



Universidade Federal do ABC

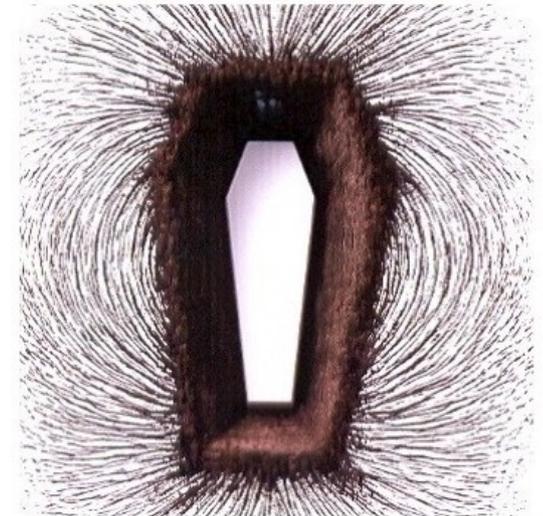
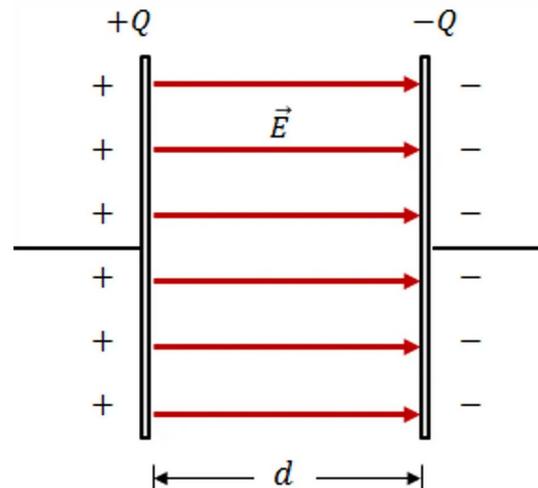
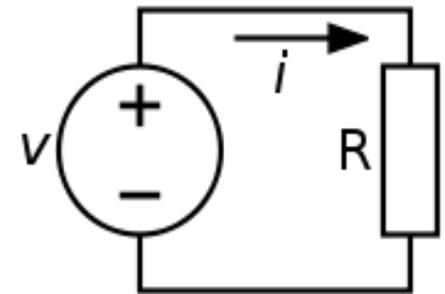
# Fenômenos Eletromagnéticos

06. Obtenção do valor do campo elétrico com base no potencial, Potencial gerado por distribuições de cargas contínuas e por um condutor carregado

Prof. Pieter Westera

[pieter.westera@ufabc.edu.br](mailto:pieter.westera@ufabc.edu.br)

<http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/EM.html>



# Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

Lembrete de Fenômenos Mecânicos:

**Relação** entre **energia potencial** e **força** devido a alguma **interação conservativa**:

$$1D: F_x = -dU/dx;$$

$$dU = -F_x dx \Rightarrow U(x) = \int_{x_0}^x dU = -\int_{x_0}^x F_x dx,$$

onde  $x_0$  é a posição do ponto zero da energia potencial

$$3D: F_x = -\partial U/\partial x, F_y = -\partial U/\partial y, F_z = -\partial U/\partial z \Rightarrow \mathbf{F} = -\nabla U;$$

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow U(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} dU = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

onde  $\mathbf{r}_0$  é a posição do ponto zero da energia potencial

# Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

Já que, para uma **carga de prova**  $q_0$ ,  $V = U/q_0$  e  $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_0$ , **dividir** as **relações** do slide anterior **por**  $q_0$  dá:

$$1D: E_x = -dV/dx;$$

$$dV = -E_x dx \Rightarrow V(x) = \int_{x_0}^x dV = -\int_{x_0}^x E_x dx$$

$$3D: E_x = -\partial V/\partial x, E_y = -\partial V/\partial y, E_z = -\partial V/\partial z \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V;$$

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow V(\mathbf{r}) = \int_{r_0}^{\mathbf{r}} dV = -\int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

O **campo elétrico** é o **gradiente negativo** do **potencial elétrico**, e

o **potencial elétrico** é a **integral de linha negativa** do **campo** a partir do ponto zero.

Frequentemente, o **ponto zero** é escolhido no **infinito**:

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\infty}^{\mathbf{r}} dV = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

# Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

Exemplo: Carga pontual

$V = k_e q/r \Leftrightarrow \mathbf{E} = k_e q \mathbf{r}^\wedge / r^2$ ,  $E_r = k_e q / r^2$   
como visto na aula anterior.

Outro Exemplo

$$V = 3x^2y + y^2 + yz$$

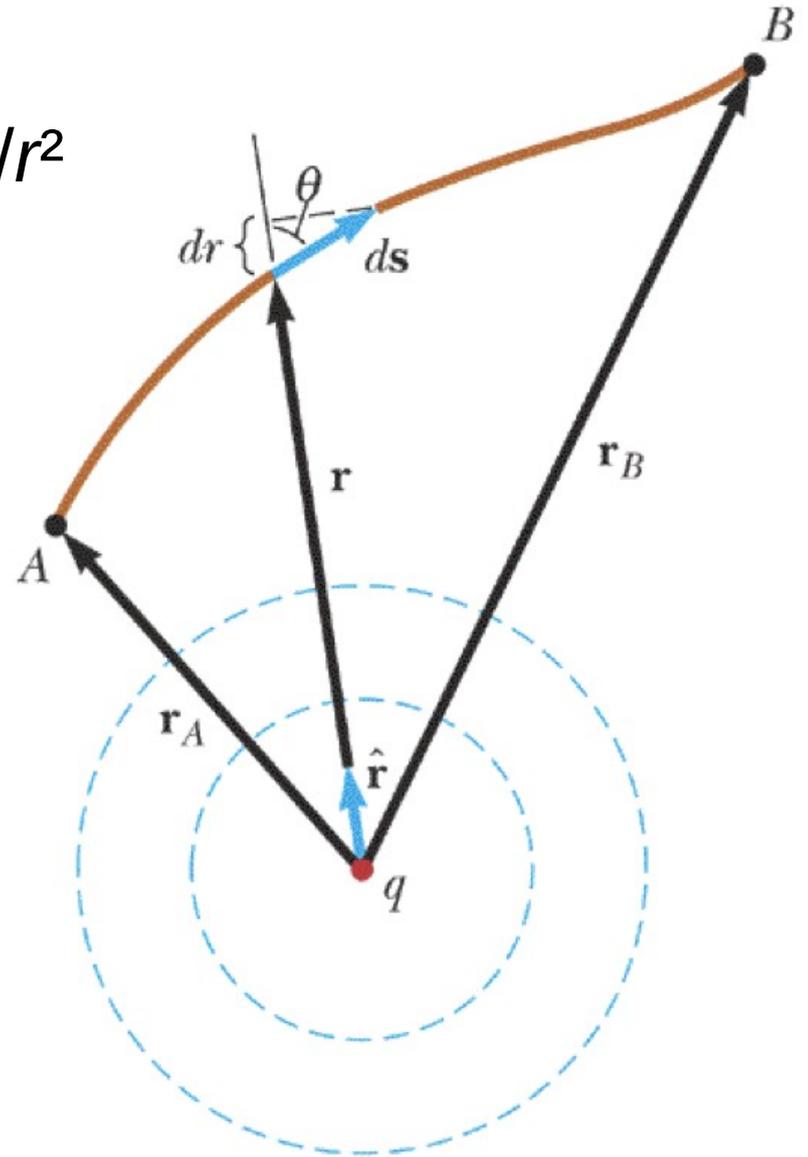
$\Rightarrow$

$$E_x = -\partial V / \partial x = -6xy$$

$$E_y = -\partial V / \partial y = -3x^2 - 2y - z$$

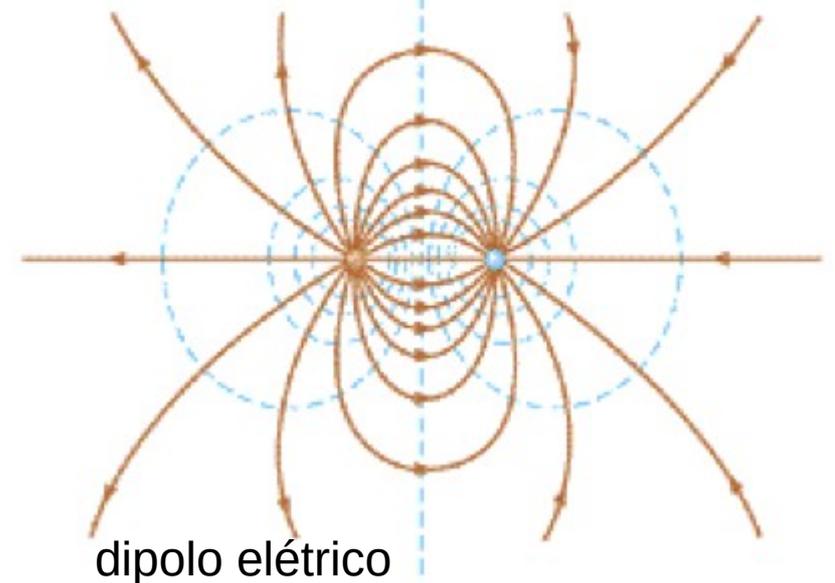
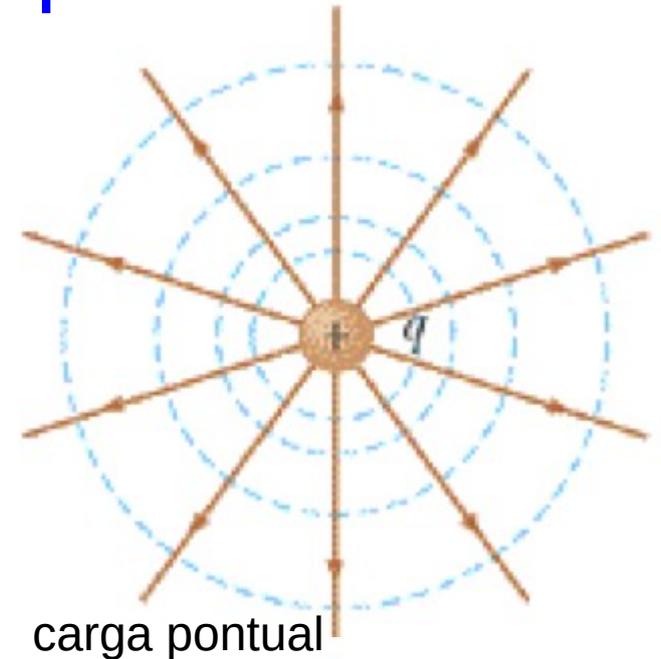
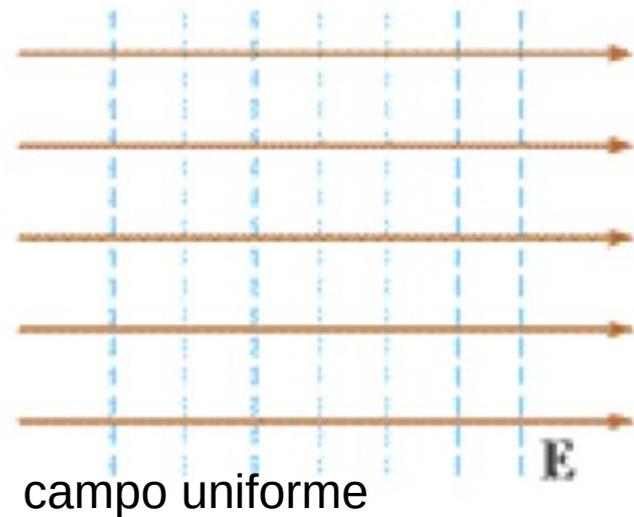
$$E_z = -\partial V / \partial z = -y$$

$$\mathbf{E} = (-6xy, -3x^2 - 2y - z, -y)$$



# Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

Um resultado disso é, que **superfícies equipotenciais** são **perpendiculares** a **linhas de campo elétrico**, como também já visto na aula anterior



# Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

## Enigma Rápido 20.5

Suponha que você conhece o **valor** do **potencial elétrico** em um **ponto**.

Você pode encontrar o **campo elétrico** nesse ponto a partir dessa informação?

# Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

## Enigma Rápido 20.5

Suponha que você conhece o **valor** do **potencial elétrico** em um **ponto**.

Você pode encontrar o **campo elétrico** nesse ponto a partir dessa informação?

**Não**, para conseguir calcular o **gradiente** (negativo) de uma função (escalar) em uma posição, é preciso conhecer seu valor nesta e no **entorno** desta.

# Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

## Enigma Rápido 20.6

Se o **potencial elétrico** for **constante** em uma **região**, o que você pode concluir sobre o **campo elétrico** nessa **região**?

Se o **campo elétrico** for **zero** em uma **região**, o que você pode concluir sobre o **potencial elétrico** nessa **região**?

# Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

## Enigma Rápido 20.6

Se o **potencial elétrico** for **constante** em uma **região**, o que você pode concluir sobre o **campo elétrico nessa região**?

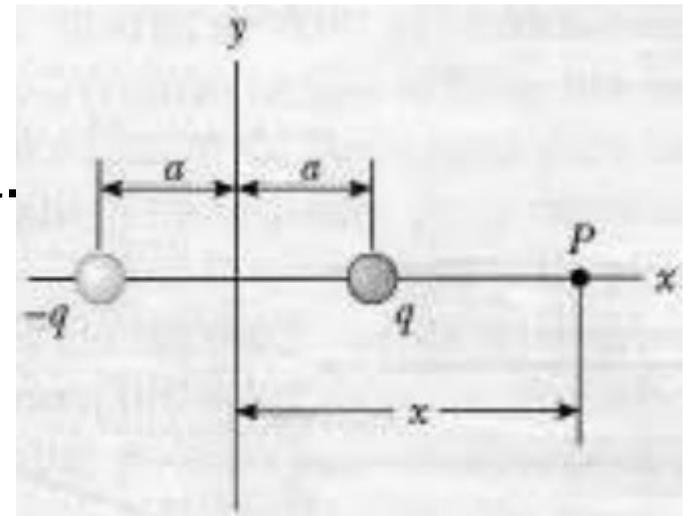
Se o **campo elétrico** for **zero** em uma **região**, o que você pode concluir sobre o **potencial elétrico nessa região**?

$V$  const.  $\Leftrightarrow E = 0$  nesta região,  
já que o gradiente de uma função constante é nulo,  
e a integral de uma função nula é constante.

# Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

## Exemplo 20.4 O Potencial Elétrico de um Dipolo

Um **dipolo elétrico** consiste em **duas cargas iguais e opostas separadas** por uma **distância  $2a$** , como na figura. O dipolo está ao longo do eixo  $x$  e está centrado na origem.



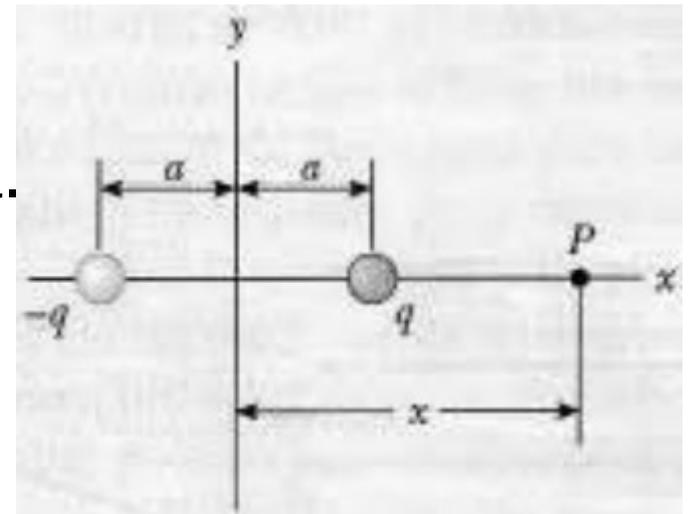
Calcule

- o **potencial elétrico** em qualquer ponto  $P$  ao longo do eixo  $x$  e
- o **campo elétrico** em pontos **muito distantes** do dipolo.

# Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

## Exemplo 20.4 O Potencial Elétrico de um Dipolo

Um **dipolo elétrico** consiste em **duas cargas iguais e opostas separadas** por uma **distância  $2a$** , como na figura. O dipolo está ao longo do eixo  $x$  e está centrado na origem.



Calcule

- o **potencial elétrico** em qualquer **ponto  $P$**  ao longo do eixo  $x$  e
- o **campo elétrico** em pontos **muito distantes** do dipolo.

### Quadro

(a)  $V = 2k_e qa/(x^2 - a^2)$

(b)  $E_x = 4k_e qa/x^3$  prop.  $x^{-3}$ , como visto na aula 2

# Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

Este exemplo mostra, que para **achar** o **campo elétrico**, frequentemente é mais fácil

- primeiro **calcular** o **potencial**, e
- depois, o **campo** através do **gradiente**,

do que calculá-lo como na aula 2,

já que o **potencial** é uma grandeza **escalar** (só um número em lugar de três).

(Mas às vezes, o oposto é mais fácil, calcular o campo como na aula 2, e depois, o potencial através da integral de linha. Tente desenvolver uma intuição para determinar, qual dos dois caminhos é mais prático em qual caso.)

# Potencial Elétrico devido a Distribuições Contínuas de Carga

Aula anterior:

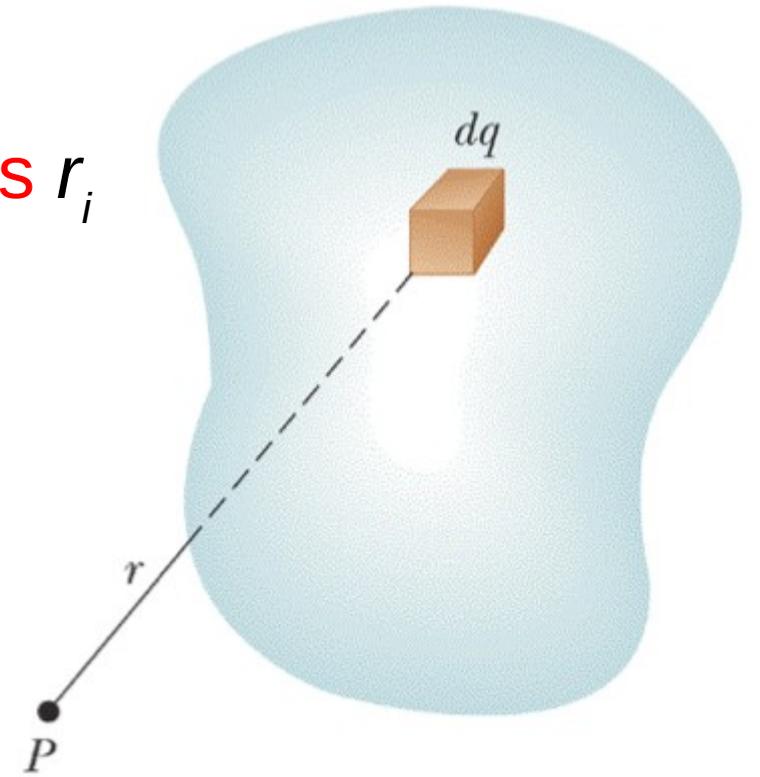
O **potencial** devido a um **conjunto** de **cargas** pontuais  $q_i$  nas **distâncias**  $r_i$  do ponto de interesse é:

$$V = k_e \sum_i q_i / r_i$$

Para uma **distribuição contínua** de **carga**, podemos dividi-la em "carguinhas infinitesimais"  $dq$

na **distância** (variável)  $r$ , e substituir a soma por uma **integral**, similar ao que fizemos para achar o campo devido a distribuição contínua de carga:

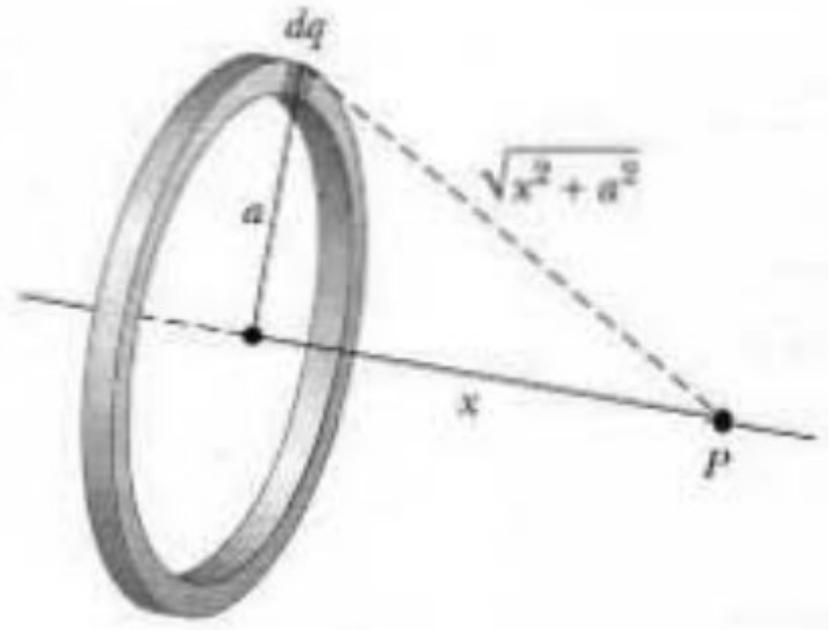
$$V = k_e \int dq / r$$



# Potencial Elétrico devido a Distribuições Contínuas de Carga

## Exemplo 20.5: Potencial devido a um Anel Uniformemente Carregado

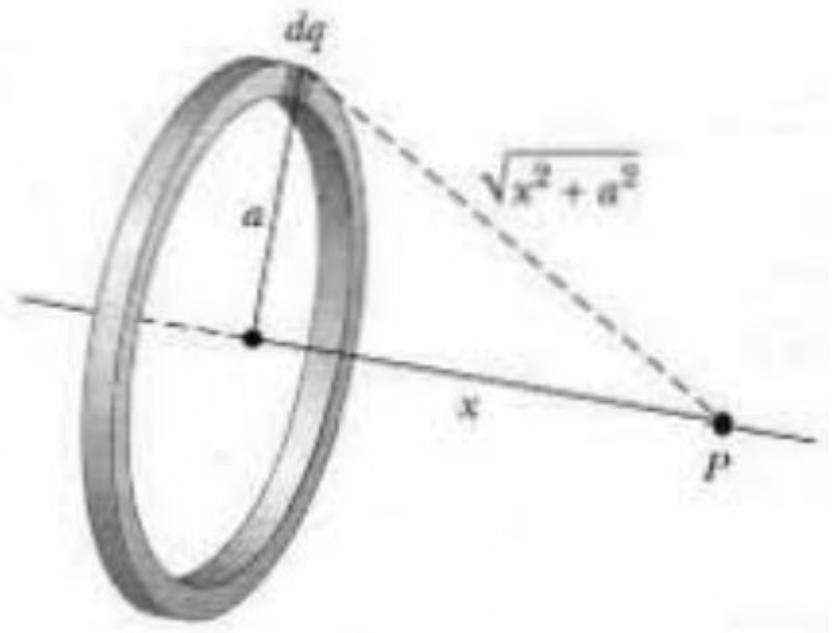
Encontre o **potencial elétrico** e o **campo elétrico** em um ponto, situado no **eixo** de um **anel uniformemente carregado** de raio  $a$  e carga total  $Q$ . O **plano** do **anel** é **perpendicular** ao **eixo  $x$** .



# Potencial Elétrico devido a Distribuições Contínuas de Carga

## Exemplo 20.5: Potencial devido a um Anel Uniformemente Carregado

Encontre o **potencial elétrico** e o **campo elétrico** em um ponto, situado no **eixo** de um **anel uniformemente carregado** de raio  $a$  e carga total  $Q$ . O **plano** do **anel** é **perpendicular** ao **eixo  $x$** .



Quadro:

$$V = k_e Q / \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$E_x = k_e Q x / (x^2 + a^2)^{3/2}, \quad E_y = E_z = 0 \quad (\text{ou } \mathbf{E} = k_e Q x \mathbf{i} / (x^2 + a^2)^{3/2})$$

(como na aula 2)

# Potencial Elétrico devido a Distribuições Contínuas de Carga

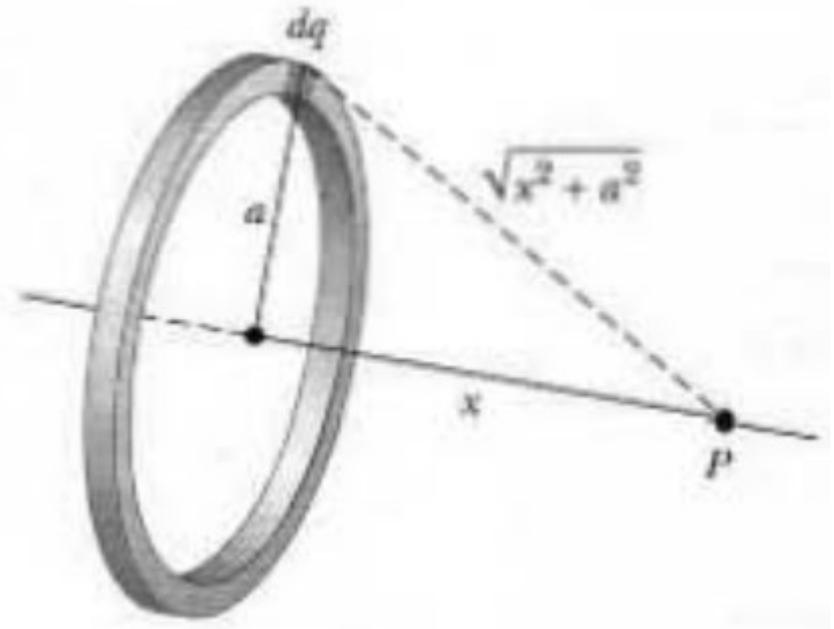
## Exercício

$$V = k_e Q / \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$E_x = k_e Q x / (x^2 + a^2)^{3/2}$$

Qual é o **potencial elétrico** no **centro** do anel uniformemente carregado?

Qual é a **implicação** para este resultado que tem o valor do campo no centro?



# Potencial Elétrico devido a Distribuições Contínuas de Carga

## Exercício

$$V = k_e Q / \sqrt{x^2 + a^2}$$

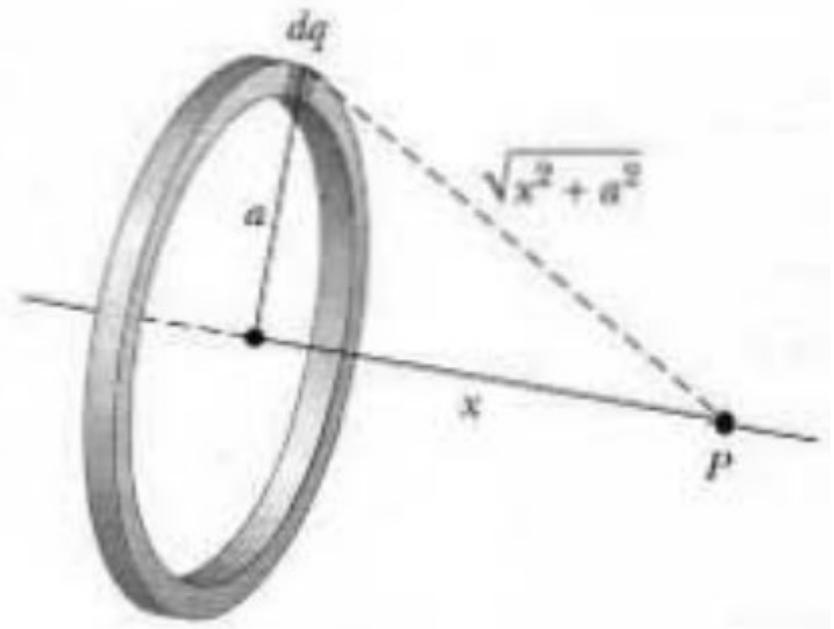
$$E_x = k_e Q x / (x^2 + a^2)^{3/2}$$

Qual é o **potencial elétrico** no **centro** do anel uniformemente carregado?

Qual é a **implicação** para este resultado que tem o valor do campo no centro?

$$V = k_e Q / a$$

$E_x = 0 \Rightarrow V$  é um **máximo** ( $Q > 0$ ) ou **mínimo** ( $Q < 0$ ).



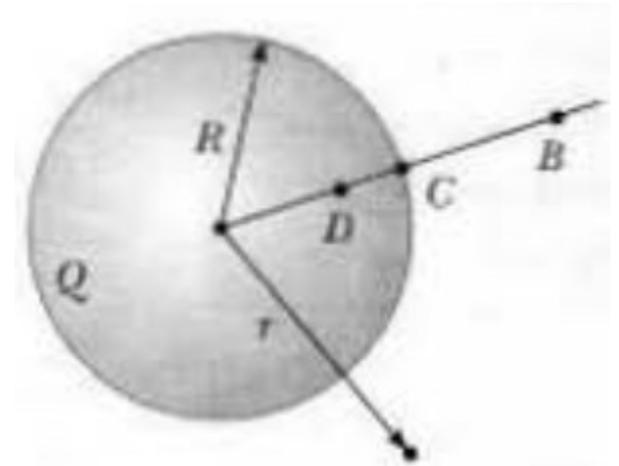
# Potencial Eléctrico devido a Distribuições Contínuas de Carga

## Exemplo 20.6: Potencial de uma Esfera Uniformemente Carregada

Uma **esfera sólida isolante** de raio  $R$  tem uma **carga total**  $Q$ , que está **uniformemente distribuída** pelo **volume** da esfera.

(a) Encontre o **potencial eléctrico** em um ponto **fora** da esfera, ou seja, para  $r > R$ . Considere o potencial como sendo zero em  $r = \infty$ .

(b) Encontre o **potencial** em um ponto **dentro** da esfera carregada, ou seja, para  $r < R$ .



# Potencial Eléctrico devido a Distribuições Contínuas de Carga

## Exemplo 20.6: Potencial de uma Esfera Uniformemente Carregada

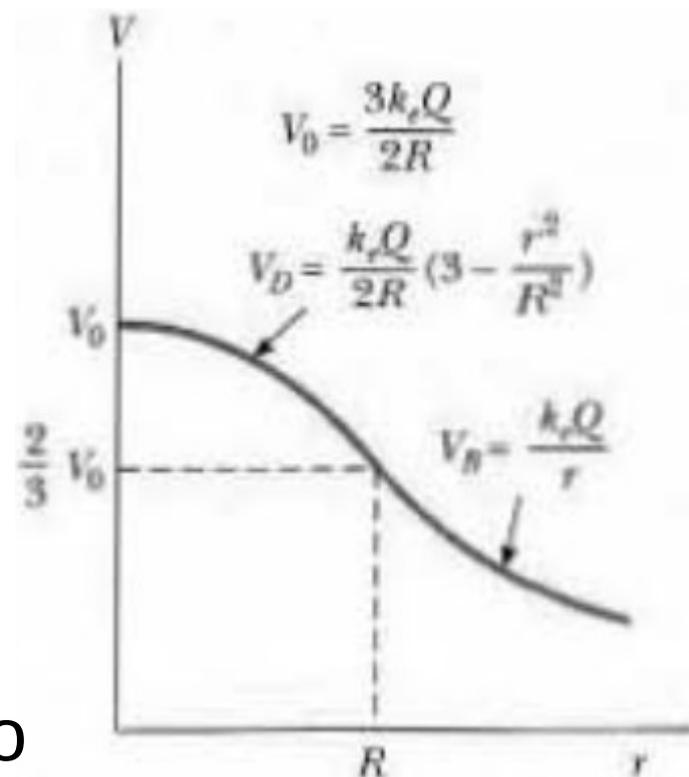
Uma **esfera sólida isolante** de raio  $R$  tem uma **carga total**  $Q$ , que está **uniformemente distribuída** pelo **volume** da esfera.

(a) Encontre o **potencial eléctrico** em um ponto **fora** da esfera, ou seja, para  $r > R$ . Considere o potencial como sendo zero em  $r = \infty$ .

(b) Encontre o **potencial** em um ponto **dentro** da esfera carregada, ou seja, para  $r < R$ .

**Quadro:** (a)  $V = k_e Q/r$   $r > R$

(b)  $V = k_e Q/2R (3 - r^2/R^2)$   $r < R$



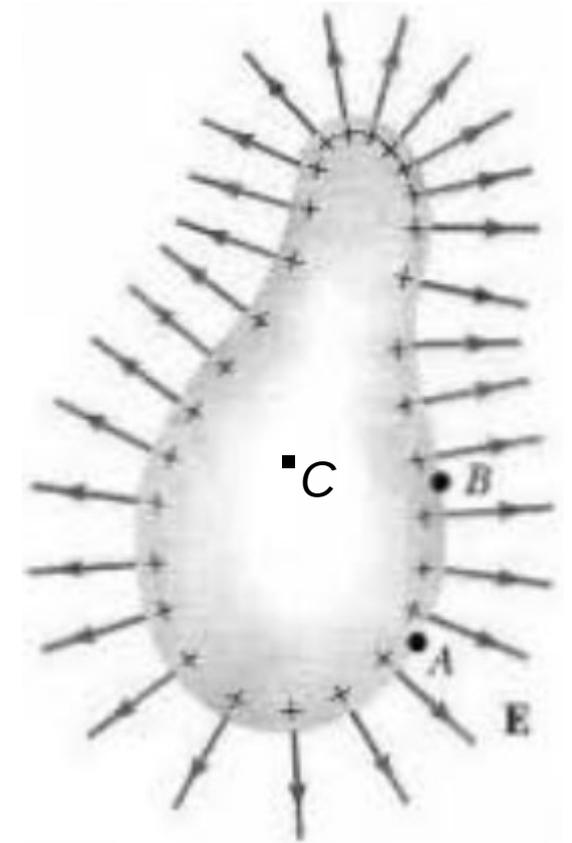
# Potencial Elétrico de um Condutor Carregado

## Aula 4:

Num **condutor carregado** em **equilíbrio eletrostático**:

- Toda a **carga líquida** esta na **superfície**
- O **campo elétrico** no **interior** é **zero**
- O **campo** na **superfície** é **perpendicular** a esta.

Como será o **potencial** em várias posições do condutor?



# Potencial Elétrico de um Condutor Carregado

Como será o potencial em várias posições do condutor?

Entre **qualquer par** de **pontos** (na superfície ou não) há um **caminho** que passa **inteiramente** pelo **interior** do corpo.

Já que, **ao longo** deste **caminho**, o **campo** é **zero**, podemos calcular

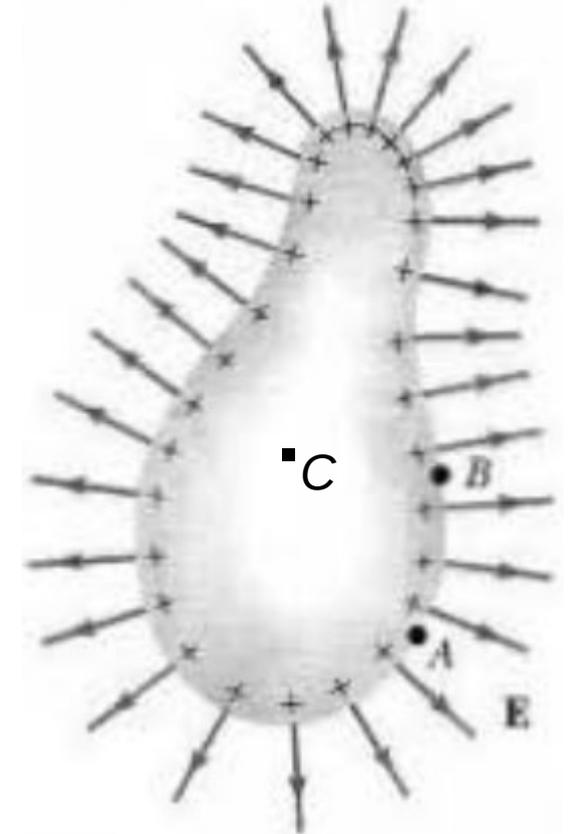
$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

$$V_C - V_A = -\int_A^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$\Rightarrow V_A = V_B = V_C$$

O **potencial** é **igual** em **todos** os **pontos**!

Um **condutor** em **equilíbrio eletrostático** está **inteiramente** no **mesmo potencial elétrico**.



# Potencial Eléctrico de um Condutor Carregado

Exemplo: Uma esfera Metálica

Raio  $R$  e carga líquida  $Q$ :

Campo elétrico:

$r > R$ :  $k_e Q/r^2$  (como uma **carga pontual**)

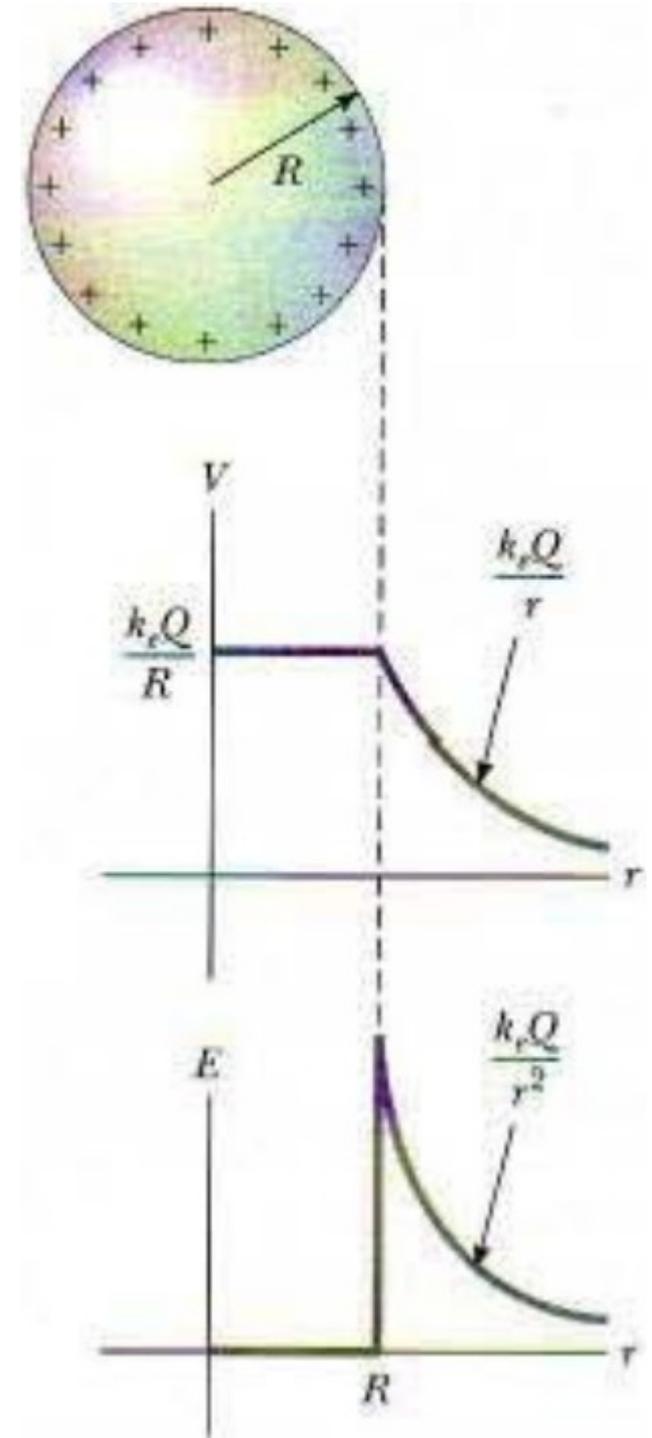
$r < R$ : 0

Potencial:

$r > R$ :  $k_e Q/r$  (como uma **carga pontual**)

$r < R$ :  $k_e Q/R$

confirmando os resultados das aulas 2 e 4.



# Potencial Elétrico de um Condutor Carregado

E num corpo de forma irregular?

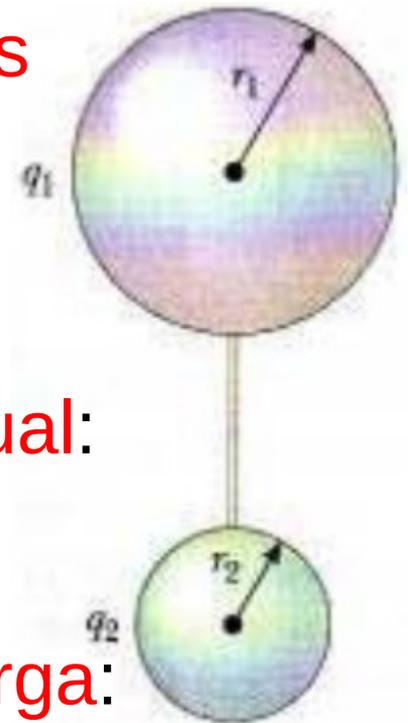
Considerando este corpo consistindo de **duas esferas** ligadas por um **fio condutor**, e numa distância tão grande uma da outra, que o campo de uma não influencia a outra.

O **potencial** nas duas **esferas** tem que ser **igual**:

$$k_e \frac{q_1}{r_1} = k_e \frac{q_2}{r_2} \longrightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Calculando as **densidades superficiais** de **carga**:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\left(\frac{q_2}{4\pi r_2^2}\right)}{\left(\frac{q_1}{4\pi r_1^2}\right)} = \frac{q_2}{q_1} \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{r_2}{r_1} \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{r_1}{r_2}$$



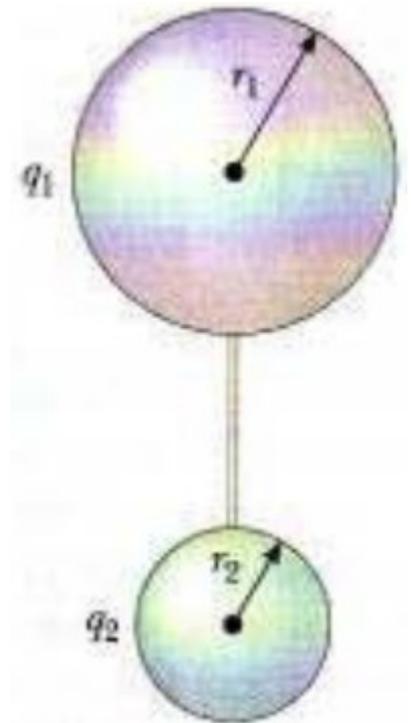
# Potencial Elétrico de um Condutor Carregado

E num corpo de forma irregular?

$$\sigma_2/\sigma_1 = r_1/r_2$$

A **densidade de carga** é maior na **superfície da esfera menor**, ou seja, la onde a **curvatura da superfície é maior**, como afirmado na aula 4.

E já que  $E = \sigma/\epsilon_0$ , o **campo elétrico** perto da **superfície mais curva** é maior também.



# Potencial Elétrico de um Condutor Carregado

Pensando a Física 20.2

Por que a **extremidade** de um **pára-raios** é **pontiaguda**?



# Potencial Elétrico de um Condutor Carregado

Pensando a Física 20.2

Por que a **extremidade** de um **pára-raios** é **pontiaguda**?

Pontiagudo = muito **curvo**  
(**raio** de **curvatura** muito **pequeno**)  
=> **campo elétrico** muito **forte**  
=> alta **probabilidade** de a **descarga** de um **raio** ocorrer lá.



# Potencial Elétrico de um Condutor Carregado

Uma Cavidade dentro de um Condutor em Equilíbrio

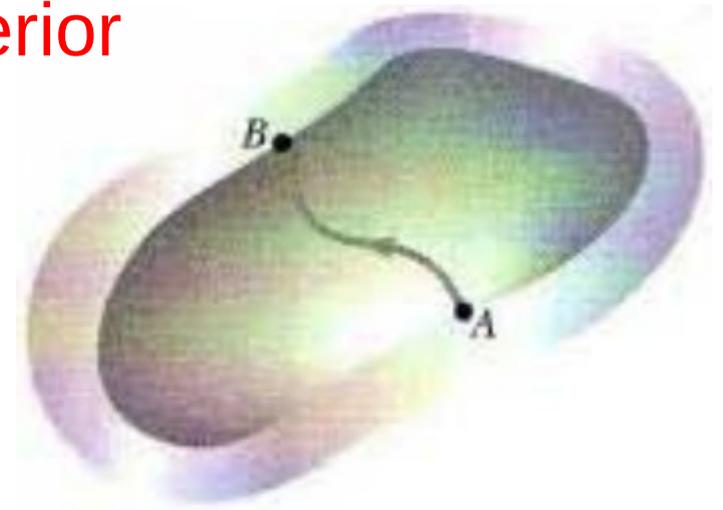
Já que dois pontos na superfície interior devem estar no mesmo potencial, a integral

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

deve dar zero para todos os possíveis caminhos de  $A$  a  $B$ .

Isto só é possível, se  $E = 0$  no interior inteiro da cavidade.

=> Caixa de Faraday (vide aula 4).





Universidade Federal do ABC

# Fenômenos Eletromagnéticos

## FIM PRA HOJE

