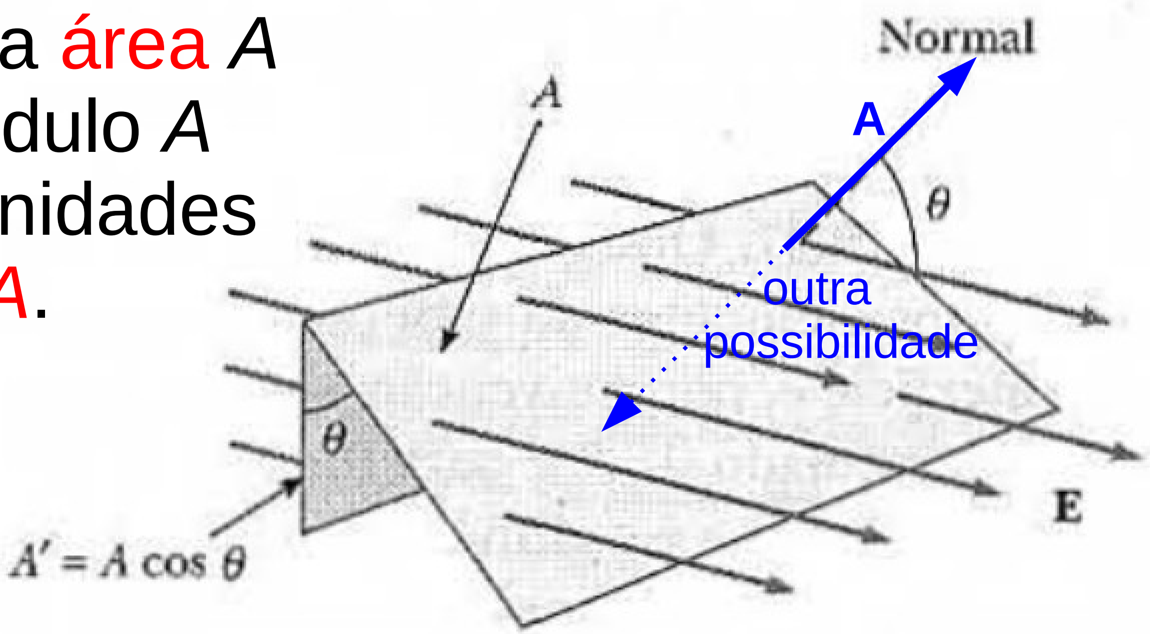
onde A' é a projeção de A num plano perpendicular a **E**.

Pela figura dá para ver, que $A' = A \cos \theta$, sendo θ o ângulo entre **E** e a normal a A.

=> $\Phi_E = EA \cos \theta$

Fluxo Elétrico

É comum representar a área A por um vetor **A**, de módulo A (! sim, um vetor com unidades de área) e direção ⊥ A.

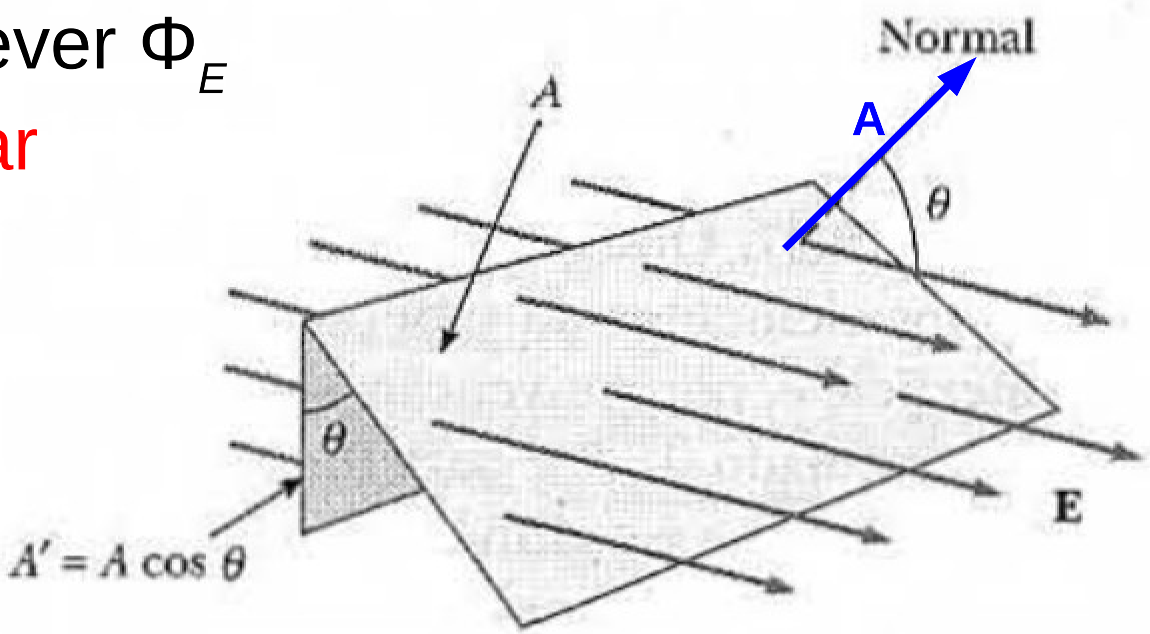


Obviamente há duas possibilidades para definir a direção de **A**.

É importante especificar, qual das duas se define. Podemos chamar este como a direção que atravessa A no sentido positivo.

Fluxo Elétrico

Assim, podemos escrever Φ_E como a produto escalar de **E** e **A**:



$\Phi_E = EA \cos\theta = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$

Caso e campo atravessa a área no sentido negativo, $\theta > 90º \Rightarrow \cos\theta$ é negativo, e Φ_E também.

O fluxo elétrico não diz apenas, “quanto campo” atravessa a área, mas também, em que sentido.

Fluxo Elétrico

Exercício

Uma superfície plana que tem área 3,20 m^2 é colocada em várias orientações em um campo elétrico uniforme de magnitude $E = 6{,}20 \cdot 10^5$ N/C.
Calcule o fluxo elétrico através desta área quando o campo elétrico:
(a) é perpendicular à superfície;
(b) é paralelo à superfície;
(c) faz um ângulo de 75º com o plano da superfície.

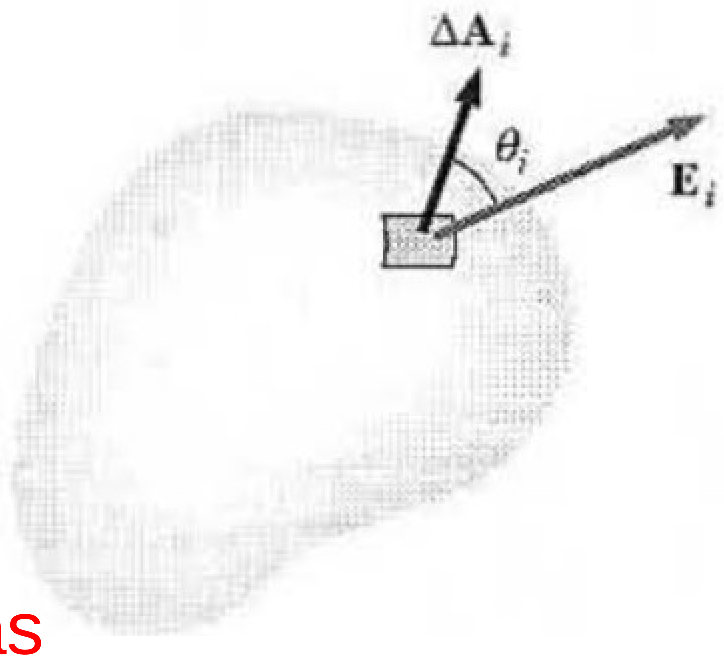
Fluxo Elétrico

Exercício

Uma superfície plana que tem área 3,20 m^2 é colocada em várias orientações em um campo elétrico uniforme de magnitude E = $6{,}20 \cdot 10^5$ N/C.
Calcule o fluxo elétrico através desta área quando o campo elétrico:
(a) é perpéndicular à superfície;
(b) é paralelo à superfície;
(c) faz um ângulo de 75º com o plano da superfície.

Quadro:
(a) $1{,}98 \cdot 10^6$ Nm^2/C
(b) zero
(c) $1{,}92 \cdot 10^6$ Nm^2/C

Fluxo Elétrico



Caso á superfície não é plana e/ou o campo não é homogêneo, teremos que subdividi-la em áreazinhas $\Delta\mathbf{A}_i$ suficientemente pequenas para que:

- Elas possam ser tidas como planas
- O campo possa ser tido como homogêneo em $\Delta\mathbf{A}_i$,

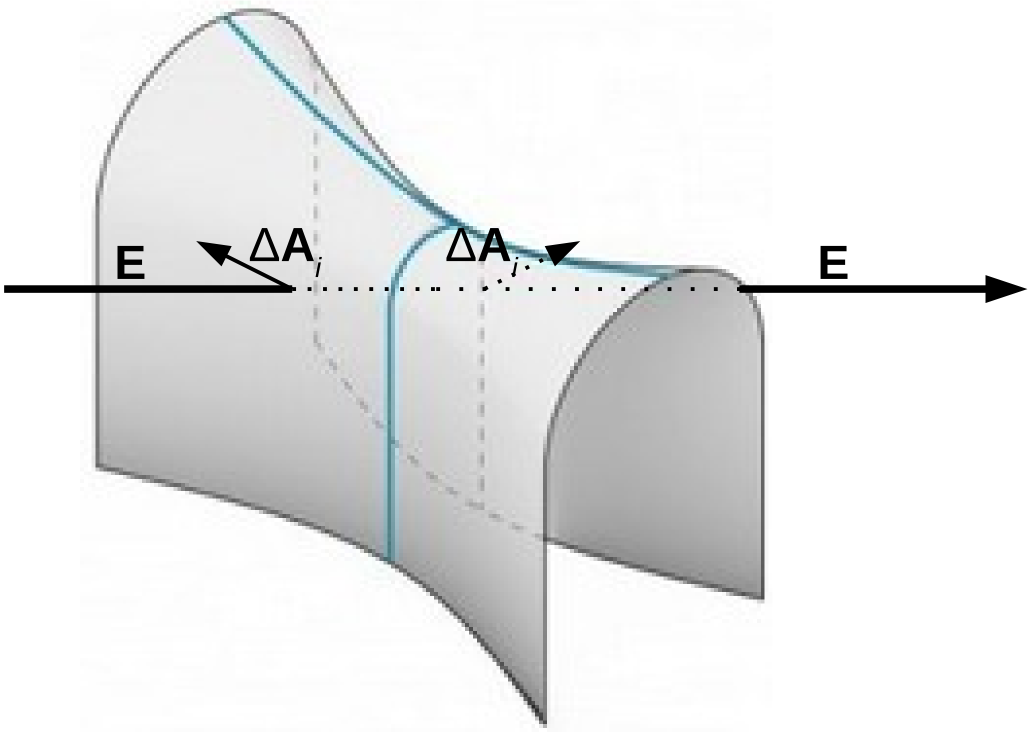
  => campo na posição de $\Delta\mathbf{A}_i$: $\mathbf{E}_i$

e somar os fluxinhos $\Delta\Phi_{E,i}$:

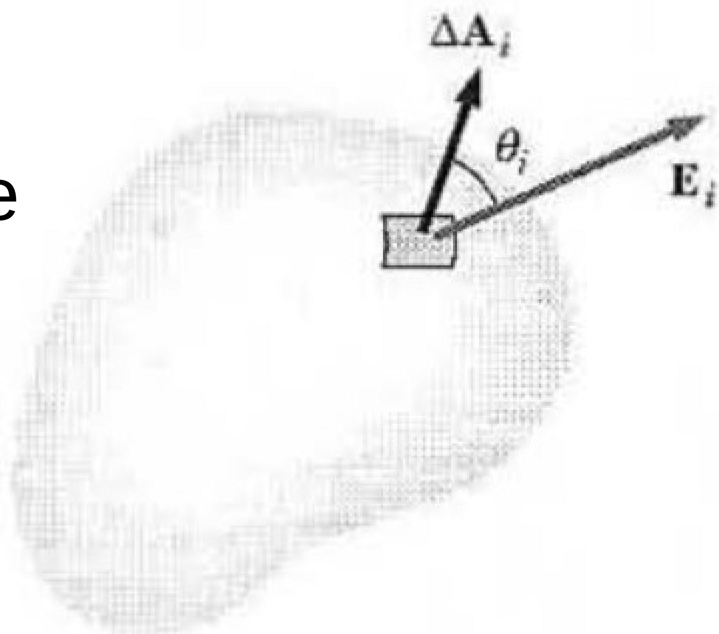
$$\Phi_E = \Sigma\, \Delta\Phi_{E,i} = \Sigma\, E_i \Delta A_i \cos\theta_i = \Sigma\, \mathbf{E}_i \cdot \Delta\mathbf{A}_i$$

Fluxo Elétrico

!!! O campo pode atravessar a superfície em diferentes regiões em sentidos opostos, tal que os fluxinhos têm sinais opostos, e podem se cancelar parcial- ou totalmente na soma.



Fluxo Elétrico



O caso ideal de $\Delta\mathbf{A}_i$ suficientemente pequenas são áreazinhas infinetesimalmente pequenas:

$\Delta\mathbf{A}_i \rightarrow d\mathbf{A}$

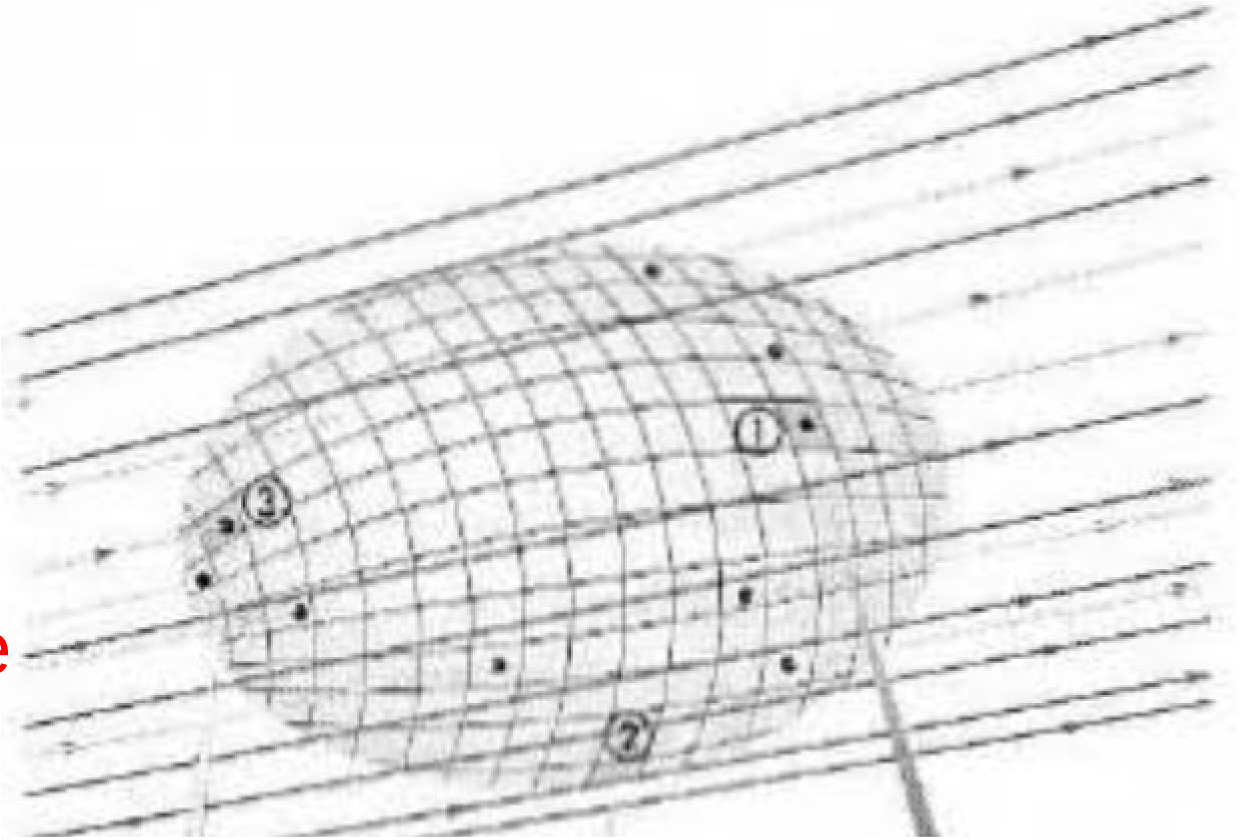
Assim, a soma vira uma integral:

$$\Phi_E \equiv \int_A d\Phi_E = \int_A E \cos\theta \, dA = \int_A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$$

Se trata de uma integral de superfície.
A tem que ser parametrizada de maneira esperta para transformá-la numa integral dupla (lembram FVV?).

Fluxo Elétrico

Frequentemente, estamos interessados no fluxo através de uma área fechada, que envolve totalmente um certo volume.



Neste caso, por convenção se define a direção para fora como positiva, e se usa o símbolo $\oint$:

$$\Phi_E \equiv \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_A E \cos\theta \, dA = \oint_A E_n \, dA,$$

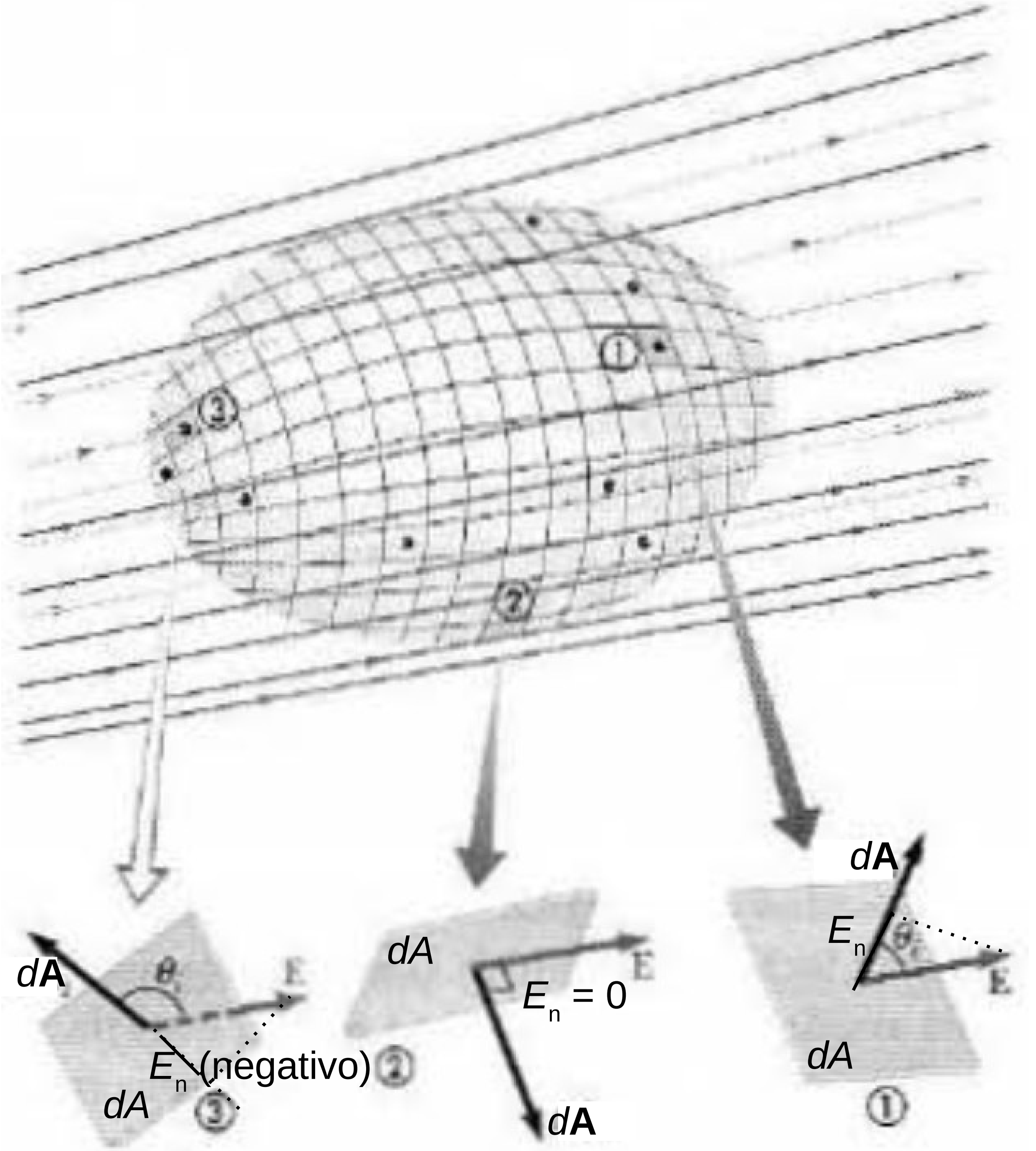
onde E_n é o componente de **E** perpendicular à superfície.

Fluxo Elétrico

$$\Phi_E \equiv \oint_A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$$
$$= \oint_A E \cos\theta \, dA$$
$$= \oint_A E_n \, dA$$

Resolver a integral, analitica- ou numericamente pode ser bem chato.

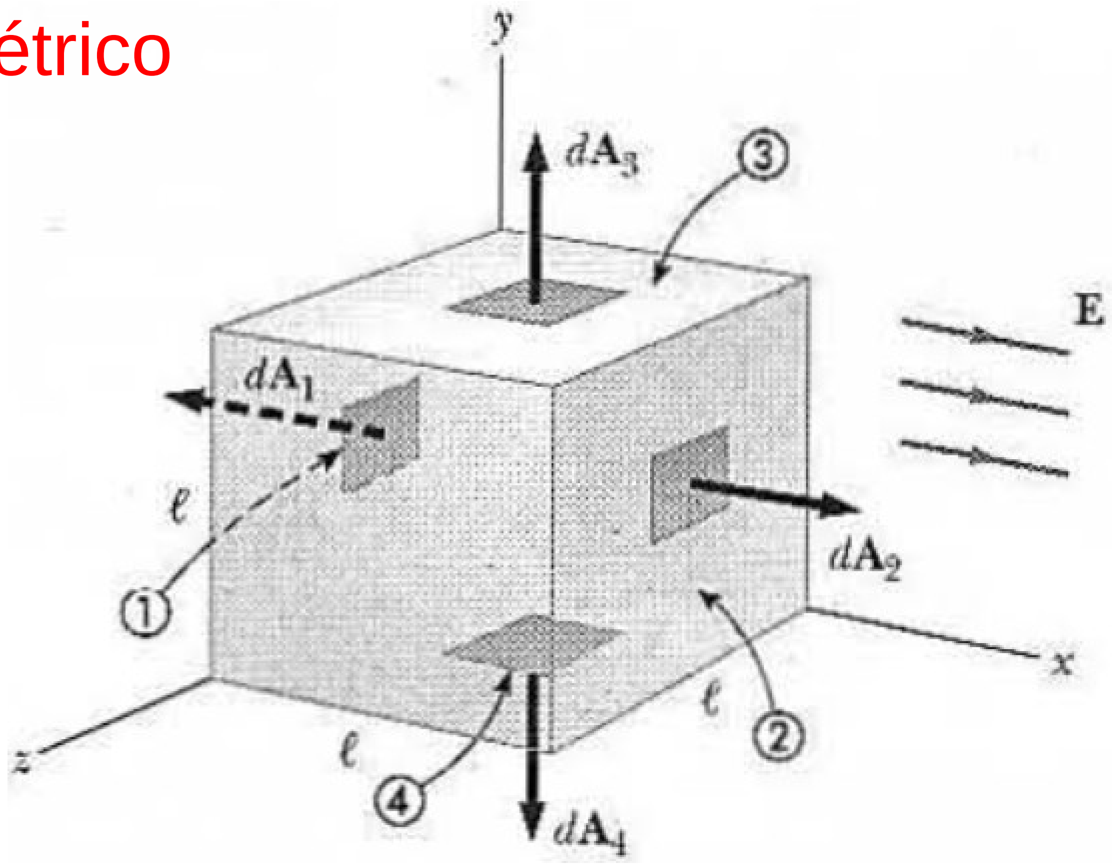
Mas às vezes dá para usar simetrias ou outras simplificações.



Fluxo Elétrico

Exemplo 19.8: Fluxo através de um Cubo

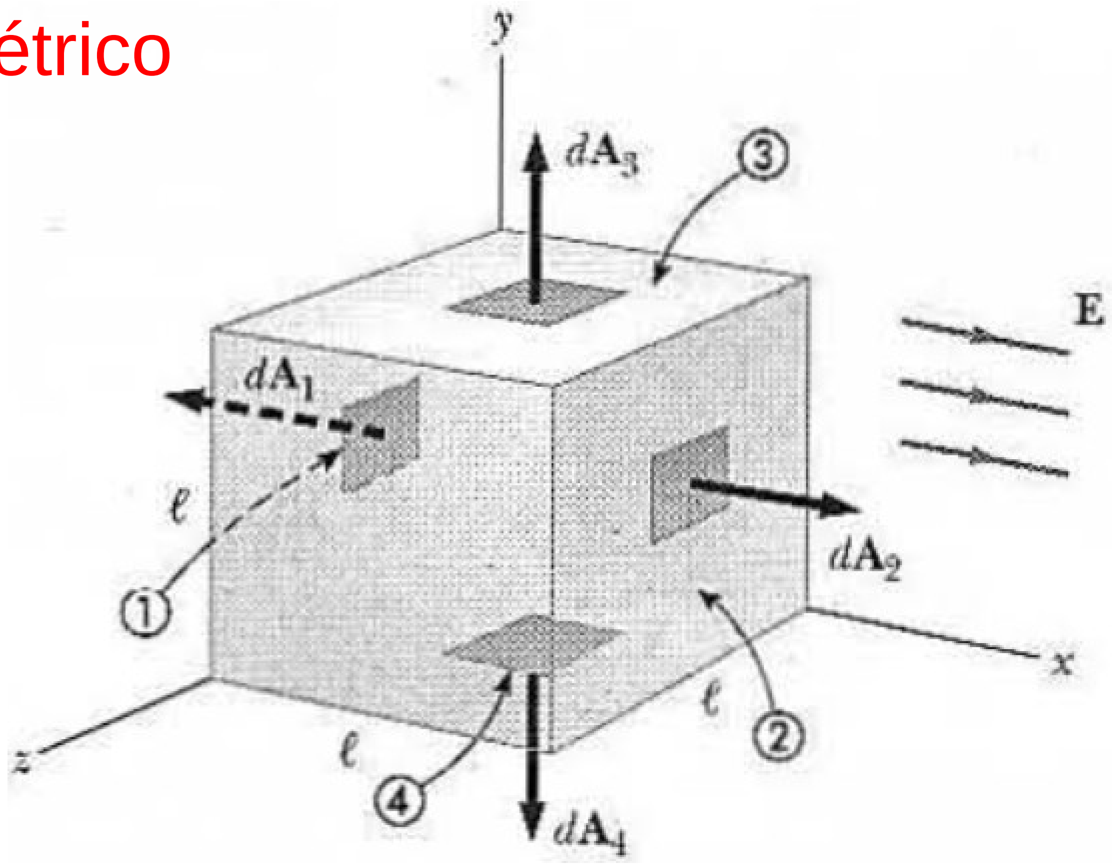
Considere um campo elétrico uniforme **E** orientado ao longo do eixo $+x$. Encontre o fluxo elétrico resultante através da superfície de um cubo de aresta l, orientado como mostra a figura.



Fluxo Elétrico

Exemplo 19.8: Fluxo através de um Cubo

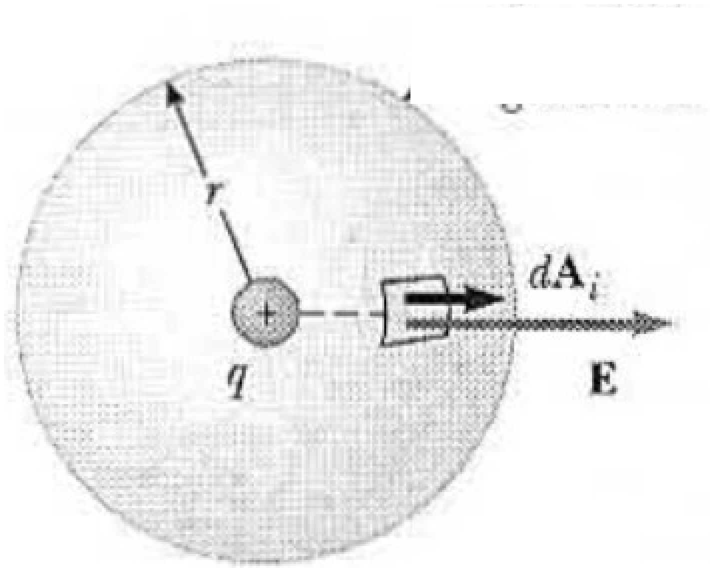
Considere um campo elétrico uniforme **E** orientado ao longo do eixo +*x*. Encontre o fluxo elétrico resultante através da superfície de um cubo de aresta *l*, orientado como mostra a figura.



Quadro: zero

Lei de Gauss para o Campo Elétrico

Calculemos o fluxo elétrico devido ao campo de uma carga pontual q através de uma esfera com raio r centrada na carga q:



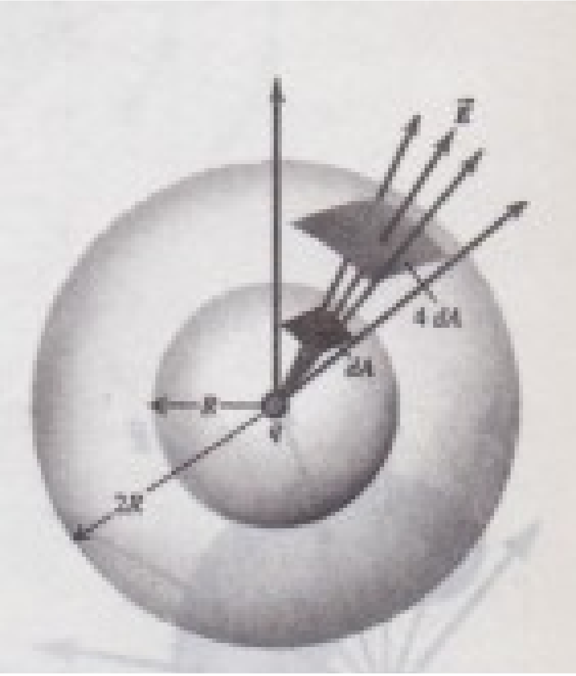
$$\Phi_E = \oint_A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} \overset{\mathbf{E}\,\|\,d\mathbf{A}}{=} \oint_A E\,dA$$

$$= \oint_A k_e q/r^2\, dA = k_e q/r^2 \oint_A dA$$

$$= k_e q/r^2 \cdot A \qquad = k_e q/r^2 \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k_e q = q/\varepsilon_0$$

independente de r e proporcional a q!

Lei de Gauss para o Campo Elétrico



$\Phi_E = 4\pi k_e q = q/\varepsilon_0$

independente de r e proporcional a q!

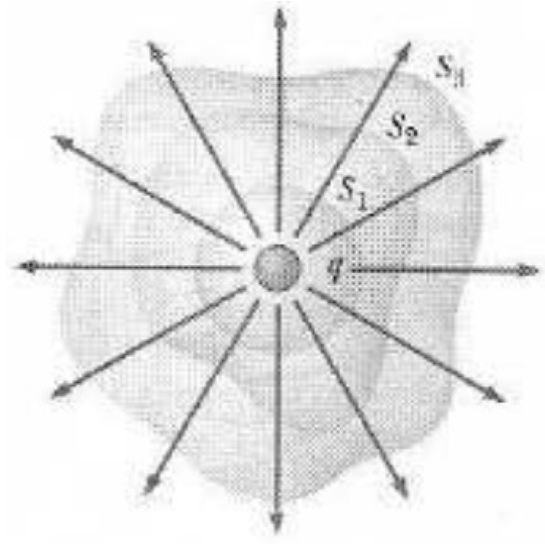
Isto condiz com a idea, de que o fluxo corresponde ao "montante de campo" (no. de linhas de campo) que atravessa a superfície.

Cada linha de campo atravessa a superfície uma vez, independente do raio da superfície.

!!! Também vale para cargas negativas.

Neste caso, as linhas de campo apontam para dentro, os produtos $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$ serão negativos, e Φ_E também.

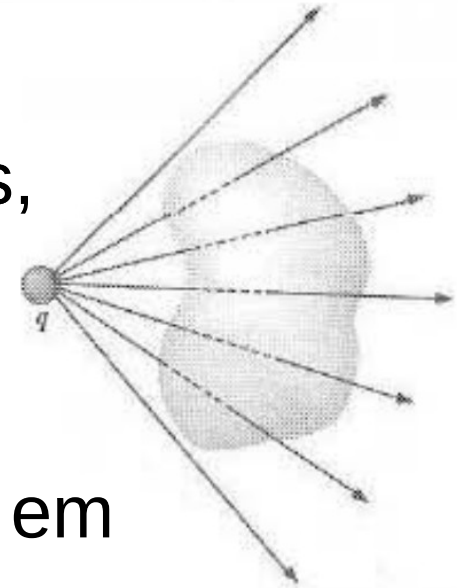
Lei de Gauss para o Campo Elétrico



$\Phi_E = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi k_e q = q/\varepsilon_0$

Isto deveria valer também para superfícies não-esféricas que englobam q,

enquanto o fluxo através de superfícies fechadas não englobando q deveria ser nulo (cada linha que entra, sai de novo)



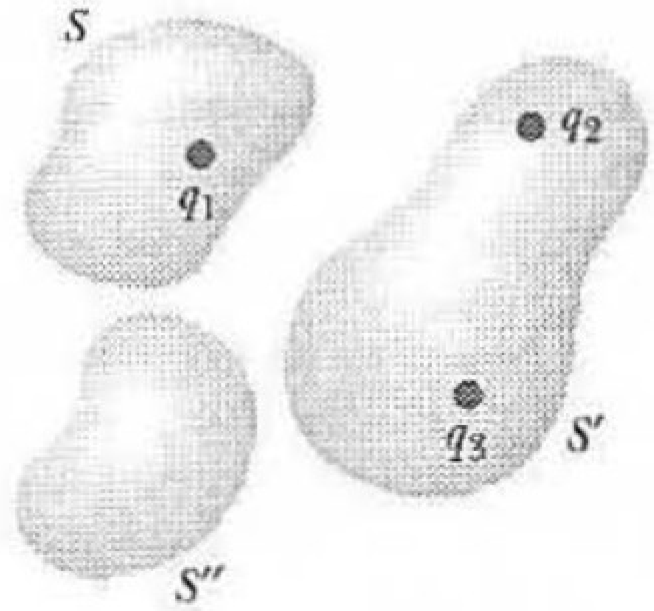
(As duas afirmações podem ser mostradas, usando cálculo vetorial, mas isto é fora do escopo desta disciplina).

=> Uma carga dentro da superfície resulta em fluxo q/ε_0, e uma fora, em fluxo zero.

Lei de Gauss para o Campo Elétrico

E se tiver mais que uma carga?

Exemplo com 3 cargas:



$$\Phi_E = \oint_A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oint_A (\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_3)\cdot d\mathbf{A}$$
$$= \oint_A \mathbf{E}_1\cdot d\mathbf{A} + \oint_A \mathbf{E}_2\cdot d\mathbf{A} + \oint_A \mathbf{E}_3\cdot d\mathbf{A}$$

Cada integral da q_i/ε_0 caso q_i está dentro da superfície
0 caso q_i está fora.

=> O fluxo total, i.e., a soma das integrais dá $1/\varepsilon_0$ multiplicado pela carga total englobada pela superfície.

=> Lei de Gauss para o campo elétrico

Lei de Gauss para o Campo Elétrico

Formulação Formal

O fluxo resultante através de qualquer superfície fechada é:

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = q_{\text{in}}/\varepsilon_0$$

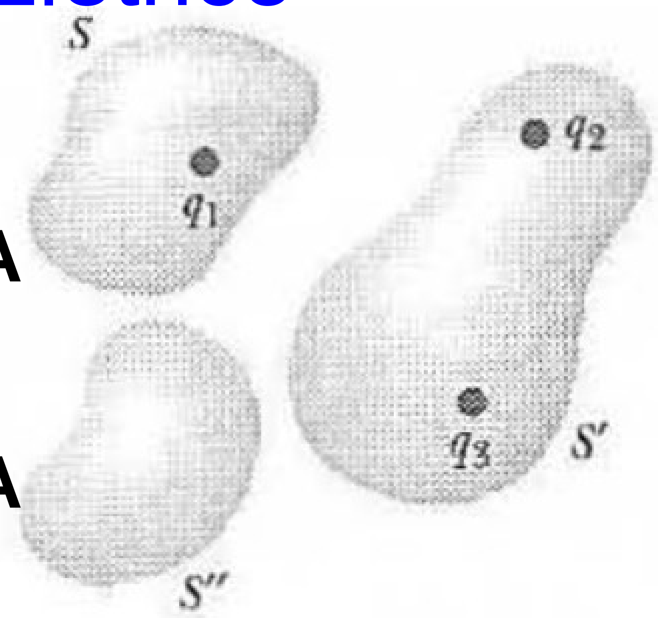
onde q_{in} representa a carga líquida no interior da superfície.


Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1955)

Ou seja:
O fluxo resultante através de qualquer superfície fechada é igual à carga líquida dentro da superfície dividida por ε_0.

Vale também para distribuições contínuas de carga. Neste caso, $q_{\text{in}} = \int_V \rho \, dV$.

Lei de Gauss para o Campo Elétrico



Voltando pro exemplo com 3 cargas:

$$\Phi_E = \oint_A \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{A} + \oint_A \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{A} + \oint_A \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{A}$$

Caso *S*:

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{A} + \oint_S \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{A} + \oint_S \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{A}$$
$$= q_1/\varepsilon_0 + 0 + 0 = q_1/\varepsilon_0$$

Caso *S*':

$$\Phi_E = \oint_{S'} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{A} + \oint_{S'} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{A} + \oint_{S'} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{A}$$
$$= 0 + q_2/\varepsilon_0 + q_3/\varepsilon_0 = (q_2 + q_3)/\varepsilon_0$$

Caso *S*'':

$$\Phi_E = \oint_{S''} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{A} + \oint_{S''} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{A} + \oint_{S''} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{A}$$
$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

Lei de Gauss para o Campo Elétrico

Enigma Rápido 19.7

Para uma superfície gaussiana através da qual o fluxo resultante é nulo, as próximas afirmações poderiam ser verdadeiras.
Qual delas têm de ser verdadeira?

(a) Não há cargas dentro da superfície.

(b) É nula a carga líquida dentro da superfície.

(c) O campo elétrico é zero em todos os pontos sobre a superfície.

(d) O número de linhas de campo elétrico que entram na superfície iguala o número de linhas que sai da superfície.

Lei de Gauss para o Campo Elétrico

Enigma Rápido 19.7

Para uma superfície gaussiana através da qual o fluxo resultante é nulo, as próximas afirmações poderiam ser verdadeiras.
Qual delas têm de ser verdadeira?

(a) Não há cargas dentro da superfície.

(b) É nula a carga líquida dentro da superfície.

(c) O campo elétrico é zero em todos os pontos sobre a superfície.

(d) O número de linhas de campo elétrico que entram na superfície iguala o número de linhas que sai da superfície.

Lei de Gauss para o Campo Elétrico

Pensando a Física 19.2

Uma superfície gaussiana esférica circunda uma carga pontual *q*.
Descreve, o que acontece ao fluxo resultante através da superfície se
(a) a carga for triplicada,
(b) o volume da esfera for dobrado,
(c) a superfície for mudada por um cubo,
(d) a carga for movida para outra posição dentro da superfície e
(e) ela for movida para uma posição fora da superfície.

Lei de Gauss para o Campo Elétrico

Pensando a Física 19.2

Uma superfície gaussiana esférica circunda uma carga pontual q.
Descreve, o que acontece ao fluxo resultante através da superfície se
(a) a carga for triplicada,
(b) o volume da esfera for dobrado,
(c) a superfície for mudada por um cubo,
(d) a carga for movida para outra posição dentro da superfície e
(e) ela for movida para uma posição fora da superfície.

(a) também é triplicado; (b), (c) e (d) não muda;
(e) vira zero.

Universidade Federal do ABC

Fenômenos Eletromagnéticos

FIM PRA HOJE