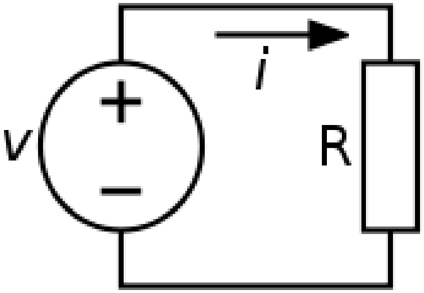
Fenômenos Eletromagnéticos

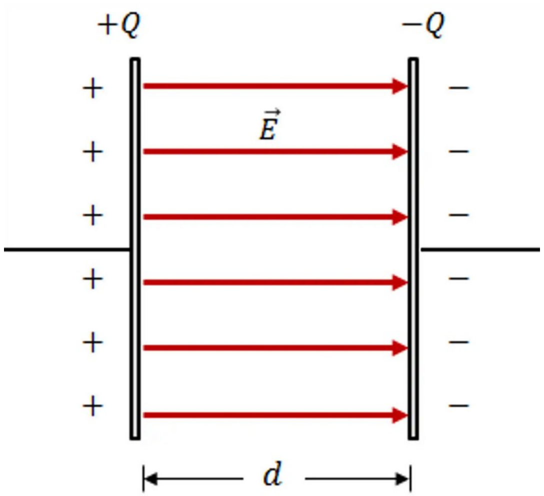
Universidade Federal do ABC

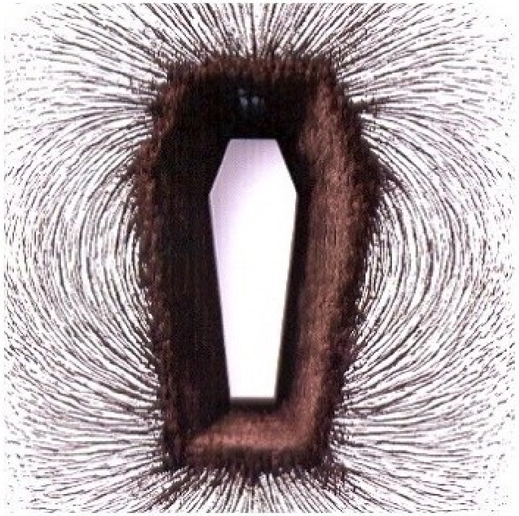
06. Obtenção do valor do campo elétrico com base no potencial, Potencial gerado por distribuições de cargas contínuas e por um condutor carregado

Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/EM.html







Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

Lembrete de Fenômenos Mecânicos:

Relação entre energia potencial e força devido a alguma interação conservativa:

1D: $F_x = -dU/dx$;

$$dU = -F_x dx \Rightarrow U(x) = \int_{x0}^{x} dU = -\int_{x0}^{x} F_x \, dx,$$

onde x_0 é a posição do ponto zero da energia potencial

3D: $F_x = -\partial U/\partial x$, $F_y = -\partial U/\partial y$, $F_z = -\partial U/\partial z \Rightarrow \mathbf{F} = -\nabla U$;

$$dU = -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \Rightarrow U(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}0}^{\mathbf{r}} dU = -\int_{\mathbf{r}0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

onde $\mathbf{r}_0$ é a posição do ponto zero da energia potencial

Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

Já que, para uma carga de prova q_0, $V = U/q_0$ e $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_0$, dividir as relações do slide anterior por q_0 dá:

1D: $E_x = -dV/dx$;

$$dV = -E_x dx \Rightarrow V(x) = \int_{x0}^{x} dV = -\int_{x0}^{x} E_x\, dx$$

3D: $E_x = -\partial V/\partial x$, $E_y = -\partial V/\partial y$, $E_z = -\partial V/\partial z \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V$;

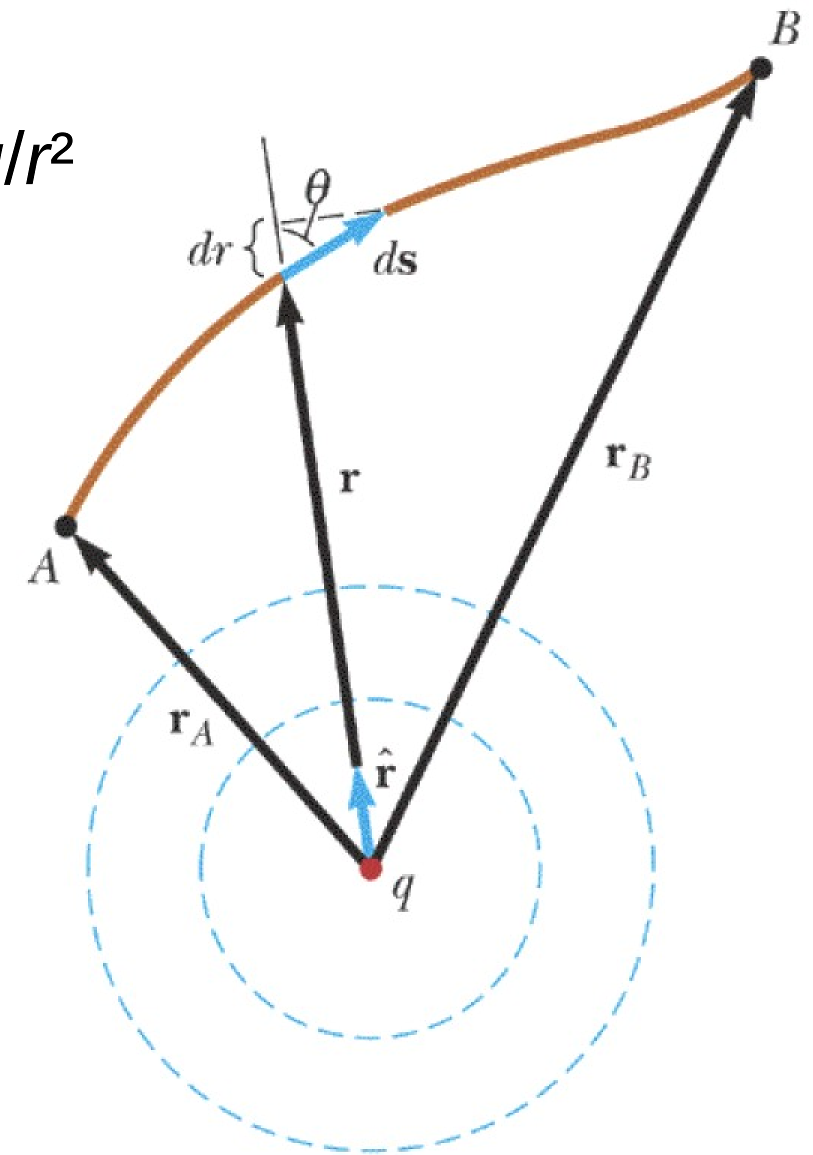
$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \Rightarrow V(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}0}^{\mathbf{r}} dV = -\int_{\mathbf{r}0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

O campo elétrico é o gradiente negativo do potencial elétrico, e
o potencial elétrico é a integral de linha negativa do campo a partir do ponto zero.
Frequentemente, o ponto zero é escolhido no infinito:
$V(\mathbf{r}) = \int_{\infty}^{\mathbf{r}} dV = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$

Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

Exemplo: Carga pontual

$V = k_e q/r$ <=> $\mathbf{E} = k_e q\mathbf{r\hat{}}/r^2$, $E_r = k_e q/r^2$
como visto na aula anterior.

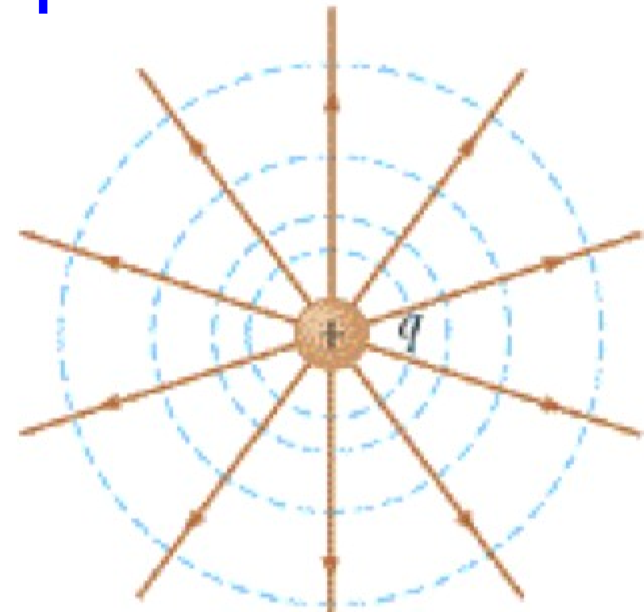


Outro Exemplo

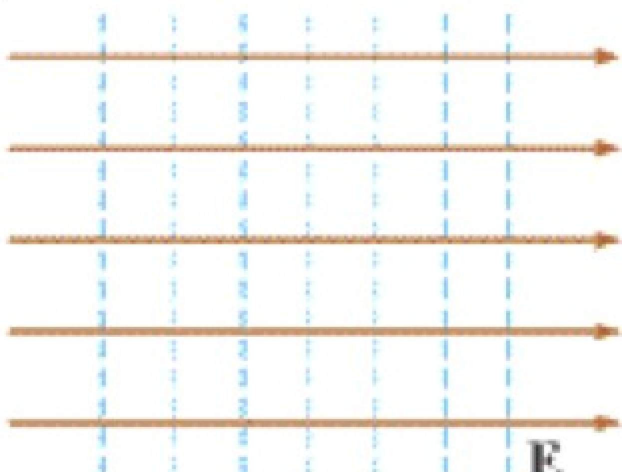
$V = 3x^2y + y^2 + yz$
=>
$E_x = -\partial V/\partial x = -6xy$
$E_y = -\partial V/\partial y = -3x^2 - 2y - z$
$E_z = -\partial V/\partial z = -y$
$\mathbf{E} = (-6xy\ , -3x^2 - 2y - z, -y)$

Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

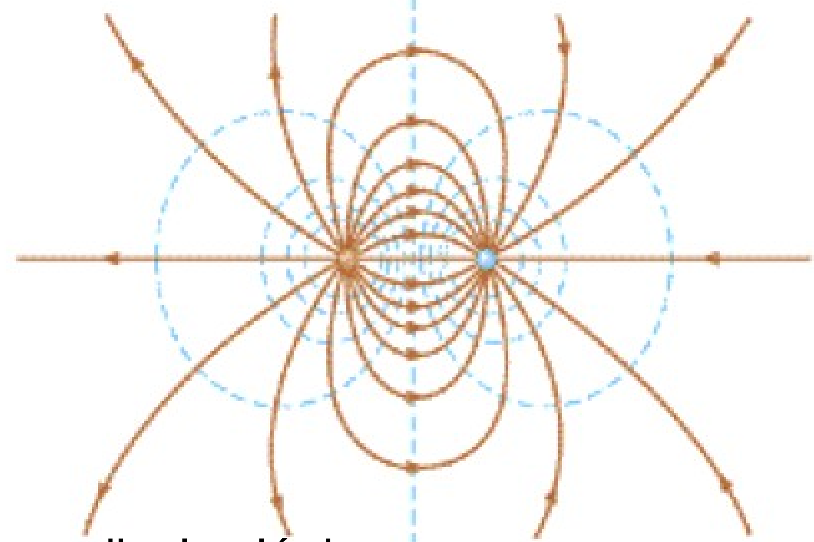
Um resultado disso é, que superfícies equipotenciais são perpendiculares a linhas de campo elétrico, como também já visto na aula anterior



carga pontual



campo uniforme



dipolo elétrico

Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

Enigma Rápido 20.5

Suponha que você conhece o valor do potencial elétrico em um ponto.
Você pode encontrar o campo elétrico nesse ponto a partir dessa informação?

Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

Enigma Rápido 20.5

Suponha que você conhece o valor do potencial elétrico em um ponto.
Você pode encontrar o campo elétrico nesse ponto a partir dessa informação?

Não, para conseguir calcular o gradiente (negativo) de uma função (escalar) em uma posição, é preciso conhecer seu valor nesta e no entorno desta.

Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

Enigma Rápido 20.6

Se o potencial elétrico for constante em uma região, o que você pode concluir sobre o campo elétrico nessa região?

Se o campo elétrico for zero em uma região, o que você pode concluir sobre o potencial elétrico nessa região?

Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

Enigma Rápido 20.6

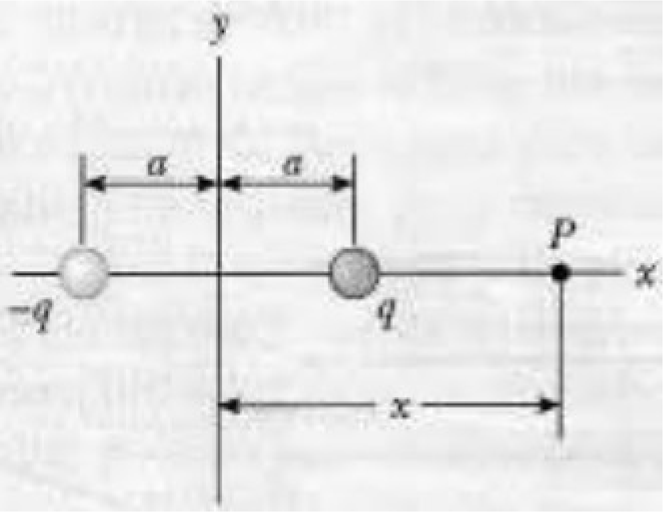
Se o potencial elétrico for constante em uma região, o que você pode concluir sobre o campo elétrico nessa região?
Se o campo elétrico for zero em uma região, o que você pode concluir sobre o potencial elétrico nessa região?

V const. $\Leftrightarrow$ $E = 0$ nesta região,
já que o gradiente de uma função constante é nulo,
e a integral de uma função nula é constante.

Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

Exemplo 20.4 O Potencial Elétrico de um Dipolo

Um dipolo elétrico consiste em duas cargas iguais e opostas separadas por uma distância $2a$, como na figura. O dipolo está ao longo do eixo x e está centrado na origem.



Calcule

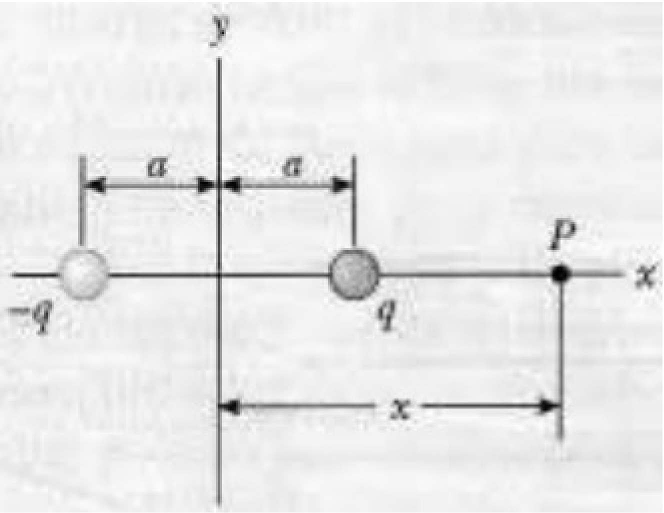
(a) o potencial elétrico em qualquer ponto P ao longo do eixo x e

(b) o campo elétrico em pontos muito distantes do dipolo.

Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

Exemplo 20.4 O Potencial Elétrico de um Dipolo

Um dipolo elétrico consiste em duas cargas iguais e opostas separadas por uma distância 2*a*, como na figura. O dipolo está ao longo do eixo *x* e está centrado na origem.



Calcule

(a) o potencial elétrico em qualquer ponto *P* ao longo do eixo *x* e

(b) o campo elétrico em pontos muito distantes do dipolo.

Quadro

(a) $V = 2k_e qa/(x^2 - a^2)$

(b) $E_x = 4k_e qa/x^3$ prop. x^{-3}, como visto na aula 2

Obtendo o Campo Elétrico a partir do Potencial Elétrico

Este exemplo mostra, que para achar o campo elétrico, frequentemente é mais fácil

- primeiro calcular o potencial, e
- depois, o campo através do gradiente,

do que calculá-lo como na aula 2,

já que o potencial é uma grandeza escalar (só um número em lugar de três).

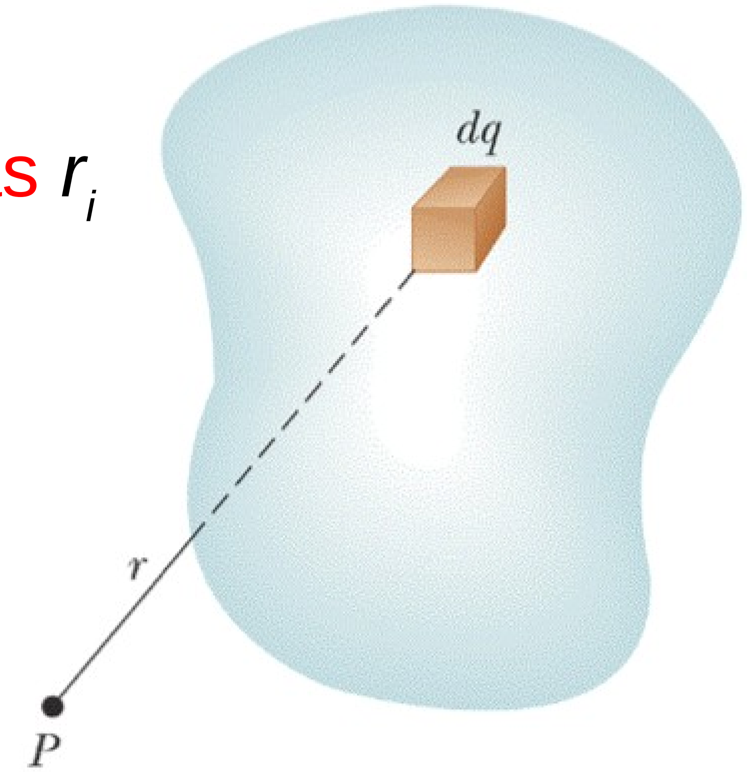
(Mas às vezes, o oposto é mais fácil, calcular o campo como na aula 2, e depois, o potencial através da integral de linha. Tente desenvolver uma intuição para determinar, qual dos dois caminhos é mais prático em qual caso.)

Potencial Elétrico devido a Distribuições Contínuas de Carga

Aula anterior:

O potencial devido a um conjunto de cargas pontuais q_i nas distâncias r_i do ponto de interesse é:

$V = k_e\, \Sigma_i\, q_i / r_i$

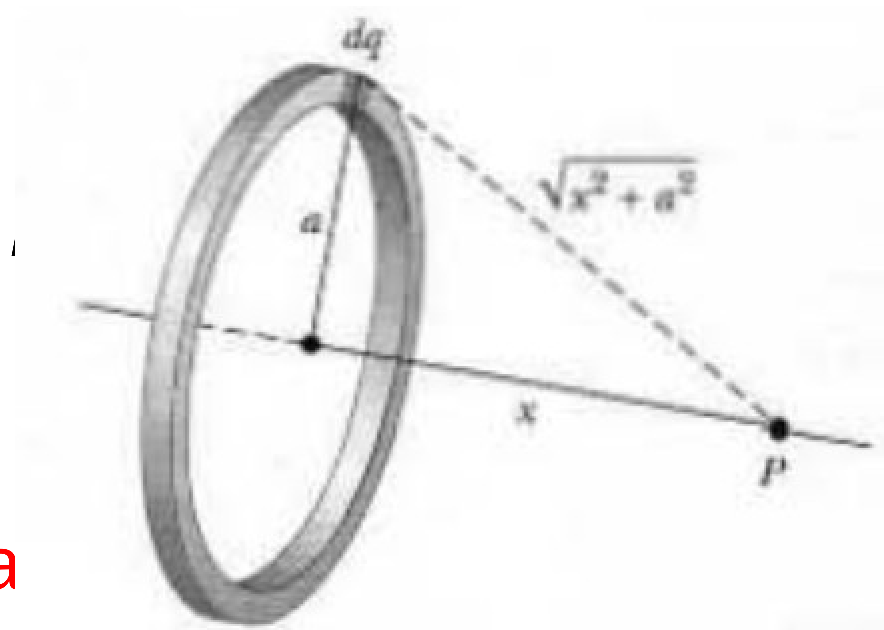


Para uma distribuição contínua de carga, podemos dividi-la em "carguinhas infinitestimais" dq na distância (variável) r, e substituir a soma por uma integral, similar ao que fizemos para achar o campo devido a distribuição contínua de carga:

$V = k_e \int dq/r$

Potencial Elétrico devido a Distribuições Contínuas de Carga

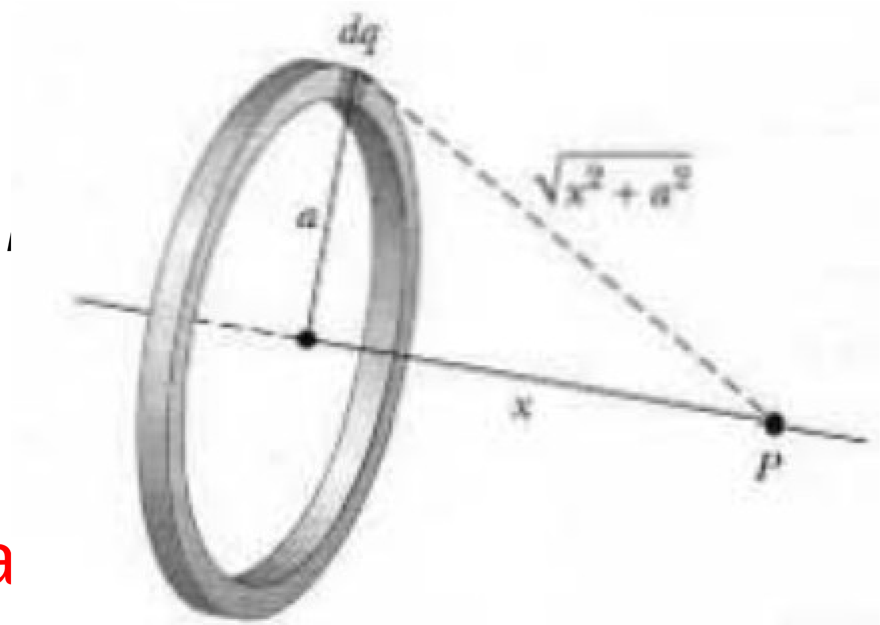
Exemplo 20.5: Potencial devido a um Anel Uniformemente Carregado



Encontre o potencial elétrico e o campo elétrico em um ponto situado no eixo de um anel uniformemente carregado de raio *a* e carga total *Q*.
O plano do anel é perpendicula ao eixo *x*.

Potencial Elétrico devido a Distribuições Contínuas de Carga

Exemplo 20.5: Potencial devido a um Anel Uniformemente Carregado



Encontre o potencial elétrico e o campo elétrico em um ponto situado no eixo de um anel uniformemente carregado de raio a e carga total Q.
O plano do anel é perpendicula ao eixo x.

Quadro:

$V = k_e Q/\sqrt{x^2 + a^2}$

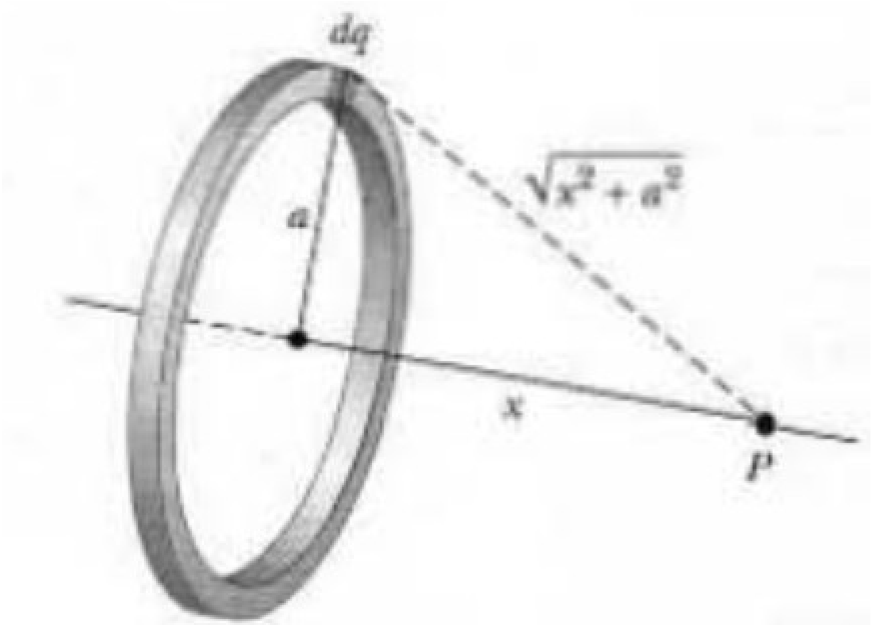
$E_x = k_e Qx/(x^2 + a^2)^{3/2}$, $E_y = E_z = 0$ (ou $\mathbf{E} = k_e Qx\mathbf{i}/(x^2 + a^2)^{3/2}$)
(como na aula 2)

Potencial Elétrico devido a Distribuições Contínuas de Carga

Exercício

$V = k_e Q/\sqrt{x^2 + a^2}$

$E_x = k_e Qx/(x^2 + a^2)^{3/2}$



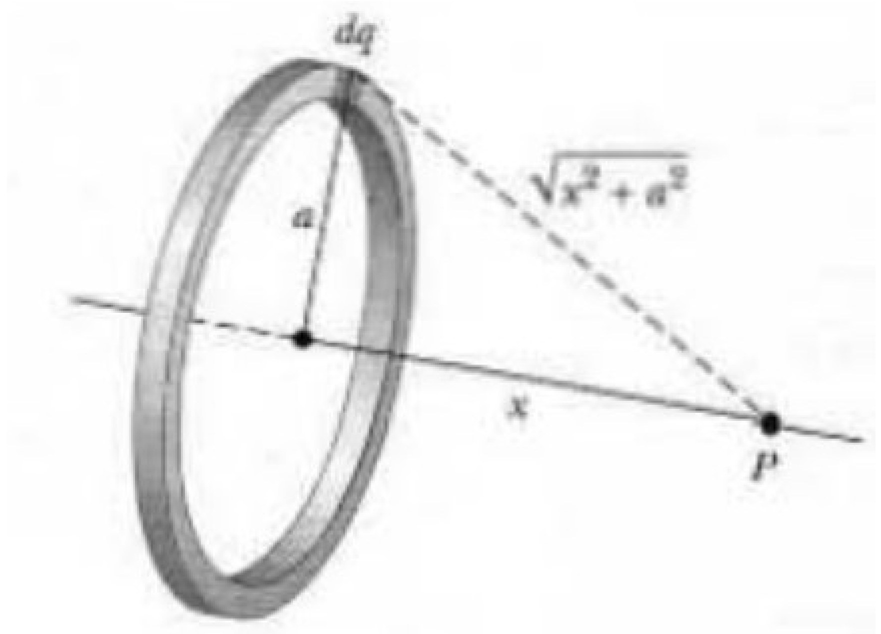
Qual é o potencial elétrico no centro do anel uniformemente carregado?
Qual é a implicação para este resultado que tem o valor do campo no centro?

Potencial Elétrico devido a Distribuições Contínuas de Carga

Exercício

$V = k_e Q/\sqrt{x^2 + a^2}$

$E_x = k_e Qx/(x^2 + a^2)^{3/2}$



Qual é o potencial elétrico no centro do anel uniformemente carregado?

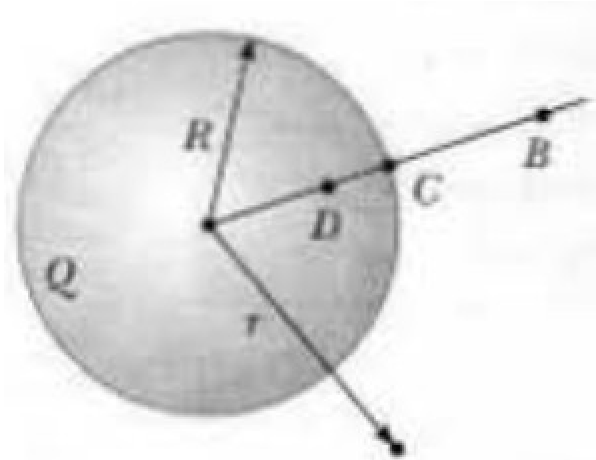
Qual é a implicação para este resultado que tem o valor do campo no centro?

$V = k_e Q/a$

$E_x = 0 \Rightarrow V$ é um máximo ($Q > 0$) ou mínimo ($Q < 0$).

Potencial Elétrico devido a Distribuições Contínuas de Carga

Exemplo 20.6: Potencial de uma Esfera Uniformemente Carregada



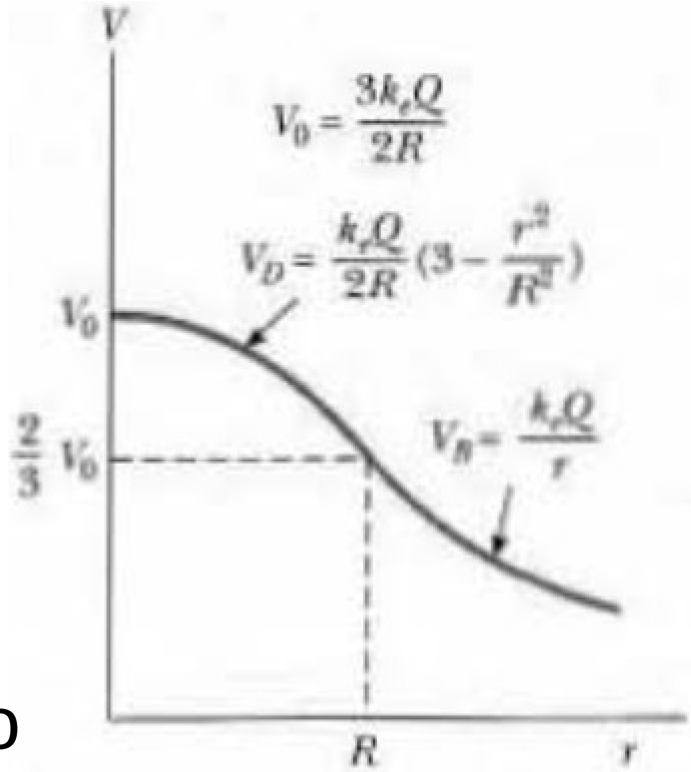
Uma esfera sólida isolante de raio R tem uma carga total Q, que está uniformemente distribuída pelo volume da esfera.

(a) Encontre o potencial elétrico em um ponto fora da esfera, ou seja, para $r > R$. Considere o potencial como sendo zero em $r = \infty$.

(b) Encontre o potencial em um ponto dentro da esfera carregada, ou seja, para $r < R$.

Potencial Elétrico devido a Distribuições Contínuas de Carga

Exemplo 20.6: Potencial de uma Esfera Uniformemente Carregada



Uma esfera sólida isolante de raio R tem uma carga total Q, que está uniformemente distribuída pelo volume da esfera.

(a) Encontre o potencial elétrico em um ponto fora da esfera, ou seja, para $r > R$. Considere o potencial como sendo zero em $r = \infty$.

(b) Encontre o potencial em um ponto dentro da esfera carregada, ou seja, para $r < R$.

Quadro: (a) $V = k_eQ/r \quad r > R$

(b) $V = k_eQ/2R\,(3 - r^2/R^2) \quad r < R$

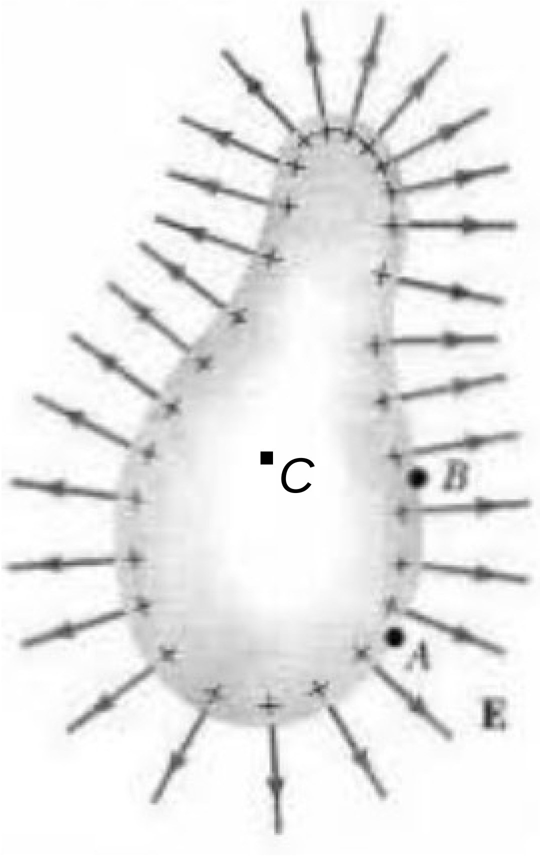
Potencial Elétrico de um Condutor Carregado

Aula 4:

Num condutor carregado em equilíbrio eletrostático:

- Toda a carga líquida esta na superfície
- O campo elétrico no interior é zero
- O campo na superfície é perpendicular a esta.

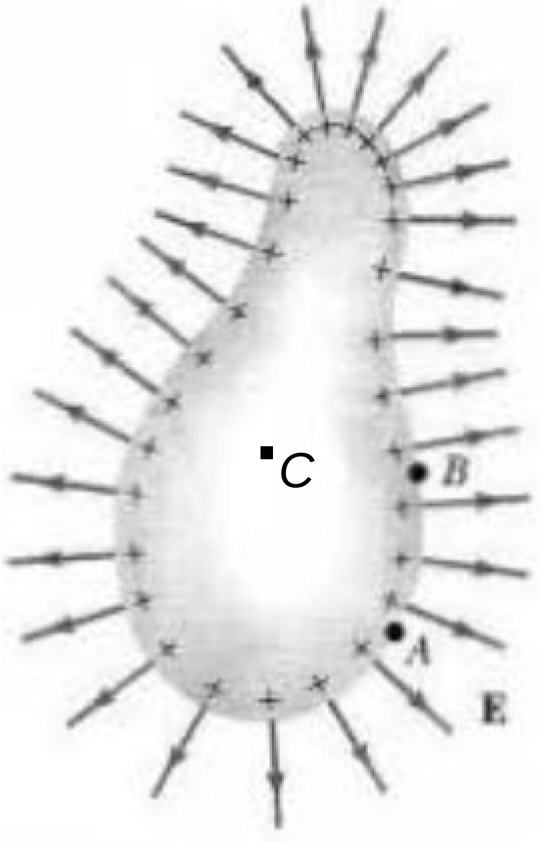
Como será o potencial em várias posições do condutor?



Potencial Elétrico de um Condutor Carregado

Como será o potencial em várias posições do condutor?

Entre qualquer par de pontos (na superfície ou não) há um caminho que passa inteiramente pelo interior do corpo.



Já que, ao longo deste caminho, o campo é zero, podemos calcular

$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0,$

$V_C - V_A = -\int_A^C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0$

$\Rightarrow V_A = V_B = V_C$

O potencial é igual em todos os pontos!

Um condutor em equilíbrio eletrostático está inteiramente no mesmo potencial elétrico.

Potencial Elétrico de um Condutor Carregado

Exemplo: Uma esfera Metálica

Raio R e carga líquida Q:

Campo elétrico:

$r > R$: $k_e Q/r^2$ (como uma carga pontual)

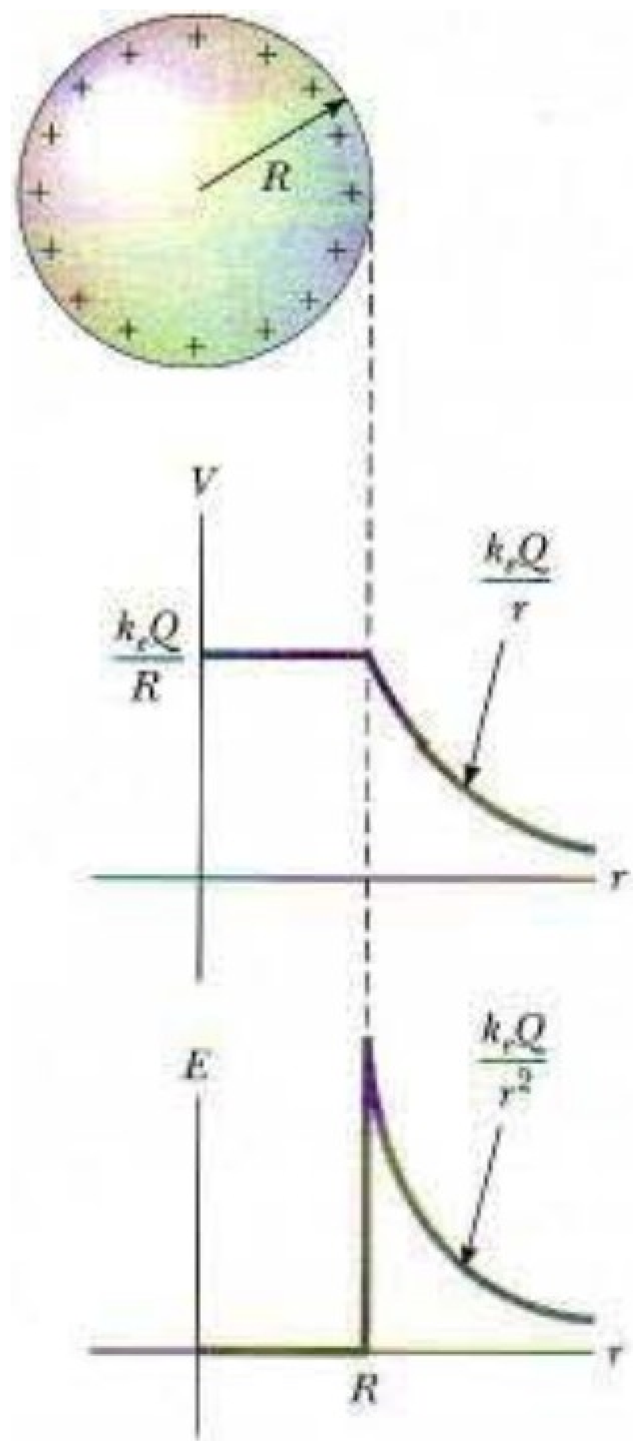
$r < R$: 0

Potencial:

$r > R$: $k_e Q/r$ (como uma carga pontual)

$r < R$: $k_e Q/R$

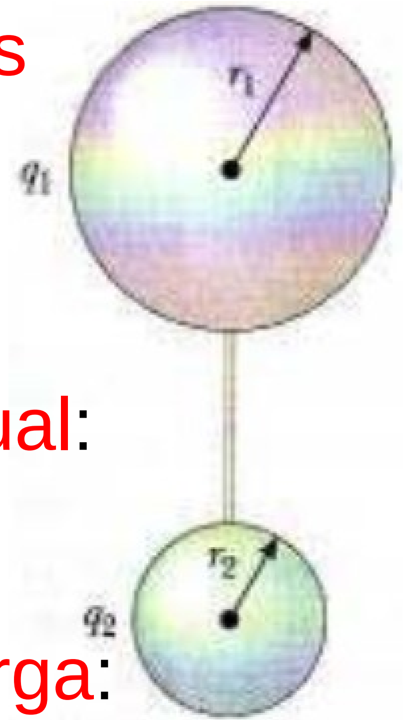
confirmando os resultados das aulas 2 e 4.



Potencial Elétrico de um Condutor Carregado

E num corpo de forma irregular?

Considerando este corpo consistindo de duas esferas ligadas por um fio condutor, e numa distância tão grande uma da outra, que o campo de uma não influencia a outra.



O potencial nas duas esferas tem que ser igual:

$$k_e \frac{q_1}{r_1} = k_e \frac{q_2}{r_2} \longrightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

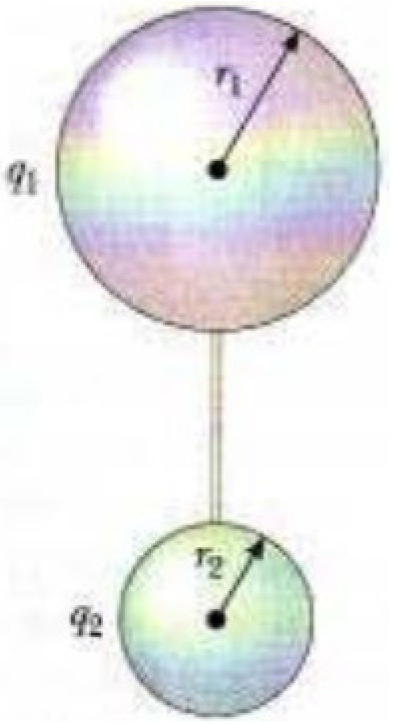
Calculando as densidades superficiais de carga:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\left(\frac{q_2}{4\pi r_2^2}\right)}{\left(\frac{q_1}{4\pi r_1^2}\right)} = \frac{q_2}{q_1}\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{r_2}{r_1}\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Potencial Elétrico de um Condutor Carregado

E num corpo de forma irregular?

$\sigma_2/\sigma_1 = r_1/r_2$



A densidade de carga é maior na superfície da esfera menor, ou seja, la onde a curvatura da superfície é maior, como afirmado na aula 4.

E já que $E = \sigma/\varepsilon_0$, o campo elétrico perto da superfície mais curva e maior também.

Potencial Elétrico de um Condutor Carregado

Pensando a Física 20.2

Por que a extremidade de um pára-raios é pontiaguda?

Potencial Elétrico de um Condutor Carregado

Pensando a Física 20.2

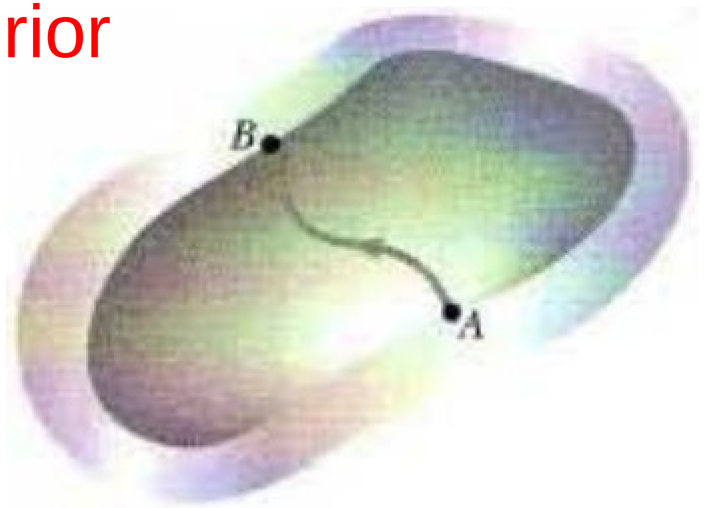
Por que a extremidade de um pára-raios é pontiaguda?

Pontiagudo = muito curvo
(raio de curvatura muito pequeno)
=> campo elétrico muito forte
=> alta probabilidade de a descarga de um raio ocorrer lá.

Potencial Elétrico de um Condutor Carregado

Uma Cavidade dentro de um Condutor em Equilíbrio

Já que dois pontos na superfície interior devem estar no mesmo potencial, a integral



$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$$

deve dar zero para todos os possíveis caminhos de *A* a *B*.

Isto só é possível, se $E = 0$ no interior inteiro da cavidade.

=> Caixa de Faraday (vide aula 4).

FIM PRA HOJE