



Universidade Federal do ABC

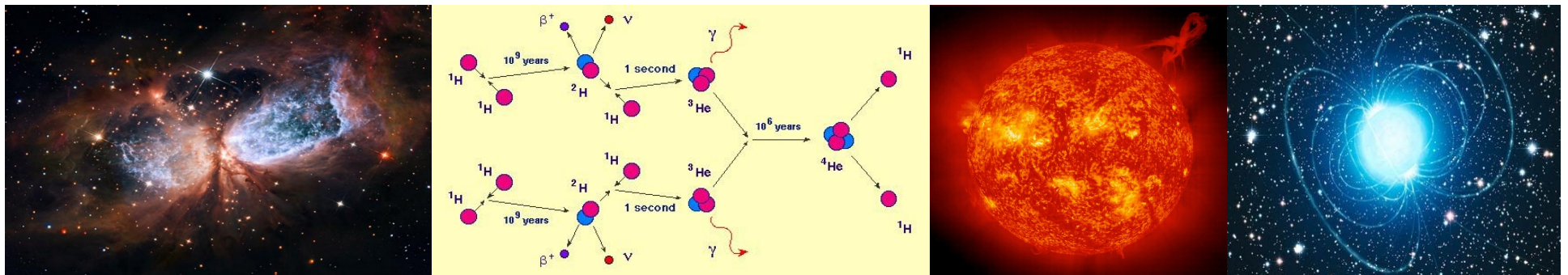
Introdução à Física Estelar

5. Atmosferas Estelares II

Prof. Pieter Westera

pieter.westera@ufabc.edu.br

<http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/Estelar.html>



Transporte Radiativo

Em certas camadas da atmosfera e do interior das estrelas, o **transporte** de **energia** ocorre por meio de fótons.

Estas camadas podem ser chamadas **zonas radiativas**.

Chamamos de **emissão** qualquer processo que adiciona **fótons** a um feixe de luz.

Para cada um dos quatro processos de absorção mencionados antes, há um processo inverso de emissão: emissão por transição entre níveis (*bound-bound*) por recombinação (*free-bound*), bremsstrahlung (*free-free*) e espalhamento por elétrons.

No transporte radiativo, fótons são **absorvidos** e **re-emitidos** constantemente.

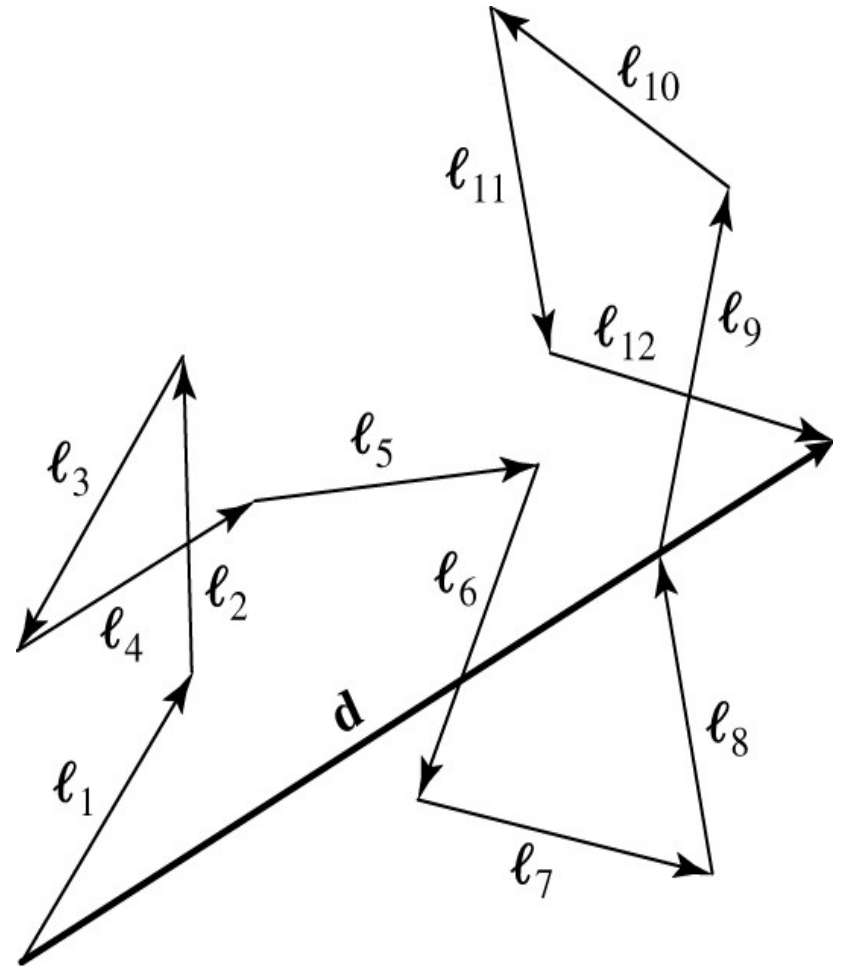
Transporte Radiativo

O passeio aleatório

Entre dois choques, os fótons percorrem, em média, um percurso livre médio ℓ .

Após cada choque, os fótons são re-emitidos em direções aleatórias, resultando em um **passéio aleatório**.

Por qual distância um fóton se desloca **em média** após N choques?



Transporte Radiativo

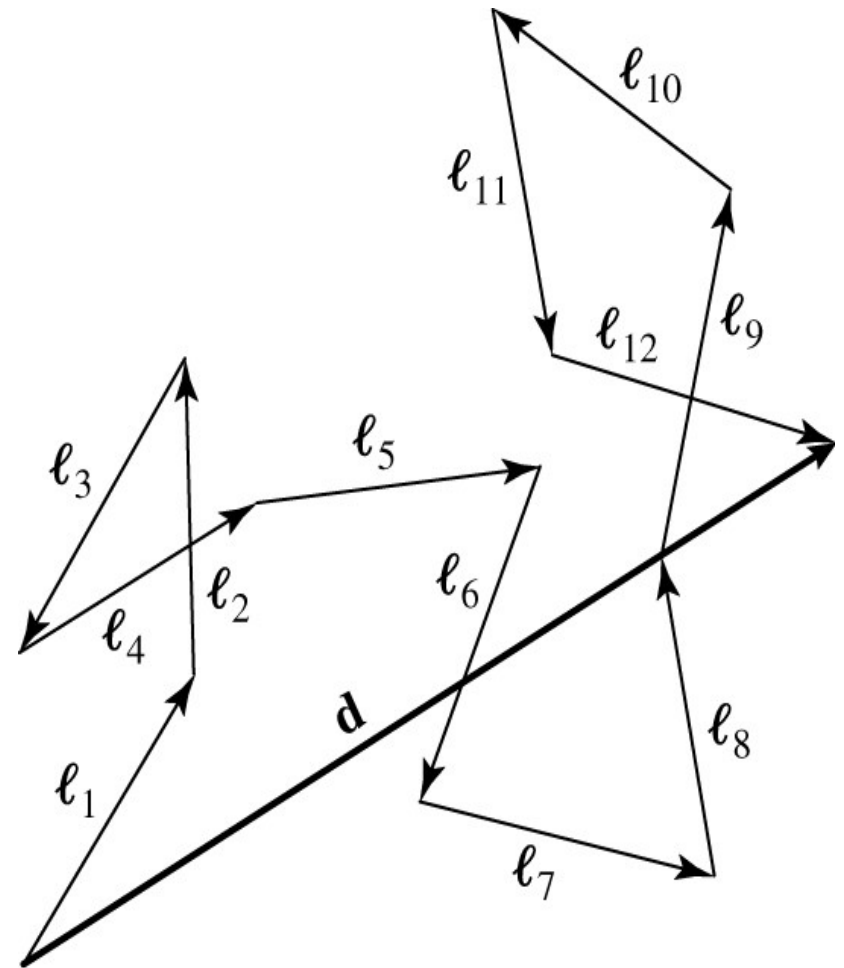
O passeio aleatório

$$\mathbf{d} = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \cdots + \ell_N.$$

O produto escalar de \mathbf{d} consigo mesmo:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} &= \ell_1 \cdot \ell_1 + \ell_1 \cdot \ell_2 + \cdots + \ell_1 \cdot \ell_N \\ &\quad + \ell_2 \cdot \ell_1 + \ell_2 \cdot \ell_2 + \cdots + \ell_2 \cdot \ell_N \\ &\quad + \cdots + \ell_N \cdot \ell_1 + \ell_N \cdot \ell_2 + \cdots + \ell_N \cdot \ell_N \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \ell_i \cdot \ell_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 &= N\ell^2 + \ell^2 [\cos \theta_{12} + \cos \theta_{13} + \cdots + \cos \theta_{1N} \\ &\quad + \cos \theta_{21} + \cos \theta_{23} + \cdots + \cos \theta_{2N} \\ &\quad + \cdots + \cos \theta_{N1} + \cos \theta_{N2} + \cdots + \cos \theta_{N(N-1)}] \\ &= N\ell^2 + \ell^2 \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \cos \theta_{ij}, \end{aligned}$$



Transporte Radiativo

O passeio aleatório

Os termos com os cossenos se cancelam em média.
=> Em média, os fótons se deslocam em **N passos** por uma **distância** de $\sqrt{N} \cdot \ell$.

Já que a profundidade ótica é a distância percorrida pelos fótons em unidades do percurso livre médio, temos que, para percorrer uma profundidade ótica τ_λ , é preciso de $N = (d/\ell)^2 = \tau_\lambda^2$ passos.

Este método de transporte pode ser muito **lento**.
Exemplo: No caso do Sol, a radiação leva da ordem de 170 000 anos para atravessar a zona radiativa, de $\sim 0.4 R_\odot \approx 300\,000$ km (=> aula Sol).

A Equação de Transporte

O coeficiente de emissão

Análogo à absorção, no caso de um ambiente de emissão pura a intensidade de um raio passando pelo meio aumenta:

$$dl_\lambda = j_\lambda \rho ds,$$

Onde j_λ é o **coeficiente de emissão** do gás $[j_\lambda] = \text{m s}^{-3} \text{sr}^{-1}$.

Em geral, temos absorção e emissão:

$$dl_\lambda = -\kappa_\lambda \rho l_\lambda ds + j_\lambda \rho ds.$$

A Equação de Transporte

A Função de Fonte

Dividindo por $-\kappa_\lambda \rho ds$:

$$-1/\kappa_\lambda \rho \cdot dl_\lambda/ds = I_\lambda - j_\lambda/\kappa_\lambda$$

A razão entre os coeficientes de emissão e absorção determina, se (e por quanto) o raio aumenta ou diminui em intensidade, e é chamado **função de fonte** $S_\lambda \equiv j_\lambda/\kappa_\lambda$.

=> Podemos escrever a equação anterior como:

$$-1/\kappa_\lambda \rho \cdot dl_\lambda/ds = I_\lambda - S_\lambda,$$

Que é uma forma da **equação de transporte radiativo**, ou equação de transporte.

A Equação de Transporte

$$-1/\kappa_\lambda \rho \cdot dl_\lambda/ds = I_\lambda - S_\lambda,$$

Dá para ver que:

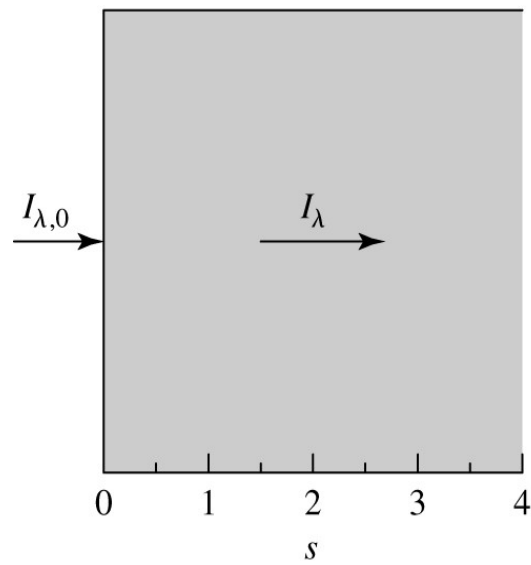
- se $I_\lambda < S_\lambda \Rightarrow dl_\lambda/ds$ é positivo, I_λ aumenta,
 - se $I_\lambda > S_\lambda \Rightarrow dl_\lambda/ds$ é negativo, I_λ diminui e
 - se $I_\lambda = S_\lambda \Rightarrow dl_\lambda/ds = 0$, I_λ é constante
(a radiação está em equilíbrio com o gás)
- $\Rightarrow I_\lambda$ **tende** ao valor local da **função de fonte**.

Supondo um raio com intensidade inicial $I_{\lambda,0}$ passando por um meio com densidade, opacidade e função de fonte constantes:

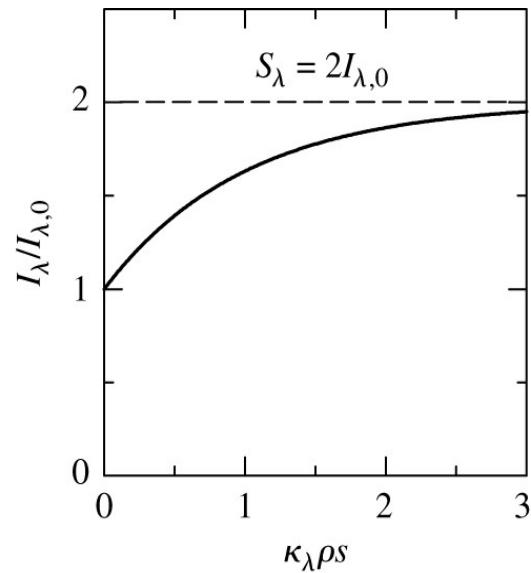
$$I_\lambda(s) = I_{\lambda,0} e^{-\kappa_\lambda \rho s} + S_\lambda(1 - e^{-\kappa_\lambda \rho s}) = S_\lambda + (I_{\lambda,0} - S_\lambda)e^{-\kappa_\lambda \rho s}$$

A Equação de Transporte

$$I_\lambda(s) = I_{\lambda,0} e^{-\kappa\lambda\rho s} + S_\lambda(1 - e^{-\kappa\lambda\rho s}) = S_\lambda + (I_{\lambda,0} - S_\lambda)e^{-\kappa\lambda\rho s}$$



(a)



(b)

A Equação de Transporte

No caso de radiação de corpo negro, $I_\lambda = B_\lambda$.

Além disso temos **equilíbrio termodinâmico**, $I_\lambda = B_\lambda = S_\lambda$ (localmente).

Como mencionado, uma estrela real não pode estar em equilíbrio termodinâmico perfeito, há um fluxo de energia de dentro para fora.

Porém, bem debaixo da superfície a uma profundidade ótica $\tau_\lambda \gg 1$, um fóton fazendo um passeio aleatório leva pelo menos τ_λ^2 passos para alcançar a superfície. Numa profundidade onde o percurso livre médio é pequeno em relação à altura de escala térmica, os fótons são confinados a um espaço de temperatura \sim constante., e as condições para LTE são satisfeitas.

A Equação de Transporte

Em estrelas reais, aplicar a equação de transporte pode ser bem **complicado**, com a **intensidade** da luz dependendo da **direção** de propagação, e os **coeficientes** de **absorção** e **emissão** dependendo de maneira complicada de ρ e T .

Para aprender algo sobre atmosferas estelares temos que saber, **onde** (em que profundidade) as **linhas espectrais** são formados.

Reescrevendo a equação de transporte em termos de τ_λ :

$$dI_\lambda/d\tau_\lambda = I_\lambda - S_\lambda,$$

e usamos a **aproximação**, que as **atmosferas** de estrelas (da sequência principal) são **finas** em comparação aos raios, e podem ser consideradas **planas**.

A Equação de Transporte

A Suposição da Atmosfera Plana e Paralela

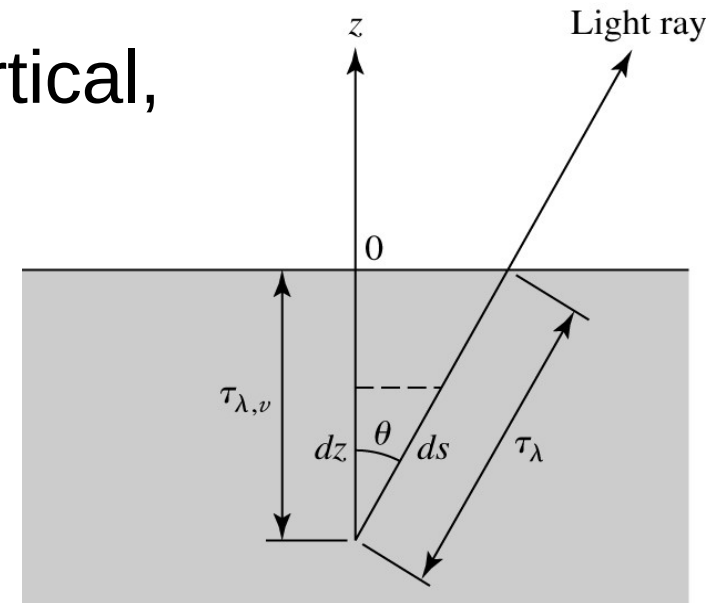
Tomando como eixo z a direção vertical, e $z = 0$ no topo da atmosfera.

A **profundidade ótica vertical** é definida como:

$$\tau_{\lambda,v}(z) = \int_z^0 \kappa_{\lambda} \rho dz.$$

Mas, caso o raio não está viajando pra cima, fazendo um **ângulo** θ com a vertical temos:

$$\tau_{\lambda} = \tau_{\lambda,v} / \cos \theta \Rightarrow \cos \theta \cdot dl_{\lambda} / d\tau_{\lambda,v} = I_{\lambda} - S_{\lambda}.$$



A Equação de Transporte

A Suposição da Atmosfera Plana e Paralela

Para simplificar integramos sobre todos os λ :

$$I = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda \text{ e } S = \int_0^\infty S_\lambda d\lambda$$

A equação de transporte usando esta “atmosfera cinza”:

$$\cos \theta \, dI/d\tau_v = I - S$$

e integrando sobre todas as direções (S é isotrópico):

$$d/d\tau_v \int I \cos \theta \, d\Omega = \int I \, d\Omega - S \int d\Omega$$

$$\text{mas } F_{\text{rad}} = \int I \cos \theta \, d\Omega \Rightarrow dF_{\text{rad}}/d\tau_v = 4\pi(\langle I \rangle - S)$$

A Equação de Transporte

A Suposição da Atmosfera Plana e Paralela

Também podemos multiplicar a relação com $\cos \theta$ e de novo integrar sobre todos os ângulos:

$$d/d\tau_v \int I \cos^2 \theta d\Omega = \int I \cos \theta d\Omega - S \int \cos \theta d\Omega$$

Calculando a pressão da radiação usando

$$P_{\text{rad}} = 1/c \int I \cos^2 \theta d\Omega, F_{\text{rad}} = \int I \cos \theta d\Omega \text{ e } \int \cos \theta d\Omega = 0:$$

$$dP_{\text{rad}}/d\tau_v = 1/c F_{\text{rad}}.$$

$$\text{Substituindo } d\tau_v = -\bar{k}\rho dz: \quad dP_{\text{rad}}/dz = -\bar{k}\rho/c F_{\text{rad}}.$$

=> O “**vento**” de **fótons** vai de **alto** P_{rad} a **baixo** P_{rad} .

A Equação de Transporte

A Suposição da Atmosfera Plana e Paralela

Numa atmosfera de equilíbrio, nenhuma energia é adicionada ou subtraída do campo de radiação:

$$F_{\text{rad}} = \text{const.} = F_{\text{superfície}} = \sigma T_e^4,$$

$$\text{e (já que } dF_{\text{rad}}/d\tau_v = 4\pi(\langle I \rangle - S) = 0): \langle I \rangle = S$$

A intensidade deve ser igual à função de fonte.

Agora podemos integrar a equação do slide anterior para achar a **pressão da radiação** em **função** da **profundidade ótica**:

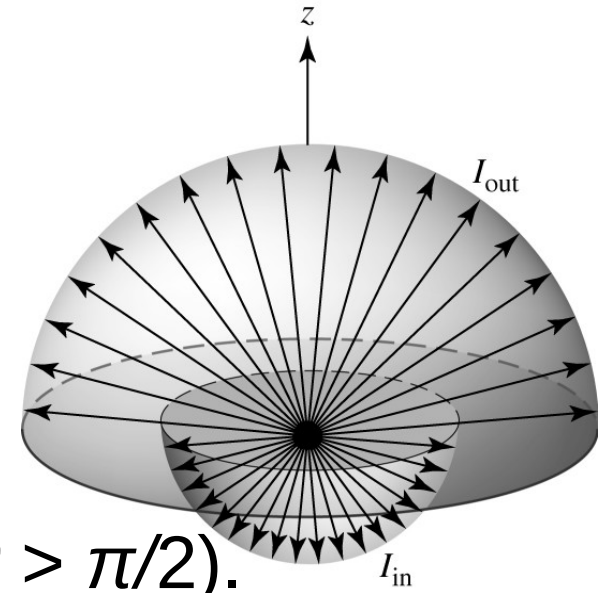
$$P_{\text{rad}} = 1/c \cdot F_{\text{rad}}\tau_v + C \quad (C = \text{const. de integração} \\ = P_{\text{rad}}(\tau_v=0) \text{ (na "superfície")})$$

A Equação de Transporte

A aproximação de Eddington

Conhecéssemos $P_{\text{rad}}(T)$, poderíamos usar esta equação para calcular o perfil vertical de temperatura $T(z)$ ou $T(\tau_v)$.

Usamos a **aproximação de Eddington**, que a intensidade da radiação tem apenas dois valores, I_{out} ($\theta < \pi/2$) e I_{in} ($\theta > \pi/2$).



$$\Rightarrow \langle I \rangle = \frac{1}{2} \cdot (I_{\text{out}} + I_{\text{in}}), \quad F_{\text{rad}} = \pi \cdot (I_{\text{out}} - I_{\text{in}}),$$
$$P_{\text{rad}} = \frac{4\pi}{3c} \cdot \langle I \rangle = \frac{2\pi}{3c} \cdot (I_{\text{out}} + I_{\text{in}})$$

A Equação de Transporte

A aproximação de Eddington

Substituindo este último valor na equação do penúltimo slide:

$$P_{\text{rad}} = 4\pi/3c \cdot \langle I \rangle = 1/c \cdot F_{\text{rad}}\tau_v + C$$

e usando $I_{\text{in}}(\tau_v=0) = 0$

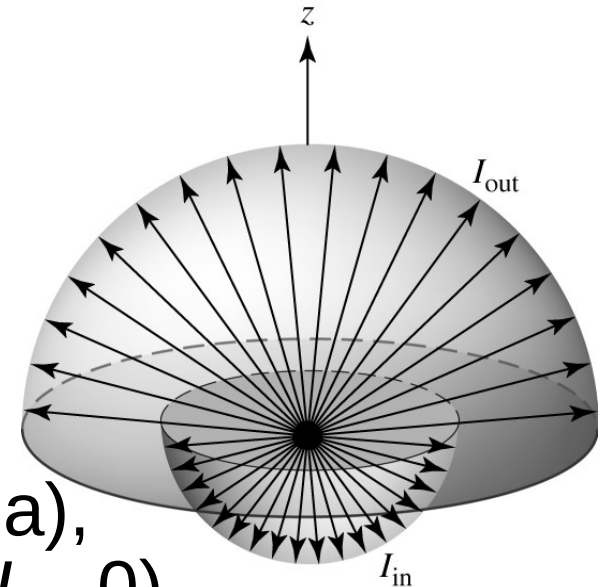
(não há radiação vindo de fora da estrela),
então $\langle I(\tau_v=0) \rangle = 1/2 \cdot (I_{\text{out}} + 0)$ e $F_{\text{rad}} = \pi \cdot (I_{\text{out}} - 0)$

obtemos $\langle I(\tau_v=0) \rangle = F_{\text{rad}}/2\pi$

$$\Rightarrow C = 2/3c \cdot F_{\text{rad}}, \quad 4\pi/3 \cdot \langle I \rangle = F_{\text{rad}}(\tau_v + 2/3)$$

e, já que $F_{\text{rad}} = \text{const.} = \sigma T_e^4$

$$\langle I \rangle = 3\sigma/4\pi \cdot T_e^4 (\tau_v + 2/3) \text{ ou } P_{\text{rad}} = 1/c \cdot T_e^4 (\tau_v + 2/3)$$



A Equação de Transporte

A aproximação de Eddington

Derivamos a aproximação para determinar a estrutura de temperatura da nossa atmosfera modelo, assumindo LTE => A função de fonte é a de Planck: $S_\lambda = B_\lambda$

$$\Rightarrow S = B = \langle I \rangle = \sigma T^4 / \pi$$

$$\Rightarrow T^4 = \frac{3}{4} \cdot T_e^4 (\tau_v + \frac{2}{3})$$

$$\Rightarrow T_e = T \text{ para } \tau_v = \frac{2}{3} !$$

=> A “superfície” que define a temperatura efetiva se encontra a uma profundidade ótica de $\frac{2}{3}$.

Olhando para uma estrela, vemos até uma profundidade ótica de $\tau_v \approx \frac{2}{3}$.

A Equação de Transporte

Escurecimento de Bordo

Isto explica, por que as bordas do disco do Sol aparacem mais escuras e avermelhadas que a região central do disco.

Na região central enxergamos mais fundo, até as camadas mais quentes e luminosas.

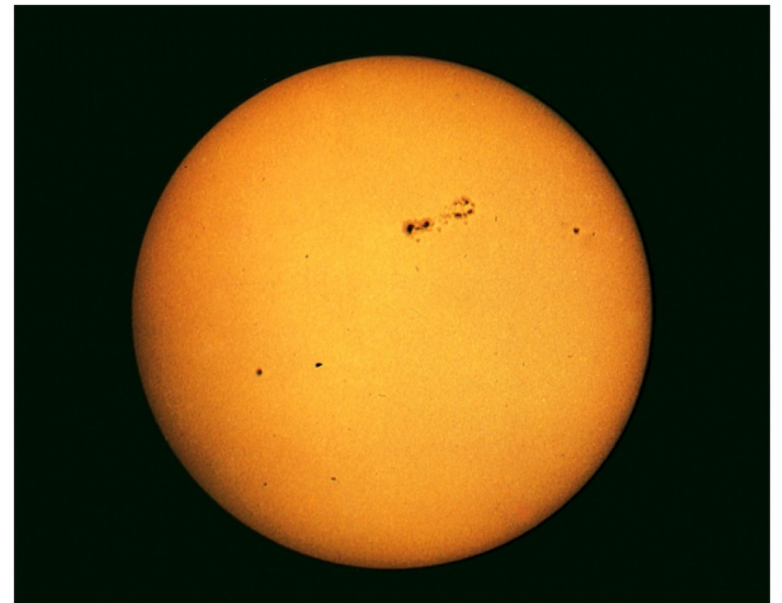
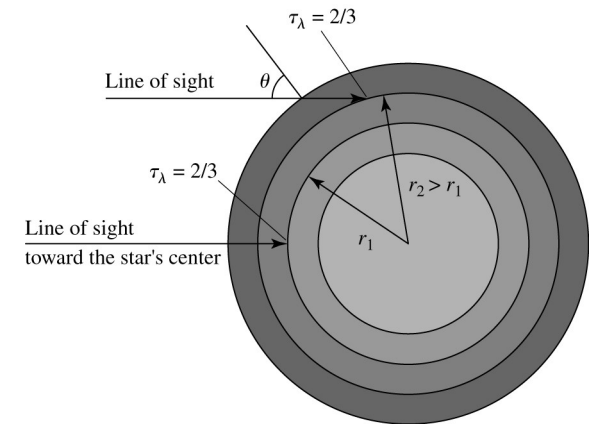


Figure 16-7
Universe, Eighth Edition
© 2008 W.H. Freeman and Company

A Equação de Transporte

Escurecimento de Bordo

Partindo da equação de transporte:

$$dI_\lambda/d\tau_\lambda = I_\lambda - S_\lambda,$$

e multiplicando os dois lados por $e^{-\tau_\lambda}$ obtemos:

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} e^{-\tau_\lambda} - I_\lambda e^{-\tau_\lambda} = -S_\lambda e^{-\tau_\lambda}$$

$$\frac{d}{d\tau_\lambda} (e^{-\tau_\lambda} I_\lambda) = -S_\lambda e^{-\tau_\lambda}$$

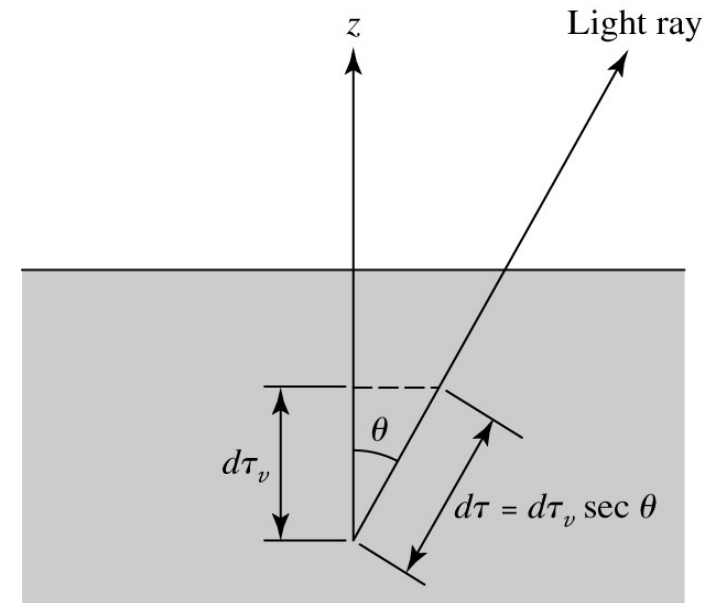
$$d(e^{-\tau_\lambda} I_\lambda) = -S_\lambda e^{-\tau_\lambda} d\tau_\lambda$$

integrando: $I_\lambda(0) = I_{\lambda,0} e^{-\tau_{\lambda,0}} - \int_{\tau_{\lambda,0}}^0 S_\lambda e^{-\tau_\lambda} d\tau_\lambda$

A Equação de Transporte

Escurecimento de Bordo

Para entender o escurecimento de bordo, temos que calcular a intensidade em função do ângulo θ : Isto implica em substituir τ_λ por $\tau_{\lambda,v}/\cos \theta$ para obter (omitindo o λ subscrito):



$$I(0) = I_0 e^{-\tau_{v,0}/\cos \theta} - \int_{\tau_{v,0}/\cos \theta}^0 S/\cos \theta \cdot e^{-\tau v/\cos \theta} d\tau_v$$

Tomando como posição inicial dos raios $\tau_{v,0} = \infty$, isto vira

$$I(0) = \int_0^\infty S/\cos \theta \cdot e^{-\tau v/\cos \theta} d\tau_v$$

A Equação de Transporte

Escurecimento de Bordo

Supondo que a função da fonte esteja da forma

$$S = a + b\tau_v,$$

obtemos (colocando os λ subscritos de volta)

$$I_\lambda(0) = a_\lambda + b_\lambda \cos \theta,$$

onde a_λ e b_λ podem ser determinados fazendo alguns hipóteses.

A Equação de Transporte

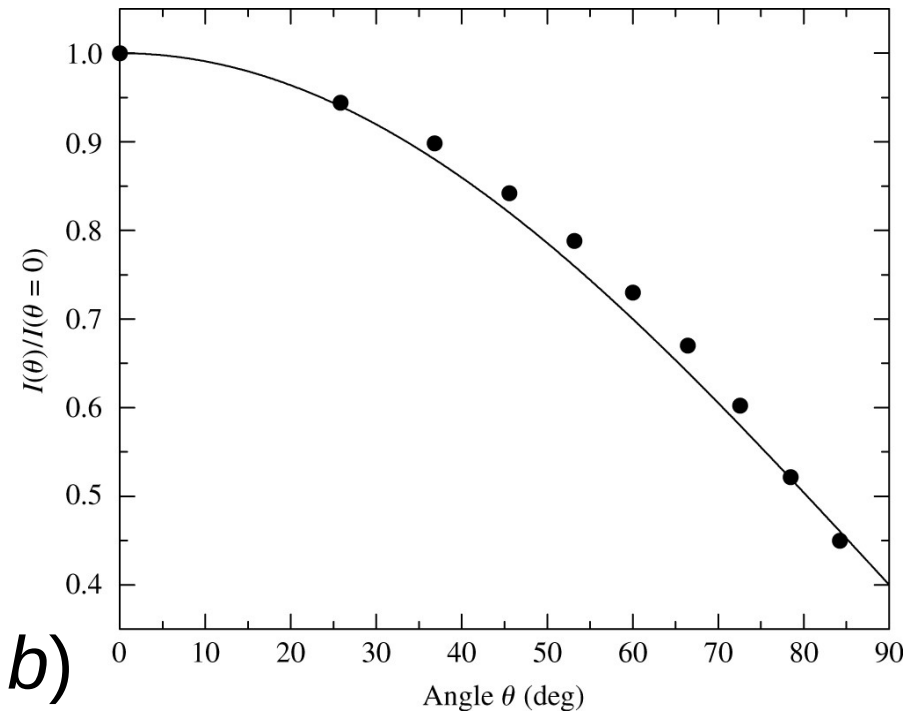
Escurecimento de Bordo

No caso do Sol, supondo LTE e a aproximação de Eddington chega-se em

$$a = \sigma/2\pi \cdot T_e^4 \text{ e } b = 3\sigma/4\pi \cdot T_e^4$$

Em unidades da intensidade no centro, isto se torna:

$$I(\theta)/I(\theta = 0) = (a + b \cos \theta)/(a + b) \\ = 0.4 + 0.6 \cos \theta, \text{ em boa concordância com as } \\ \text{medições.}$$



Os Perfis de Linhas Espectrais

Agora temos os meios para fazer a análise de **linhas espectrais**.

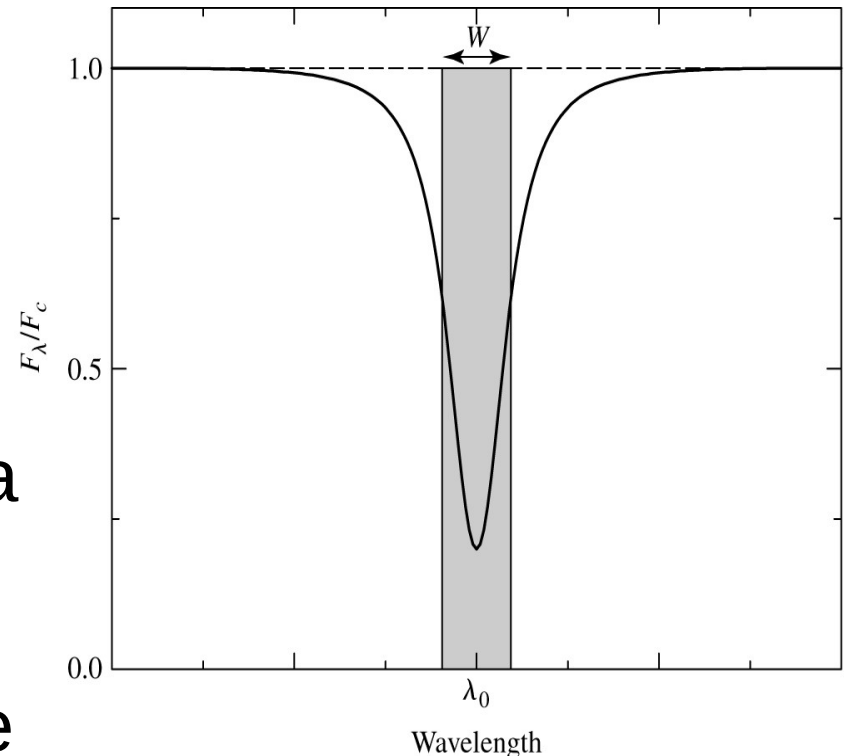
Largura Equivalente

Nesta figura vemos uma típica linha de absorção, normalizada para o nível do contínuo do espectro.

Uma medida pra intensidade da linha é a **largura equivalente**:

$$W = \int (F_c - F_\lambda) / F_c d\lambda$$

a largura que teria uma linha de absorção retangular com a mesma área, normalmente da ordem de 0.01 nm.



Os Perfis de Linhas Espectrais

Largura a meia Altura

(FWHM do inglês *Full Width at Half Maximum*)

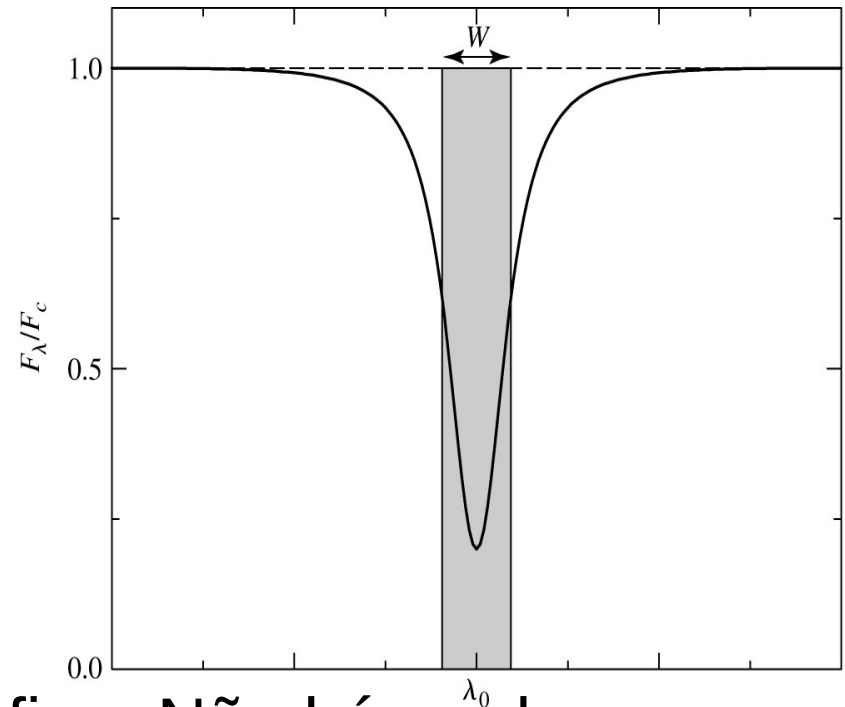
Uma outra medida é a largura da linha, lá onde ela tem metade da sua altura ou profundidade,

$$(\Delta\lambda)_{1/2},$$

então a distância entre os dois pontos, onde

$$(F_c - F_\lambda) / (F_c - F_{\lambda_0}) = 1/2$$

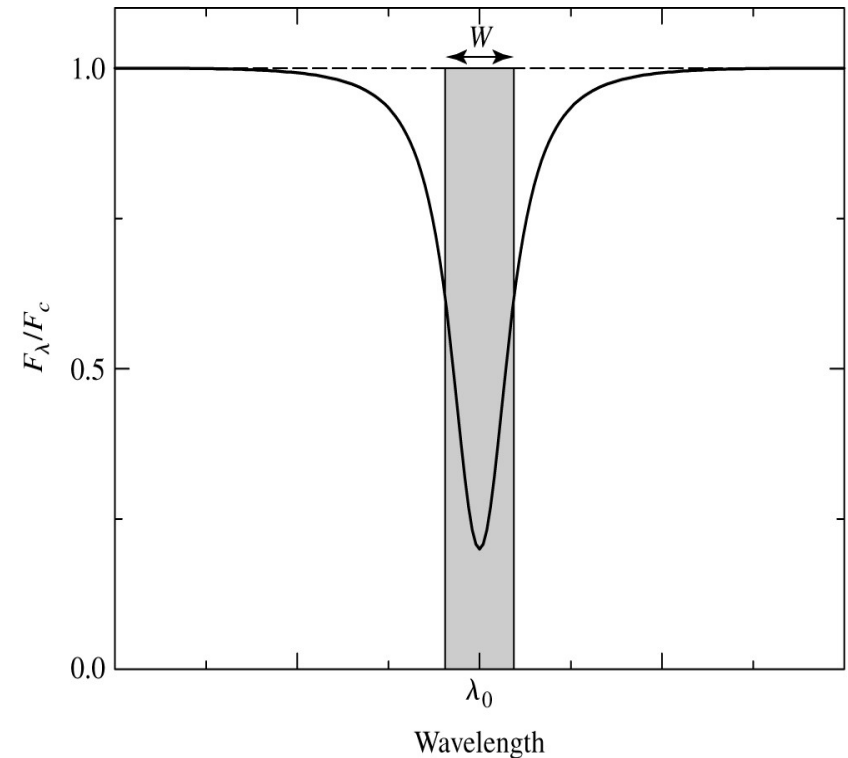
Esta linha é chamada ópticamente fina. Não há nenhum comprimento de onda, onde ela satura (absorve toda a luz).



Os Perfis de Linhas Espectrais

O resultado que obtivemos, de que se vê até profundidade ótica $\frac{2}{3}$ vale também para os diferentes λ .

O centro da linha é formado em partes mais altas e frias da atmosfera, que as asas.



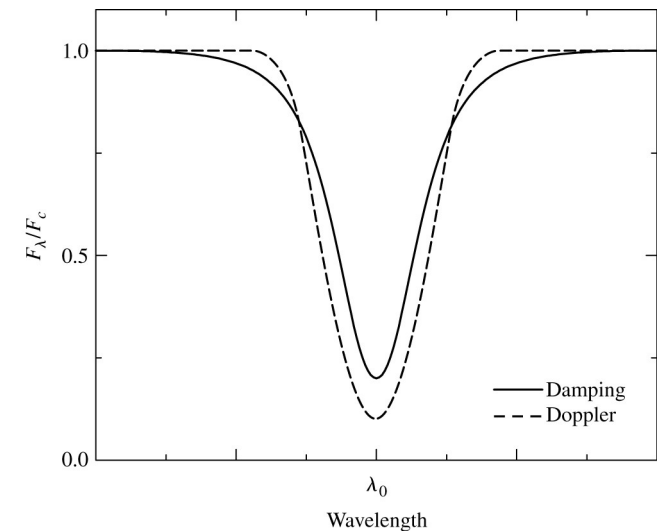
Os Perfis de Linhas Espectrais

Processos que alargam Linhas Espectrais

Três processos principais, cada um causando um perfil típico:

1. Alargamento Natural

(=> Física Quântica): Alargamento devido à **incerteza intrínseca** na energia dos dois níveis de energia envolvidos na linha (=> princípio de incerteza de Heisenberg), sendo Δt_0 o “tempo de espera” média pra transição ocorrer, então $(\Delta\lambda)_{1/2} = \lambda^2/\pi c \cdot 1/\Delta t_0$, normalmente da ordem de $2 \cdot 10^{-5}$ nm.



Os Perfis de Linhas Espectrais

2. Alargamento Doppler

Efeito **Doppler** refletindo os **movimentos térmicos** das partículas na atmosfera da estrela:

$$(\Delta\lambda)_{1/2} = 2\lambda/c \cdot \sqrt{(2k_B T \ln 2)/m} ,$$

onde T = temperatura,

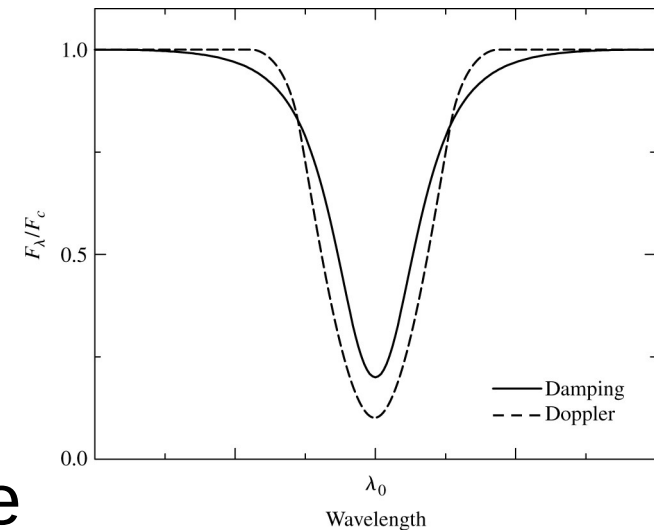
m = massa das partículas.

As asas diminuem exponencialmente por causa da queda exponencial em altas velocidades na distribuição de Maxwell-Boltzmann.

Se houver também **turbulências** na atmosfera (em estrelas gigantes e supergigantes),

$$(\Delta\lambda)_{1/2} = 2\lambda/c \cdot \sqrt{(2k_B T/m + v_{\text{turb}}^2) \ln 2} ,$$

onde v_{turb} é a velocidade de turbulência mais provável.



Os Perfis de Linhas Espectrais

3. Alargamento por Pressão e Colisões

Devido à perturbação dos orbitais por **campos elétricos** gerados em colisões ou passagens próximas de íons.

O perfil da linha é similar àquele do alargamento natural e é às vezes chamado *damping* ou *Lorentz profile*.

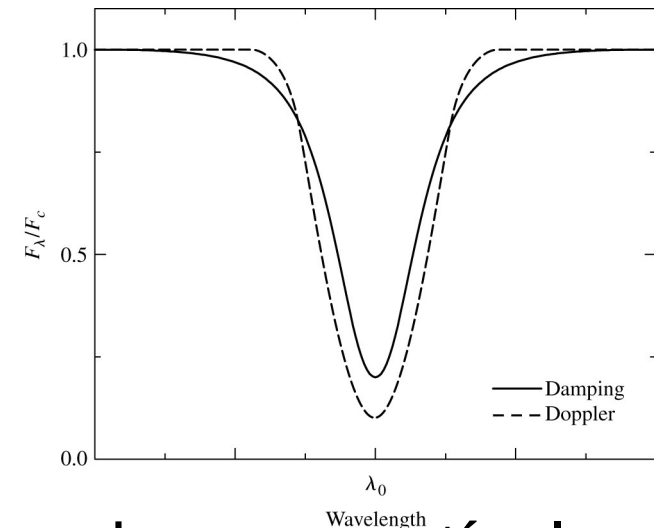
Sendo Δt_0 o tempo média entre colisões de uma partícula,

$$\Delta t_0 \approx \ell/v = 1/n\sigma\sqrt{2k_B T/m},$$

então a largura da linha é aproximadamente

$$\Delta\lambda = \lambda^2/c \cdot 1/\pi\Delta t_0 \approx \lambda^2/c \cdot n\sigma/\pi \cdot \sqrt{2k_B T/m},$$

onde n , σ e m são a densidade, seção transversal e massa das partículas.



Os Perfis de Linhas Espectrais

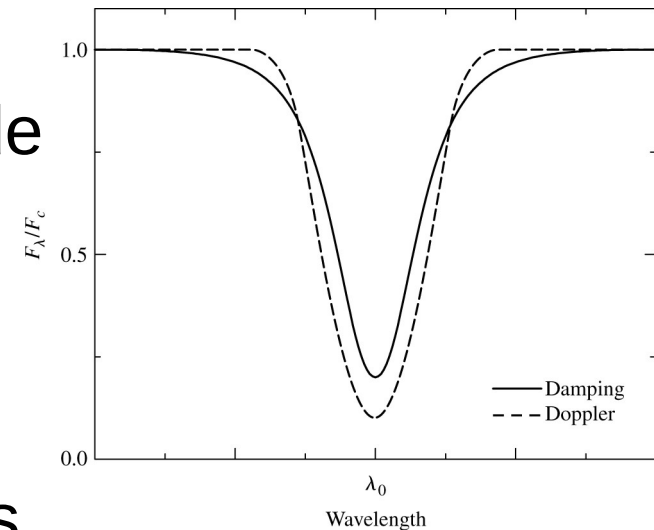
3. Alargamento por Pressão e Colisões

$$\Delta\lambda \approx \lambda^2/c \cdot n\sigma/\pi \cdot \sqrt{2k_B T/m}$$

Isto explica as classes de luminosidade de Morgan-Keenan

(Supergigantes a Anãs, => aula 3):

As linhas estreitas nas gigantes luminosas e supergigantes se devem às baixas densidades nas suas atmosferas.

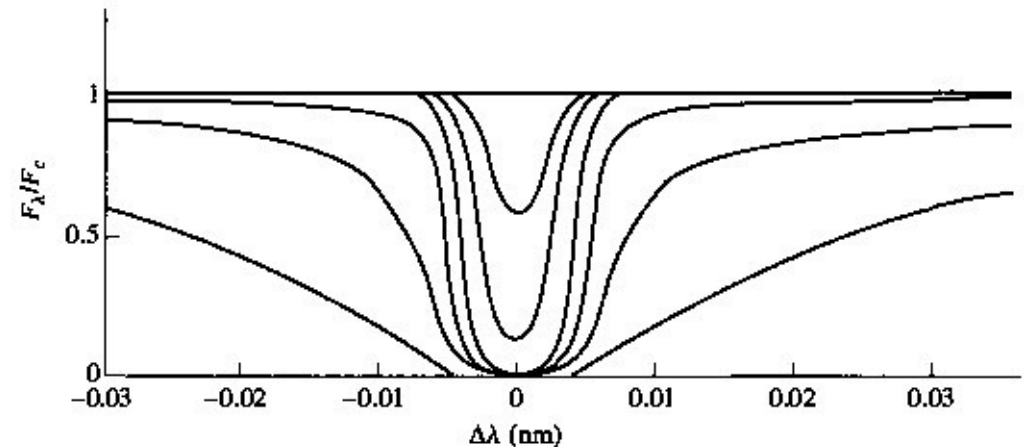
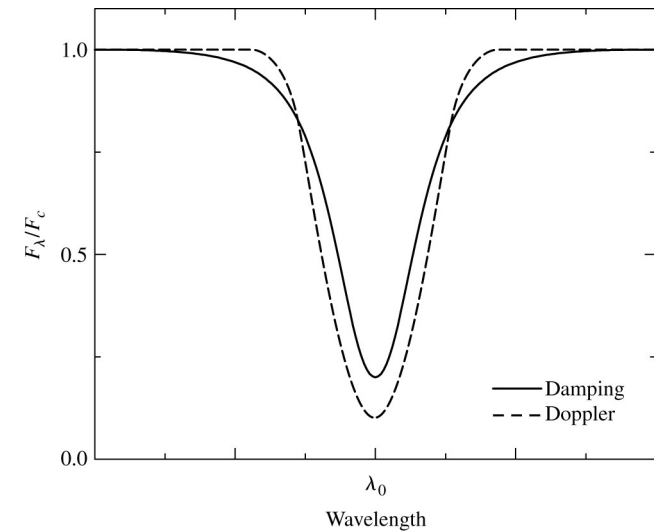


Nas estrelas anãs (da Sequência Principal) as linhas são alargadas por pressão nas atmosferas mais densas.

Os Perfis de Linhas Espectrais

O Perfil de Voigt

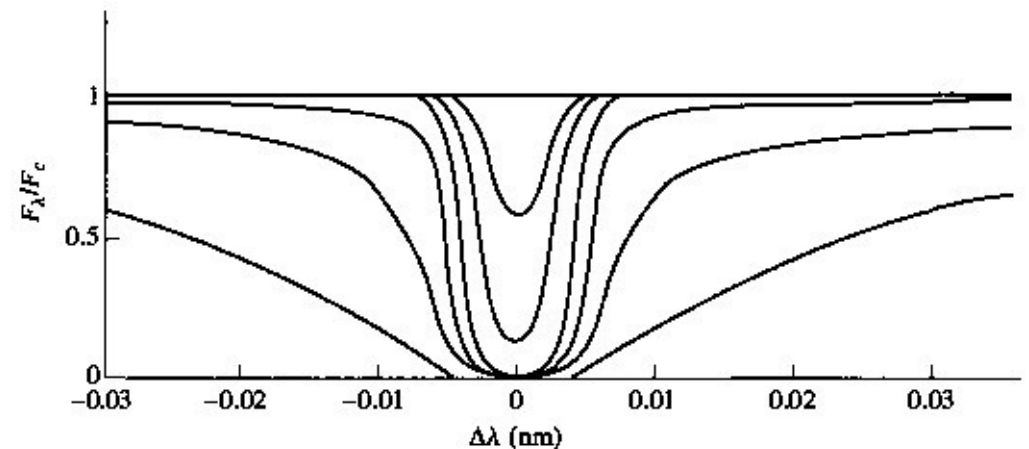
O perfil da linha total, chamado **perfil de Voigt**, é devido à combinação dos efeitos. Tipicamente, elas têm partes centrais de Doppler e asas *damping*.



Os Perfis de Linhas Espectrais

O Perfil de Voigt

Os cálculos que prevêem os **perfis** das linhas usam como **contínuo** espectros de corpo negro, e calculam a **absorção** levando em conta a **abundância**, os estados de **excitação** (equação de Boltzmann) e de **ionização** (Saha), as probabilidades da **transição** (depende da degeneração dos dois níveis e das regras de seleção), e os **alargamentos** Natural, Doppler e de pressão.

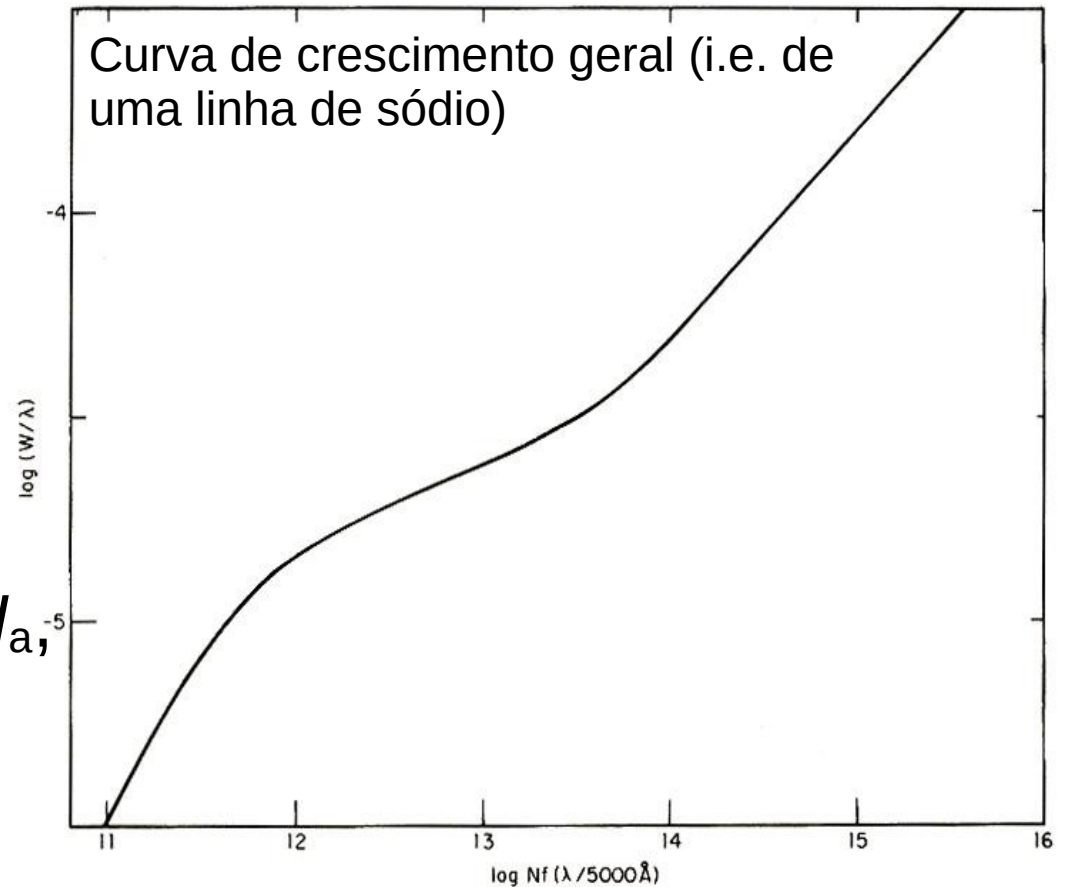


Perfis de Voigt da linha K Ca II, variando a abundância de cálcio, que aumenta da linha mais fraca até a totalmente saturada.

Os Perfis de Linhas Espectrais

A Curva de Crescimento

Estes cálculos fornecem previsões para a **largura equivalente** W de alguma linha em função da **abundância** do elemento que absorve esta linha em unidades de número de átomos absorventes N_a , chamada **curva de crescimento**.



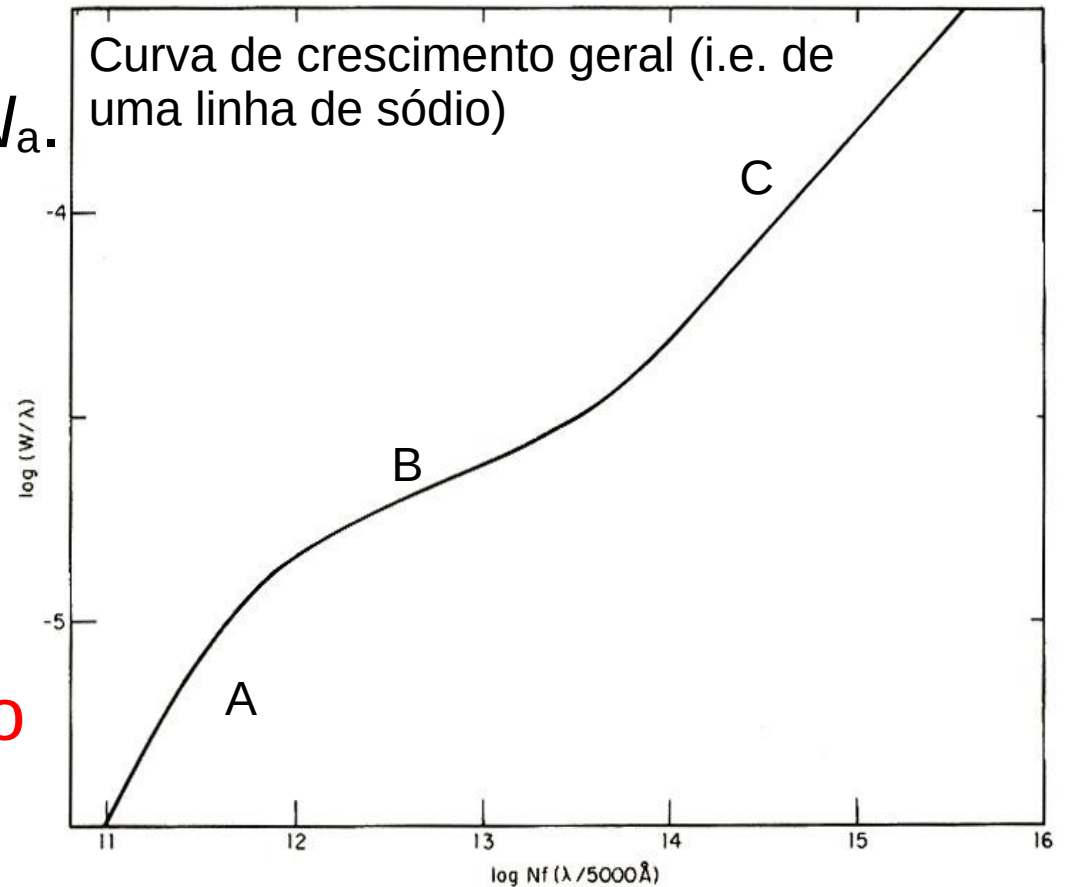
Os Perfis de Linhas Espectrais

A Curva de Crescimento

A: Para **abundâncias baixas**, W é **proporcional** a N_a .

B: Aumentando N_a mais, a linha começa a **saturar**, W prop. $\sqrt{\ln N_a}$.

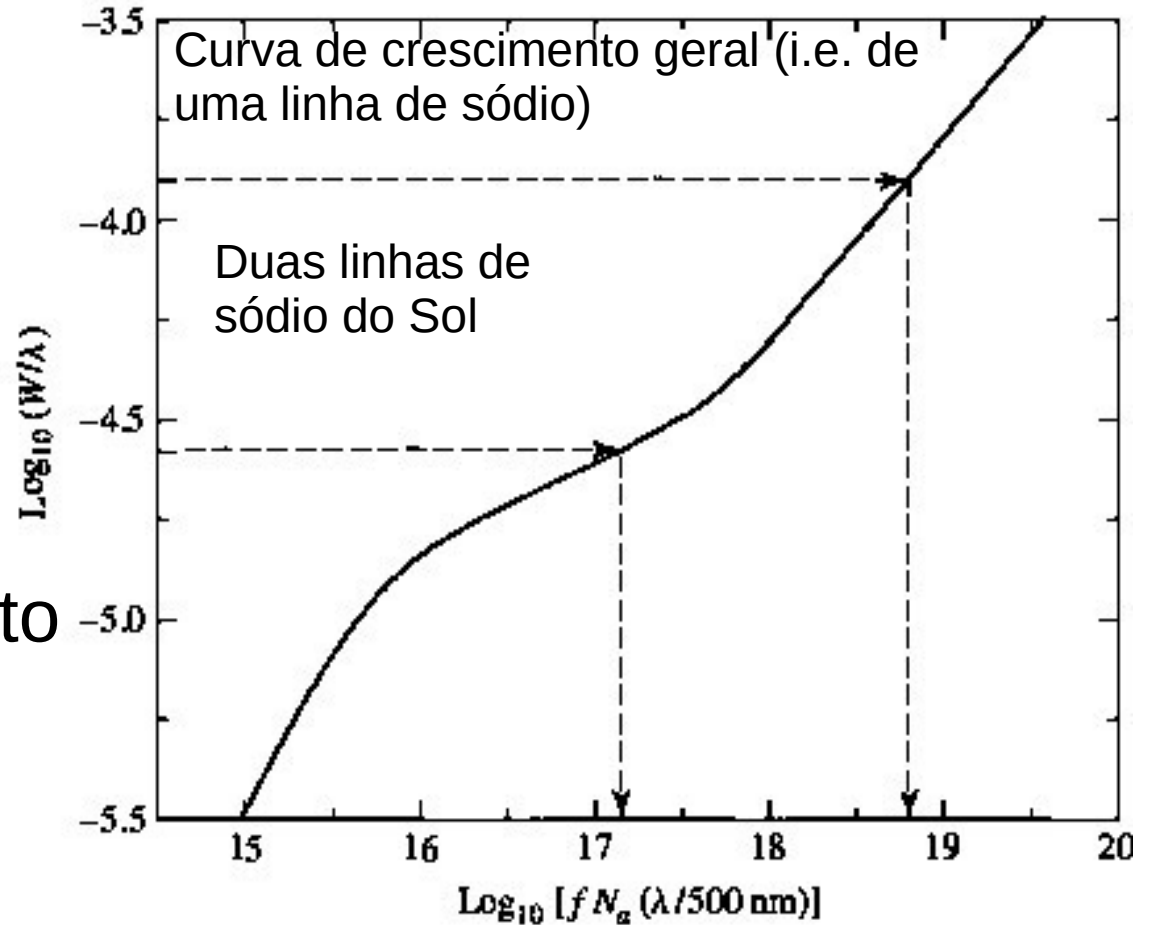
C: Com **abundâncias** (densidades) **muito altas**, o alargamento de **pressão** domina, W prop. $\sqrt{N_a}$.



Os Perfis de Linhas Espectrais

A Curva de Crescimento

Comparando a largura equivalente de alguma linha espectral medida no espectro de uma estrela com a curva de crescimento, dá para **determinar** a **abundância** do elemento correspondente na atmosfera da estrela.



Modelos Computacionais de Atmosferas

Hoje se calcula **atmosferas modelos** em **computadores**, subdividindo a atmosfera em **camadas finas** e calculando a contribuição de cada camada no espectro.

Todos os ingredientes mencionados, mais as equações de **equilíbrio hidrostático**, **termodinâmica**, **mecânica estatística** e **quântica**, **transporte** de energia por radiação e convecção (=> aulas 6 e 7, O Interior das Estrelas) combinados com **bibliotecas** extensas de **opacidades** calculam não apenas as **abundâncias**, mas também outras informações importantes como a **temperatura** efetiva e o **campo gravitacional** na superfície da estrela.

Modelos Computacionais de Atmosferas

A comparação destes modelos com **dados empíricos** levou a um bom **entendimento** das **atmosferas estelares**.

Vê-se, por exemplo, que a **composição química** da **atmosfera** do **Sol** é muito **similar** àquela de outras **estrelas** e do **gás interestelar**.

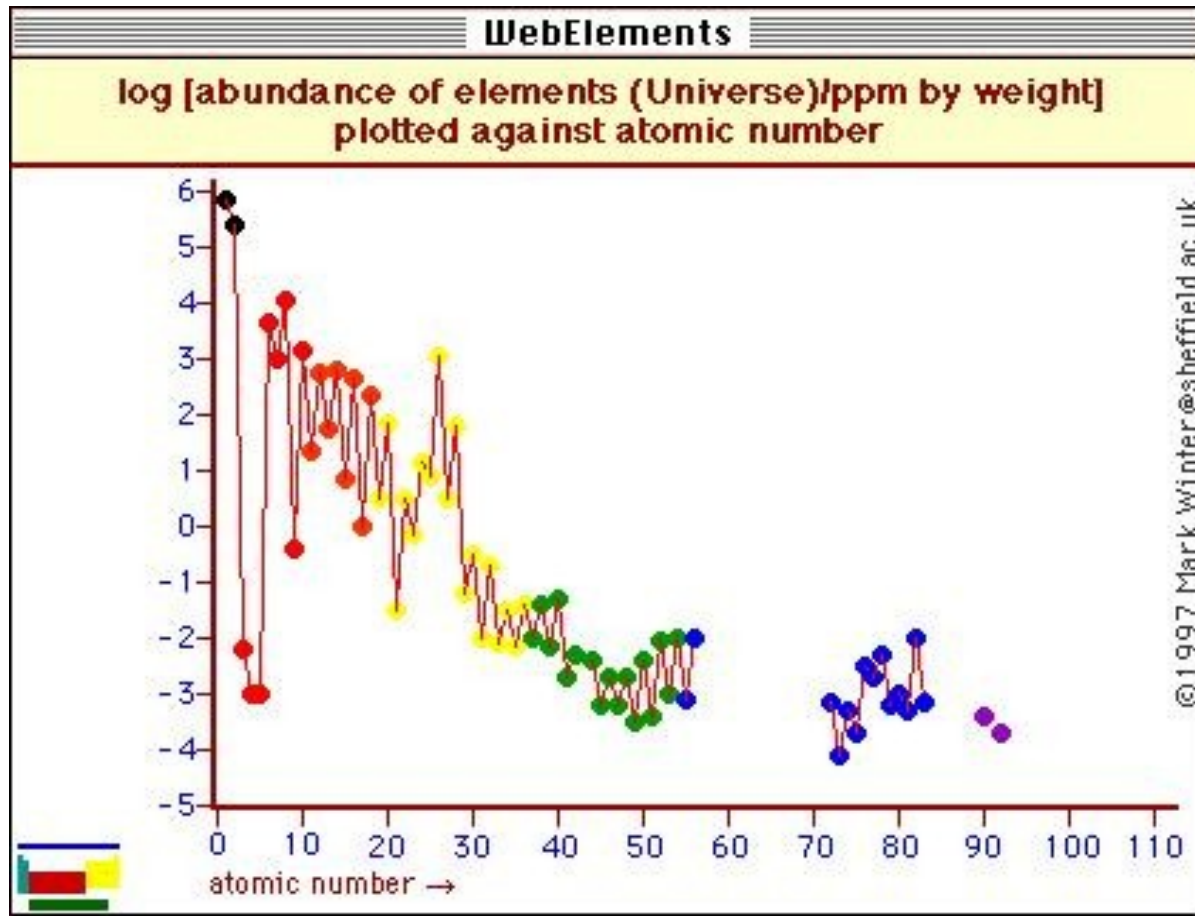
Também acha-se boa concordância com as abundâncias dos elementos (tirando os voláteis) em **meteoritos**.

Os elementos mais abundantes na atmosfera do Sol

Element	Atomic Number	Log Relative Abundance
Hydrogen	1	12.00
Helium	2	10.93 ± 0.004
Oxygen	8	8.83 ± 0.06
Carbon	6	8.52 ± 0.06
Neon	10	8.08 ± 0.06
Nitrogen	7	7.92 ± 0.06
Magnesium	12	7.58 ± 0.05
Silicon	14	7.55 ± 0.05
Iron	26	7.50 ± 0.05
Sulfur	16	7.33 ± 0.11
Aluminum	13	6.47 ± 0.07
Argon	18	6.40 ± 0.06
Calcium	20	6.36 ± 0.02
Sodium	11	6.33 ± 0.03
Nickel	28	6.25 ± 0.04

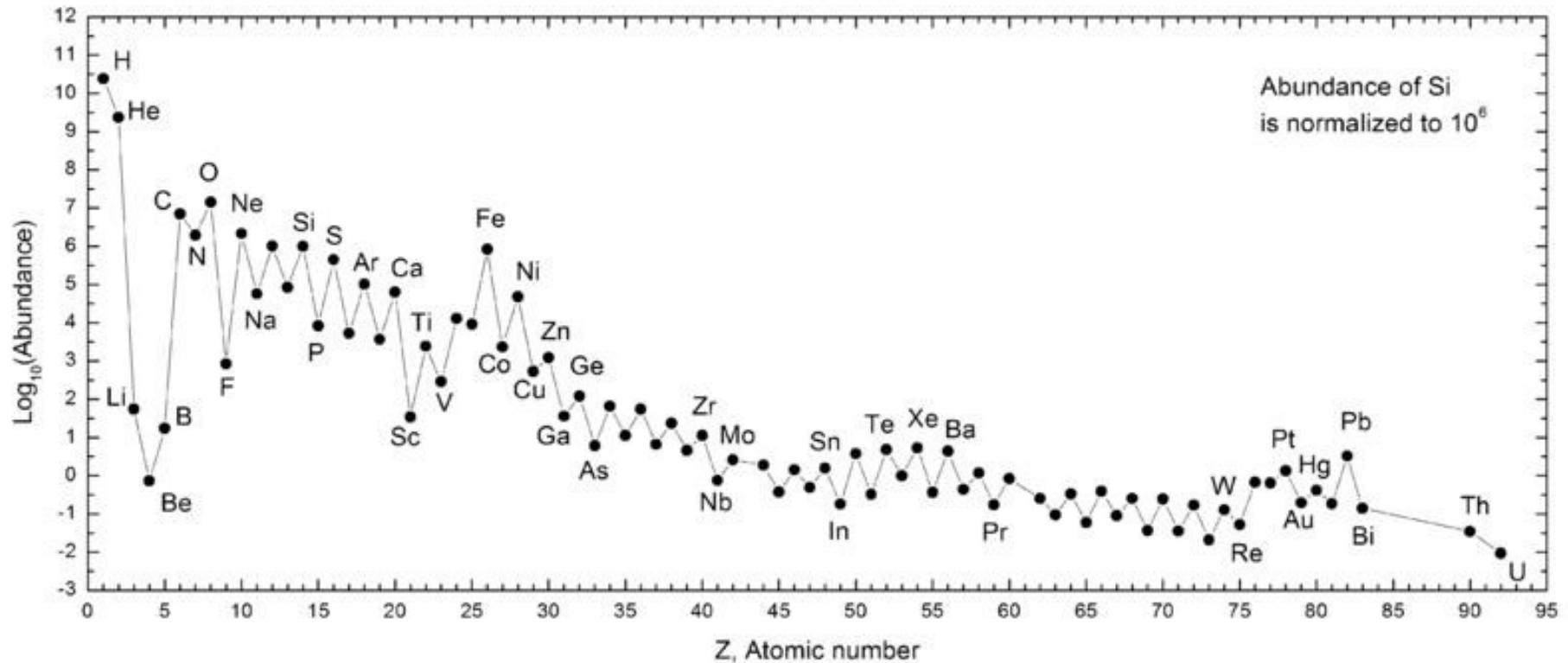
Modelos Computacionais de Atmosferas

Abundâncias dos Elementos no Universo



Modelos Computacionais de Atmosferas

Abundâncias dos Elementos no Sistema Solar





Universidade Federal do ABC

Introdução à Física Estelar

FIM PRA HOJE

