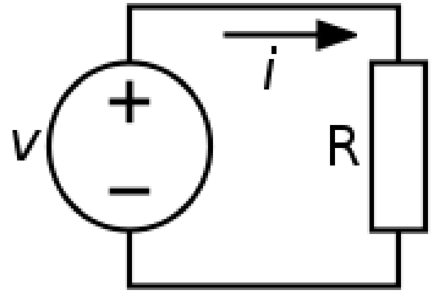
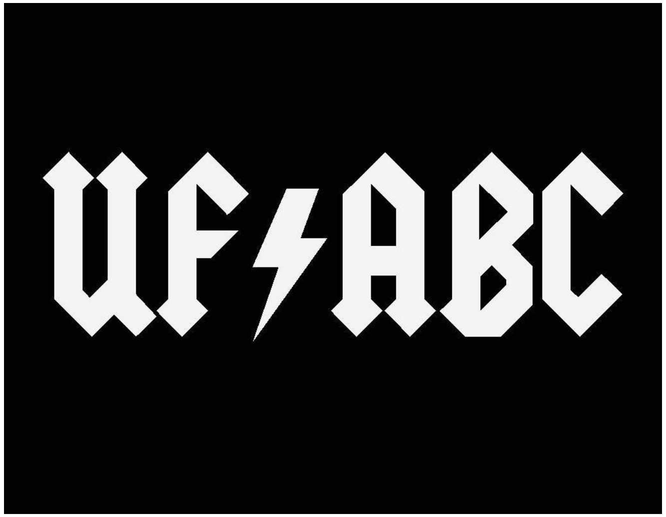
Fenômenos Eletromagnéticos

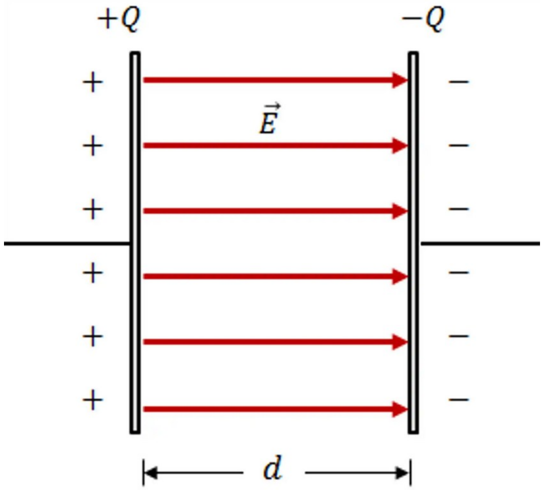
19. Corrente de deslocamento, Equações de Maxwell, Equação da Onda Eletromagnética

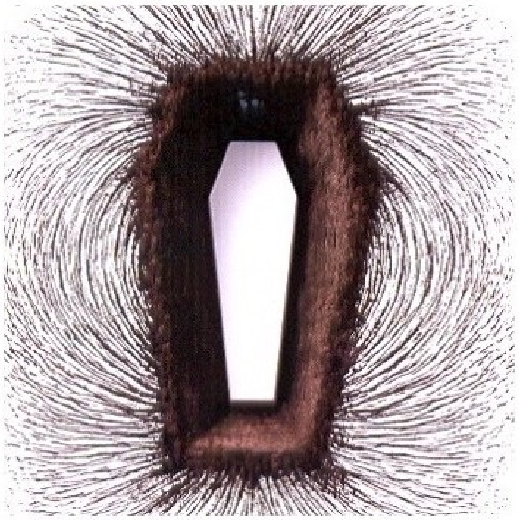
Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br



http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/EM.html



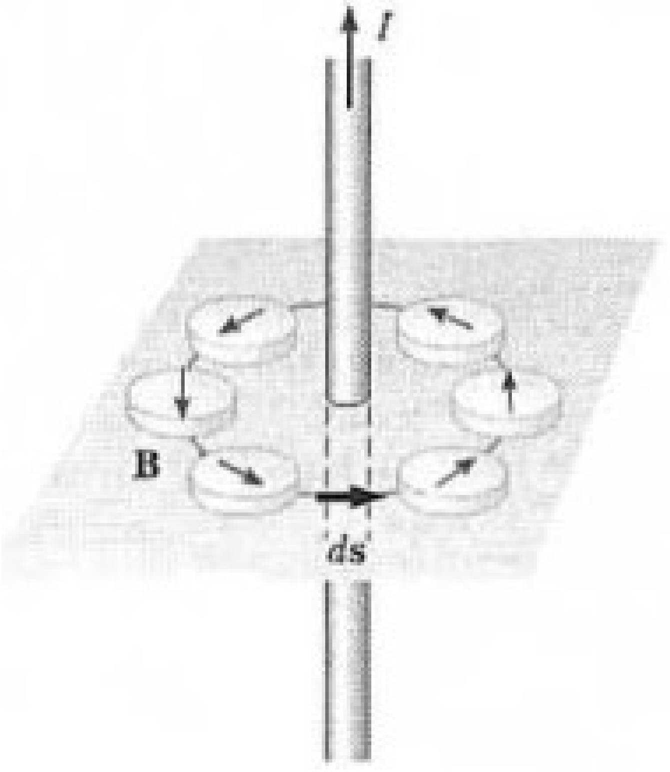




Corrente de Deslocamento e a Lei de Ampère Generalizada

Lembrete: Lei de Ampère:

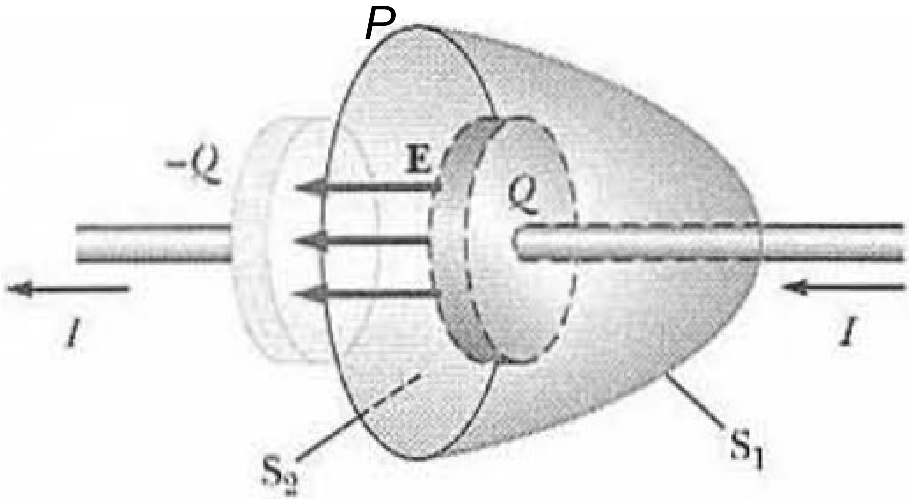
A integral de linha do campo magnético ao longo de uma curva fechada, que pode ser chamada espira amperiana, equivale à corrente atravessando a área limitada pela espira, multipliacada por μ_0 (desde que as correntes envolvidas são constantes):



$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

Corrente de Deslocamento e a Lei de Ampère Generalizada

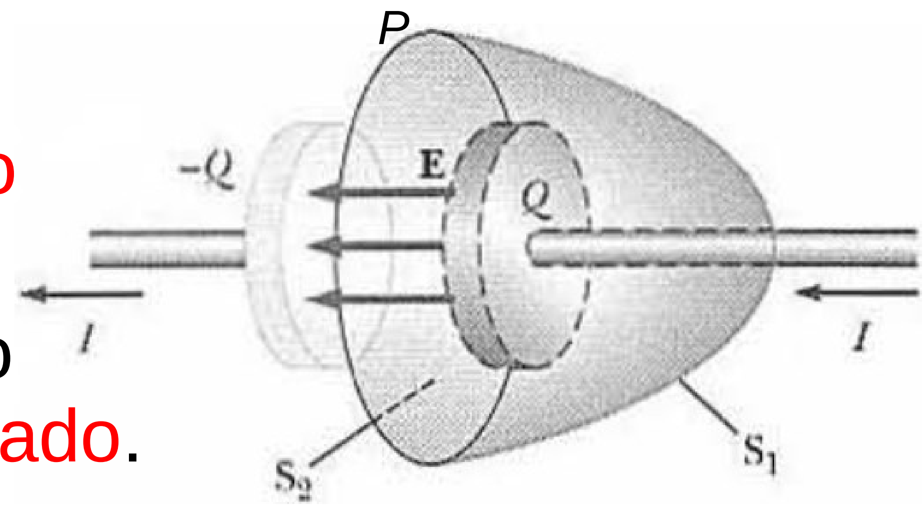
Porém, olhando para este caso de uma corrente carregando um capacitor: Ambas as áreas S_1 e S_2 são limitadas pela espira *P*, mas S_1 é atravessada por *I*, e S_2, por corrente nenhuma!



Isto, por que a corrente "termina" em uma das placas do capacitor.

Corrente de Deslocamento e a Lei de Ampère Generalizada

Como consertar?



Não há corrente atravessando S_2, mas sim, um campo elétrico, e este varia enquanto o capacitor está sendo carregado.

A variação do fluxo do campo elétrico através de S_2 é proporcional ao aumento de carga na placa direita do capacitor que é proporcional à corrente I.

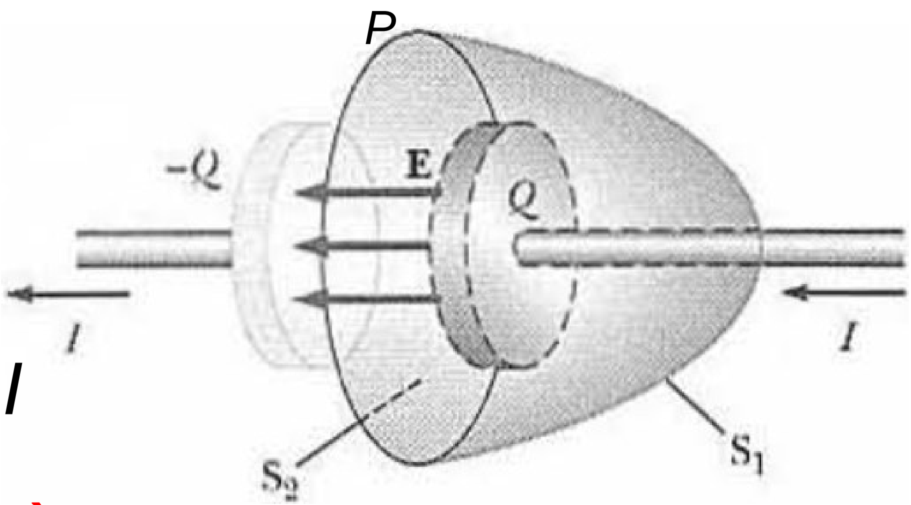
=> Conseguimos "salvar" a Lei de Ampère levando em conta esta variação do fluxo de campo elétrico.

Definimos a corrente de deslocamento:

$I_d \equiv \epsilon_0\, d\Phi_E/dt$ (Bom exercício: Confira que $\epsilon_0\, d\Phi_E/dt$ tem unidades de corrente)

Corrente de Deslocamento e a Lei de Ampère Generalizada

Quanto é I_d neste caso?



$I_d \equiv \epsilon_0\, d\Phi_E/dt = \epsilon_0\, d(EA)/dt$
$= \epsilon_0 A\, dE/dt = \epsilon_0 A\, d(Q/\epsilon_0 A)/dt$
$= \epsilon_0 A \cdot 1/\epsilon_0 A\, dQ/dt = dQ/dt = I$

=> Substituindo na Lei de Ampère I por I_d, ela dá conta de S_2.

Melhor ainda, usando $I + I_d$, elá dá conta de ambos, S_1 e S_2 e de qualquer superfície por aquela passam correntes e campos elétricos variáveis.

Com esta adição, ela às vezes é chamada Lei de Ampère-Maxwell:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\, d\Phi_E/dt$$

Equações de Maxwell

A Lei de Gauss para o Campo Magnético

Lembrando da Lei de Gauss para o campo elétrico:

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = Q_{\text{int}}/\epsilon_0$$

Existe a lei equivalente para o campo magnético:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = \text{Alguma constante} \times \text{“Carga magnética”}_{\text{int}} = 0$$

Equações de Maxwell

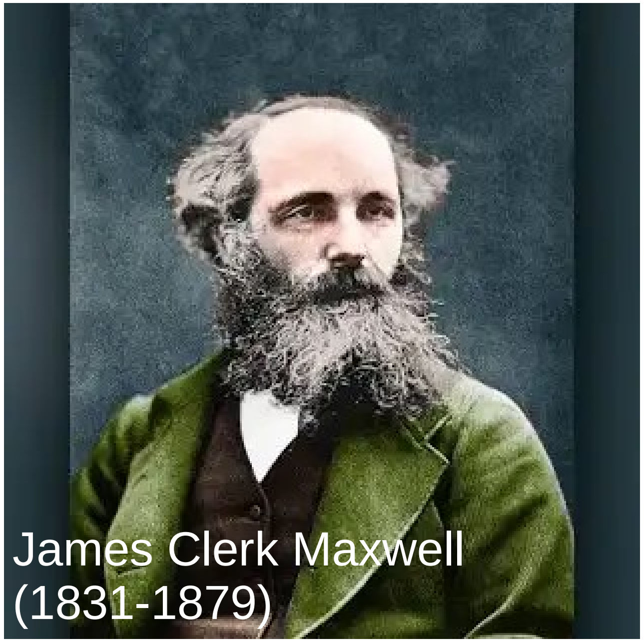
A Lei de Gauss para o Campo Magnético

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Isto é equivalente a dizer que "carga magnética de um tipo isolada" não existe.
Cada polo magnético norte é acompanhado por um polo magnético sul.
A hipotética partícula monopolo magnético nunca foi encontrada.
Outra maneira de entender a Lei de Gauss para e campo magnético: Cada linha do campo magnético que entra pela superfície gaussiana, sai em outro lugar, já que linhas de campo magnético não têm começo nem fim (Ao contrário de linhas de campo elétrico que iniciam e terminam em cargas elétricas).

Equações de Maxwell

As Leis de Maxwell



Em 1861 ou 1862, Maxwell reconheceu, que as duas leis de Gauss, e as de Ampère-Maxwell e de Faraday-Lenz juntas descrevem as interações entre campos elétricos e magnéticos, e permitem previsões como a existência de ondas eletromagnéticas.
Por isto, este conjunto é chamado As Leis de Maxwell ou As Equações de Maxwell.

Equações de Maxwell

As Leis de Maxwell

Lei de Gauss para o campo elétrico: $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = Q/\epsilon_0$

Lei de Gauss para o campo magnético: $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = 0$

Lei de Faraday-Lenz: $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -d\Phi_B/dt$

Lei de Ampère-Maxwell: $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\, d\Phi_E/dt$

Juntas com a fórmula da Força de Lorentz,
$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, as leis de Maxwell formam o fundamento do eletromagnetismo clássico.

Equações de Maxwell

As Leis de Maxwell na Forma Diferencial ou "no Ponto"

As leis de Maxwell na forma apresentada no slide anterior também são chamadas de Leis de Maxwell na forma integral e tratam de volumes e áreas macroscópicos e seus contornos, superfícies e caminhos fechados.
Dividindo as primeiras duas pelo volume e as últimas duas pela área, cargas e correntes contidas viram densidades médias de carga, ρ_m ou $\bar{\rho}$, ou de corrente, J_m ou $\bar{J}$, e fluxos de campos viram valores médias destes campos.
Fazendo, em seguida, os tamanhos dos volumes e áreas tender a zero, densidades e campos médios se tornam densidades e campos locais, ρ, J, **E** e **B**, integrais de linha ao longo de espiras fechadas por unidade de área envolvida se tornam rotacionais ($\nabla\times$, vide FVV) e intregrais de superfície sobre superfícies fechadas por unidade de volume envolvido se tornam diveregentes ($\nabla\cdot$, tb vide FVV).

Equações de Maxwell

As Leis de Maxwell na Forma Diferencial ou "no Ponto"

Assim, elas tratam de propriedades locais dos cargas, correntes e campos e chamamos elas de Leis ou Equações de Maxwell na Forma Diferencial ou "no Ponto":

Lei de Gauss para o campo elétrico: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$

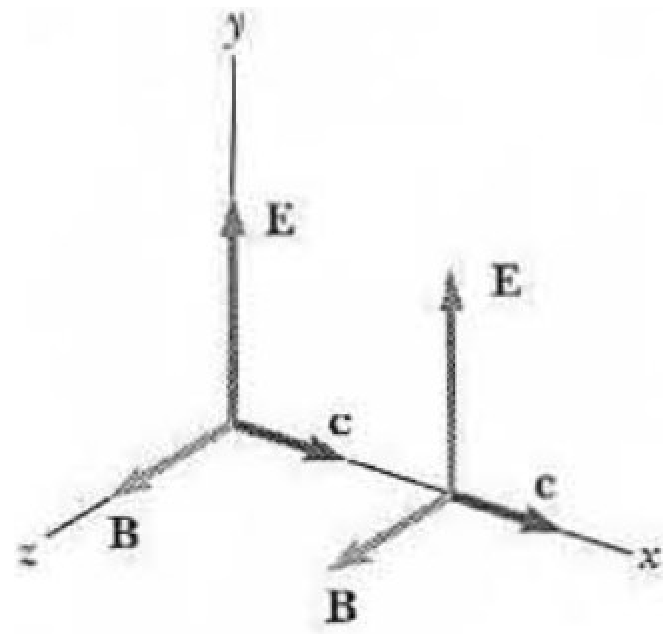
Lei de Gauss para o campo magnético: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Lei de Faraday-Lenz: $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$

Lei de Ampère-Maxwell: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0\, \partial \mathbf{E}/\partial t$

Ondas Eletromagnéticas

São campos eletricos e magnéticos oscilantes propagando-se pelo espaço com velocidade **c**.

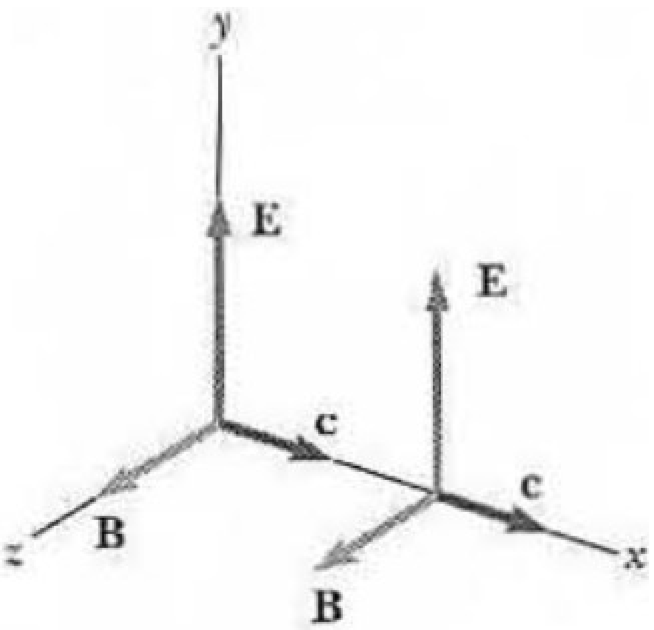


São ondas transversais, i.e., a direção dos campos é perpendicular à direção de propagação.

Os campos elétrico e magnético também são perpendiculares um ou outro, e a propagação é na direção **E** × **B**.
Ilustraremos para um caso simples, como as leis de Maxwell conseguem prever a existência delas.

Ondas Eletromagnéticas

Nos limitamos a uma onda plana linearmente polarizada, i.e.,
o campo elétrico está sempre
na mesma direção (não gira como em ondas circularmente polarizadas)
e é constante em planos perpendiculares à direção de propagação, aqui o eixo *x*.

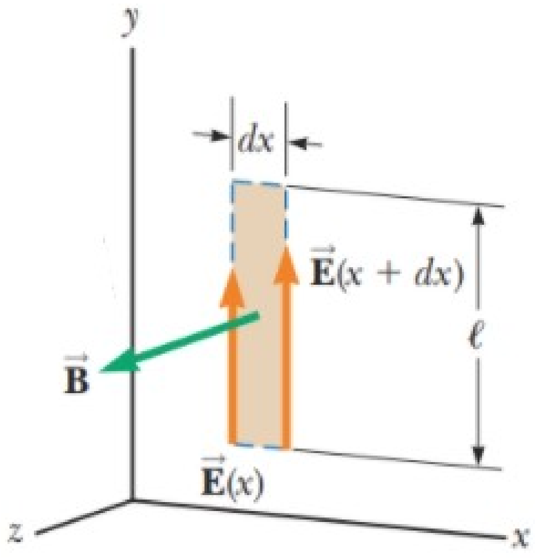


As mesmas coisas vale para o campo magnético.

Escolhendo as coordenadas tal, que o campo elétrico é na direção *y*, o campo magnético, na direção *z*, e a propogação na direção *x*, como nesta figura.

Ondas Eletromagnéticas

Considerando a espira mostrada aqui, que é pequena o suficiente para o campo magnético ser aproximadamente constante, e a variação do campo elétrico ser aproximadamente linear entre x e $x + dx$:



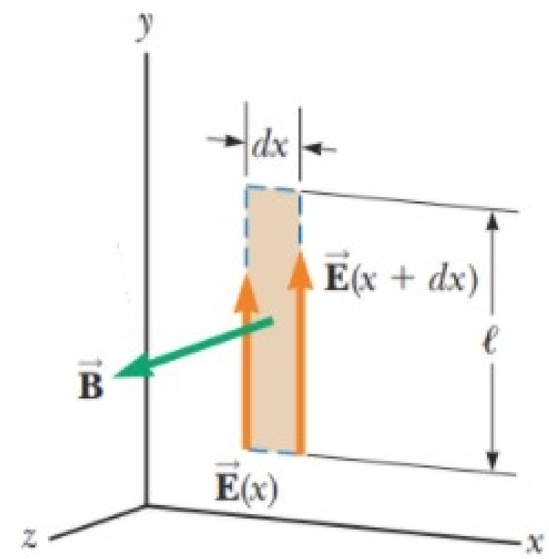
$$E(x + dx, t) = E(x, t) + dE/dx\Big|_{t\ \text{constante}}\, dx$$
$$= E(x, t) + \partial E/\partial x\, dx$$

Ondas Eletromagnéticas

Aplicando a Lei de Faraday,
$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -d\Phi_B/dt$, nela:

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = E(x + dx, t)\ell + 0 - E(x, t)\ell + 0$$
$$= \ell\, \partial E/\partial x\, dx$$

$$d\Phi_B/dt = \ell\, dx\, dB/dt\Big|_{x \text{ constante}} = \ell\, \partial B/\partial t\, dx$$



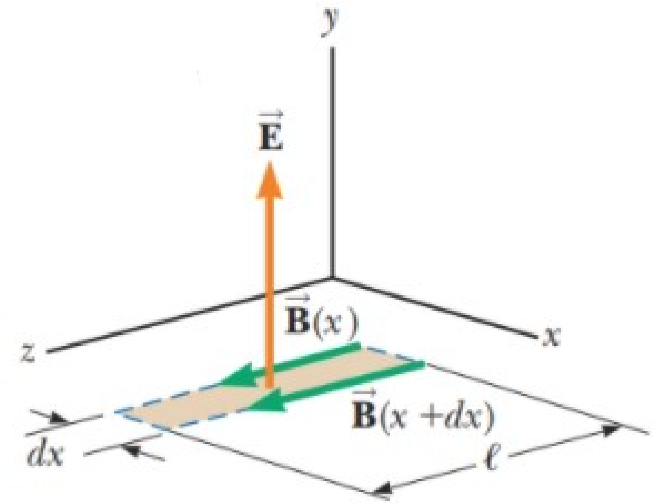
=> Lei de Faraday: $\ell\, \partial E/\partial x\, dx = -\ell\, \partial B/\partial t\, dx$

=> $\partial E/\partial x = -\partial B/\partial t$ (I)

Isto também poderia ter sido obtido pela Lei de Faraday no ponto, já que, no nosso caso, $\partial E/\partial x = \partial E_y/\partial x$ é o único componente não-nulo de $\nabla\times\mathbf{E}$.

Ondas Eletromagnéticas

De maneira análogo, agora considerando esta espira, e aplicando a lei de Ampère-Maxwell, com $I = 0$ (não passa corrente pela espira), $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0\epsilon_0\, d\Phi_E/dt$:



$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = B(x,t)\ell + 0 - B(x+dx,t)\ell + 0$$
$$= -\ell\, \partial B/\partial x\, dx$$

$$d\Phi_E/dt = \ell\, \partial E/\partial t\, dx$$

=> Lei de Ampère-Maxwell: $-\ell\, \partial B/\partial x\, dx = \mu_0\epsilon_0 \ell\, \partial E/\partial t\, dx$

=> $\partial B/\partial x = -\epsilon_0\mu_0\, \partial E/\partial t$ (II)

Poderia ter sido obtido pela Lei de Ampère-Maxwell no ponto, já que, no nosso caso, $-\partial B/\partial x = -\partial B_z/\partial x$ é o único componente não-nulo de $\nabla\times\mathbf{B}$.

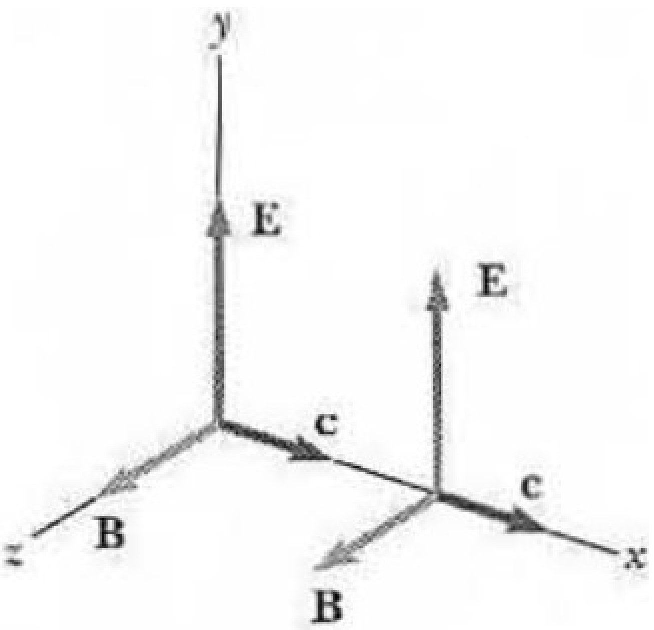
Ondas Eletromagnéticas

Derivando (I) em x e (II) em t:

$\partial^2 E/\partial x^2 = -\partial^2 B/\partial t\partial x = -\partial^2 B/\partial x\partial t$,

$$\partial^2 B/\partial x\partial t = \partial/\partial t\,(-\epsilon_0\mu_0\,\partial E/\partial t)$$
$$= -\epsilon_0\mu_0\,\partial^2 E/\partial t^2$$

$\Rightarrow \partial^2 E/\partial x^2 = \epsilon_0\mu_0\,\partial^2 E/\partial t^2$



Da mesma maneira, derivando (II) em x e (I) em t:

$\partial^2 B/\partial x^2 = -\epsilon_0\mu_0\,\partial^2 E/\partial t\partial x$,

$\partial^2 E/\partial x\partial t = -\partial^2 B/\partial t^2$

$\Rightarrow \partial^2 B/\partial x^2 = \epsilon_0\mu_0\,\partial^2 B/\partial t^2$

Ondas Eletromagnéticas

$\partial^2 E/\partial x^2 = \epsilon_0 \mu_0 \, \partial^2 E/\partial t^2$ e

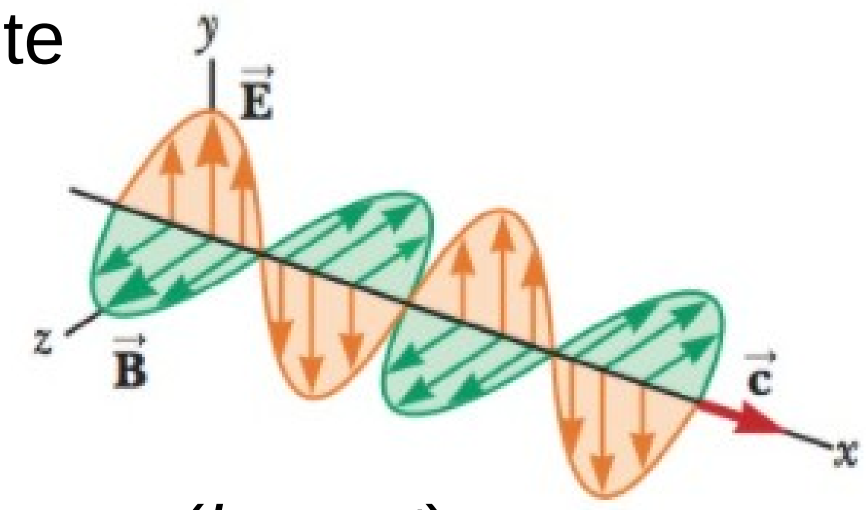
$\partial^2 B/\partial x^2 = \epsilon_0 \mu_0 \, \partial^2 B/\partial t^2$

têm a forma de equações de onda linear, que são satisfeitas para campos da forma ondas que se propagam com velocidade $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2.997\,92 \cdot 10^8$ m/s =: c, que é justamente a velocidade da luz, um indício, de que a luz poderia ser uma onda eletromagnética, o que é correto.

Ondas eletromagnéticas não precisam de um meio para se propagar e a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais, o foi descoberto por Michelson e Morley (1997) e é explicado na teoria da Relatividade (Einstein, 1905, 1905).

Ondas Eletromagnéticas

Um exemplo simples e frequente
são ondas senoidais,
ou harmônicas:



$$E(x, t) = E_{max} \cos(k(x - ct))$$
$$= E_{max} \cos(kx - \omega t)$$
$$B(x, t) = B_{max} \cos(k(x - ct)) = B_{max} \cos(kx - \omega t),$$

onde E_{max} e B_{max} são as amplitudes dos campos elétrico e magnético, ω é a frequência angular da oscilação, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ (f: frequência, T período), k é o número de onda, $k = 2\pi/\lambda$ (λ: comprimento de onda).
Valem as relações
$c = \lambda f = \omega/k$
$E/B = c$ (em particular $E_{max}/B_{max} = c$)

Ondas Eletromagnéticas

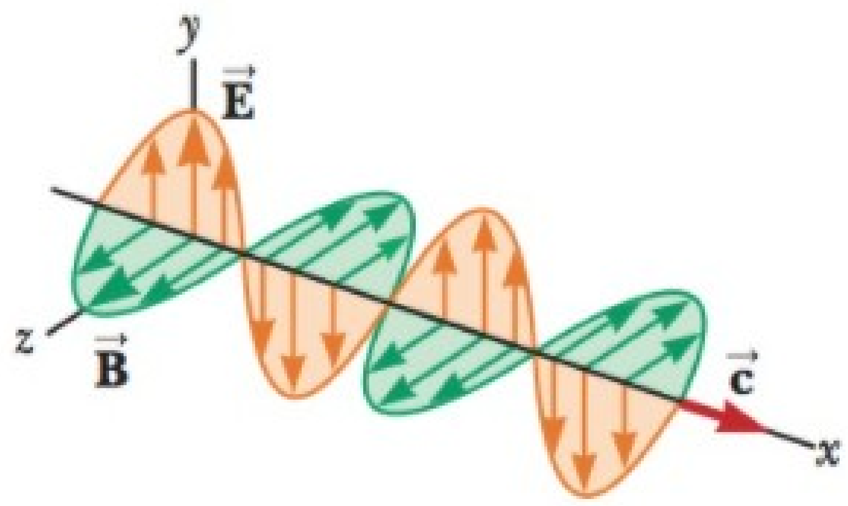
Para ondas eletromagnéticas também vale o princípio de sobreposição: Se duas ou mais ondas se "encontram" (sobrepõem) em uma região, os campos elétrico e magnético na região são as somas dos campos das ondas individuais, o que pode resultar em fenômenos de interferência.

Outros exemplos de ondas eletromagnéticas, além da luz, são ondas de rádio, microondas, infravermelho, ultravioleta, raios-X e gama, que diferem em comprimento de onda/frequência
(=> Estrutura da Matéria).

Ondas Eletromagnéticas

Enigma Rápido 24.1

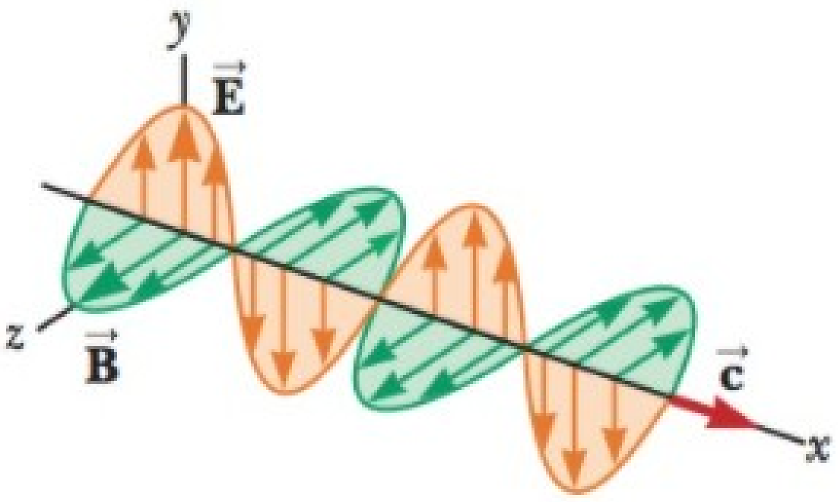
Qual é a diferença de fase entre as duas ondas senoidais representando **E** e **B** nesta figura?



Ondas Eletromagnéticas

Enigma Rápido 24.1

Qual é a diferença de fase entre as duas ondas senoidais representando **E** e **B** nesta figura?



Resposta:

Nula.
Elas atingem seus valores máximos e mínimos ao mesmo tempo.

Ondas Eletromagnéticas

Pensando a Física 24.1

A luz exibe um efeito Doppler que é demonstrado em observações astronômicas pelo desvio das linhas espectrais vindas de galáxias distantes em direção à extremidade vermelho do espectro visível.
A equação para o efeito Doppler da luz não é a mesma que a equação para o som.
Por que essa equação é diferente?

Ondas Eletromagnéticas

Pensando a Física 24.1

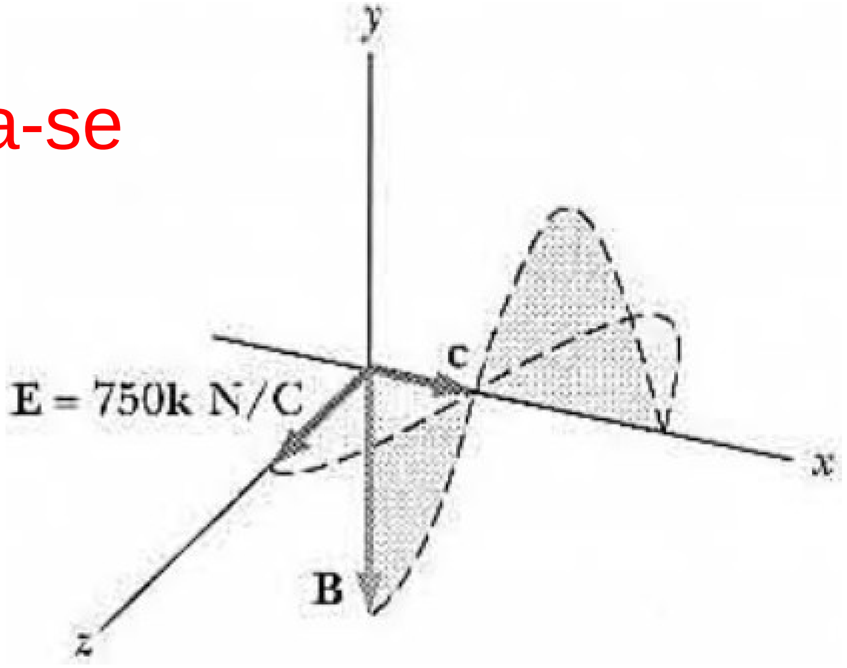
"Resposta"

- O deslocamento para o vermelho dos espectros das galáxias distantes, chamado *redshift* cosmológico, não é um efeito Doppler.
- Para explicar, por que as fórmulas para o efeito Doppler do som e da luz são diferentes, é preciso de conceitos da teoria da Relatividade, o que é fora do escopo desta disciplina.

Ondas Eletromagnéticas

Exemplo 24.1 Uma Onde Eletromagnética

Uma onda eletromagnética com frequência de 40.0 MHz propaga-se no vácuo na direção *x*, como mostrado nesta figura. Em um certo ponto e em um certo instante, o campo elétrico tem seu valor máximo de 750 N/C e está ao longo do eixo *z*.



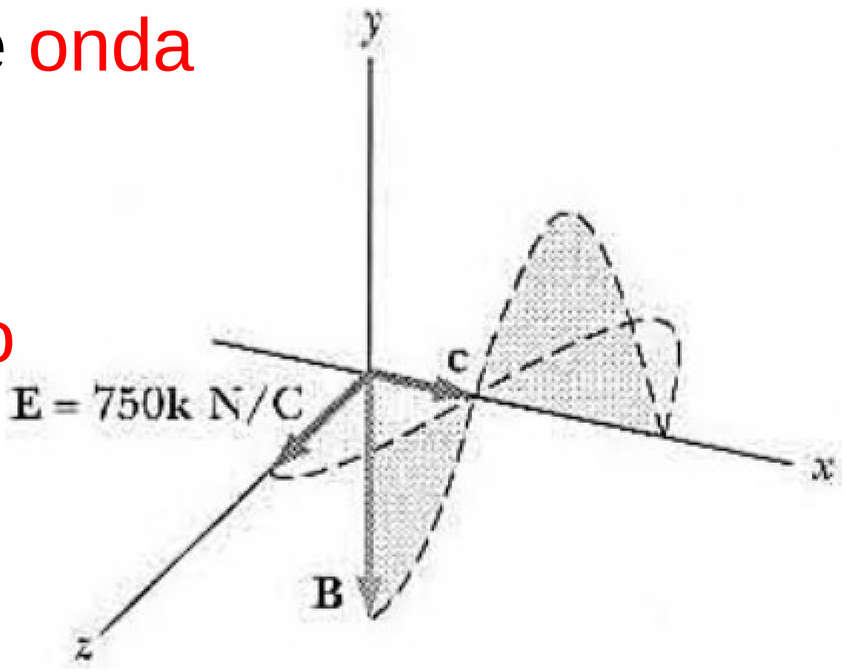
Ondas Eletromagnéticas

Exemplo 24.1 Uma Onde Eletromagnética

(a) Determine o comprimento de onda
e o período dessa onda.

(b) Calcule a magnitude
e a direção do campo magnético
quando **E** = (0, 0, 750 N/C).

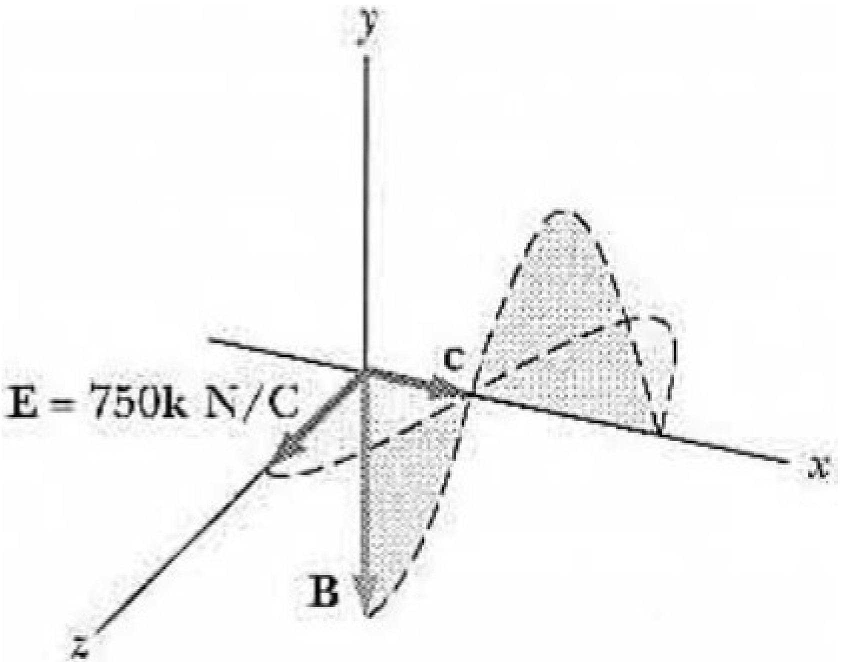
(c) Escreva expressões para
a variação espacial e temporal
das componentes do campo
elétrico e magnético para essa onda.



Ondas Eletromagnéticas

Exemplo 24.1 Uma Onde Eletromagnética

Solução:



(a) $\lambda = c/f = 7.50$ m
$T = 1/f = 2.5 \cdot 10^{-8}$ s

(b) $B_{max} = E_{max}/c = 2.50^{-6}$ T
na direção $-y$
(já que **E** × **B** é na direção x)

(c) $\mathbf{E} = (0, 0, E_{max}) \cos(kx - \omega t)$ e
$\mathbf{B} = (0, -B_{max}, 0) \cos(kx - \omega t)$,
onde $\omega = 2\pi f = 2.51 \cdot 10^8$ rad/s,
$k = 2\pi/\lambda = 2\pi f/c = 0.838$ rad/m

Universidade Federal do ABC

Fenômenos Eletromagnéticos

FIM PRA HOJE