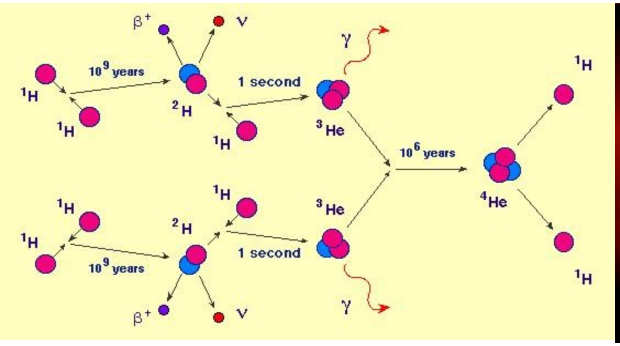
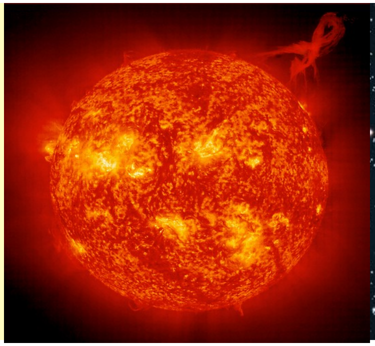
Introdução à Física Estelar

8. Modelos Politrópicos

Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/Estelar.html





Modelos Politrópicos

No final da última aula, vimos que, em geral, modelar a estrutura de uma estrela é complicado e requer métodos numéricos (computacionais) laborosos.

Mas há uma classe de modelos, chamada modelos politrópicos, que se usam de hipóteses simplificantes, que levam a uma determinação da estrutura da estrela modelo relativamente simples.

Se baseiam no fato, que as equações do equilíbrio hidrostático e da conservação de massa (aula passada) poderiam ser resolvidas simultaneamente, se existisse uma relação simples entre pressão e densidade.

Modelos Politrópicos

Hipótese: $P = K\rho^{\gamma}$,
onde $K > 0$ é uma constante, e $\gamma > 0$, o expoente politrópico.

Às vezes se usa o índice politrópico, n, defindo por:

$\gamma = (n+1)/n = 1+1/n \Leftrightarrow n = 1/(\gamma-1) \Rightarrow P = K\rho^{(n+1)/n}$

!!! Alguns cientistas usam o nome índice politrópico para γ.

Exemplo: Para um gás ideal fazendo mudanças adiabáticas (=> aula passada), $n = 1.5$ e $\gamma = 5/3$.

Obviamente, isto é uma simplificação. P depende também de outras grandezas como temperatura e composição química, mas em certas circunstâncias obtemos resultados razoáveis mesmo assim.

Modelos Politrópicos

Começando pela equação do equilíbrio hidrostático:

$dP/dr = -G \cdot M_r \rho / r^2$,

$\Rightarrow r^2/\rho \cdot dP/dr = -G \cdot M_r$

e derivando os dois lados em r:

$d/dr\,(r^2/\rho \cdot dP/dr) = -G \cdot dM_r/dr$

podemos usar a equação da conservação de massa:

$dM_r/dr = 4\pi r^2 \rho$

para chegar em

$1/r^2 \cdot d/dr\,(r^2/\rho \cdot dP/dr) = -4\pi G \rho$

Equação de Lane-Emden

Usando agora a nossa hipótese, $P = K\rho^{\gamma}$,

isto vira $\frac{\gamma K}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\rho^{\gamma-2}\frac{d\rho}{dr}\right] = -4\pi G\rho$

ou, em termos do índice politrópico,

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{K}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\rho^{(1-n)/n}\frac{d\rho}{dr}\right] = -4\pi G\rho$$

Equação de Lane-Emden

Escrevendo $\rho(r)$ como a densidade central, ρ_c, multiplicada por uma função adimensional $[D_n(r)]^n$, $\rho(r) = \rho_c[D_n(r)]^n$, com $D_n(0) = 1$, esta última equação vira

$$\left[(n+1)\left(\frac{K\rho_c^{(1-n)/n}}{4\pi G}\right)\right]\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dD_n}{dr}\right] = -D_n^n$$

O termo entre colchetes tem dimensão de comprimento em quadrado.

Equação de Lane-Emden

Definimos a grandeza adimensional

$\xi = r/\lambda_n$,

onde $$\lambda_n \equiv \left[(n+1) \left(\frac{K \rho_c^{(1-n)/n}}{4\pi G} \right) \right]^{1/2}$$

chegamos em $$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \frac{dD_n}{d\xi} \right] = -D_n^n$$

chamada Equação de Lane-Emden, uma equação diferencial para achar D_n, $\rho_n(r) = \rho_c[Dn(r)]^n$ e $P_n(r) = K\rho_n^{(n+1)/n} = K(\rho_c[D_n(r)]^n)^{(n+1)/n} = K \cdot \rho_c^n \cdot [D_n(r)]^{(n+1)}$

Modelos Politrópicos

Ainda temos que impor condições de contorno.

Chamando de ξ_1 o primeiro ponto zero de D_n.

Já que, em $\xi = \xi_1$, isto é, em $r = \lambda_n \xi_1$, ρ e P são zero, isto deve ser a superfície da estrela, $\lambda_n \xi_1 = R$.

Modelos Politrópicos

Por outro lado, podemos fazer afirmações sobre o centro da estrela, $r = \xi = 0$, usando que a massa contida numa esfera com raio infinitesimalmente pequeno δ, $M_r = 4\pi/3 \cdot \bar{\rho}\delta^3$, onde $\bar{\rho}$ é a densidade média nesta esferinha (e $\rho \to \bar{\rho}$ para $r \to 0$):

Pela equação do equilíbrio hidrostático:

$$dP/dr = -GM_r\rho/r^2 = -4\pi/3 \cdot G\bar{\rho}^2\delta \to 0 \quad \text{para } r \to 0$$

$$\Rightarrow d\rho/dr = d/dr\,[(P/K)^{n/(n+1)}] = 0 \text{ e } dD_n/d\xi = 0 \text{ em } \xi = 0$$

Além disso, sabemos que $D_n(0) = 1$, já que $\rho(0) = \rho_c[D_n(0)]^n$ deve ser a densidade central ρ_c.

Modelos Politrópicos

Também conseguimos calcular a massa da estrela:

$M = 4\pi\int_0^R r^2 \rho \, dr = 4\pi\int_0^R \lambda_n^2 \, \xi^2 \, \rho_c \, D_n^n \, d(\lambda_n \xi)$

$\quad = 4\pi\lambda_n^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \, D_n^n \, d\xi$

Usando a equação de Lane-Emden, $\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 \frac{dD_n}{d\xi}\right] = -D_n^n$

para substituir o $\xi^2 \, D_n^n \, d\xi$ dentro da integral,

obtemos $M = -4\pi \lambda_n^3 \rho_c \xi_1^2 \left. \frac{dD_n}{d\xi} \right|_{\xi_1}$

Modelos Politrópicos

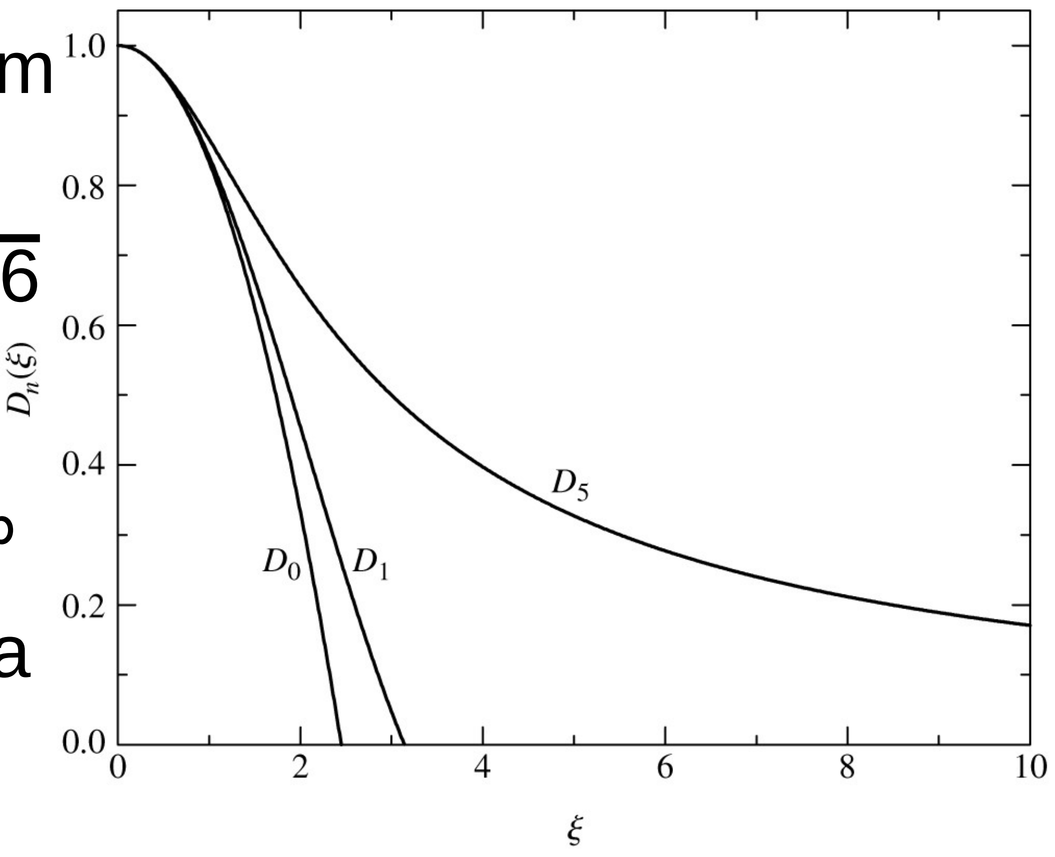
Há apenas três casos com soluções analíticas:

$D_0(\xi) = 1-\xi^2/6$, com $\xi_1 = \sqrt{6}$

$D_1(\xi) = (\text{sen }\xi)/\xi$, $\xi_1 = \pi$

$D_5(\xi) = (1+\xi^2/3)^{-1/2}$, $\xi_1 \to \infty$

Este último descreve uma estrela com raio infinito, mas massa finita.

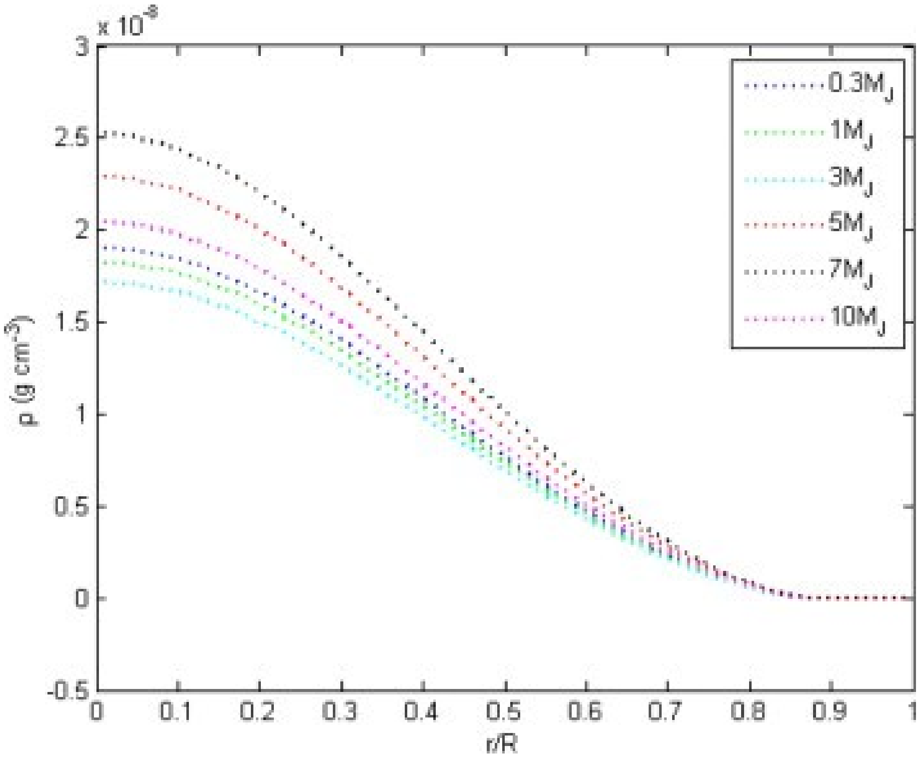


Para $n > 5$, a massa diverge.
=> $n = 5$ é o limite físico dos modelos.

Modelos Politrópicos

Um caso que já tratamos é o gás ideal, monoatômico, sob condições adiabáticas.

Para este, $n = 1.5$, $\gamma = 5/3$



Perfis de densidade de modelos politrópicos com $n = 1.5$ e massas diferentes

Um politropo destes é um bom modelo para núcleos estelares convectivos (como aqueles de Gigantes Vermelhas), Anãs Marrons, planetas gasosos gigantes (como Júpiter), ou até para planetas rochosos.

Modelos Politrópicos

Outro caso importante é a "Estrela de Eddington", Estrela em equilíbrio radiativo, suportado por um gás ideal + pressão de radiação.

Sendo P a pressão numa dada posição na estrela, e chamando de β a contribuição do gás nesta pressão:

$P_g = \beta P = \rho k_B T/\mu m_H$ => $T = \beta P \mu m_H/\rho k_B$

A contribuição da radiação é, então, $(1 - \beta)P$:

$P_r = (1 - \beta)P = ⅓\cdot aT^4$

Assim obtemos pra pressão:

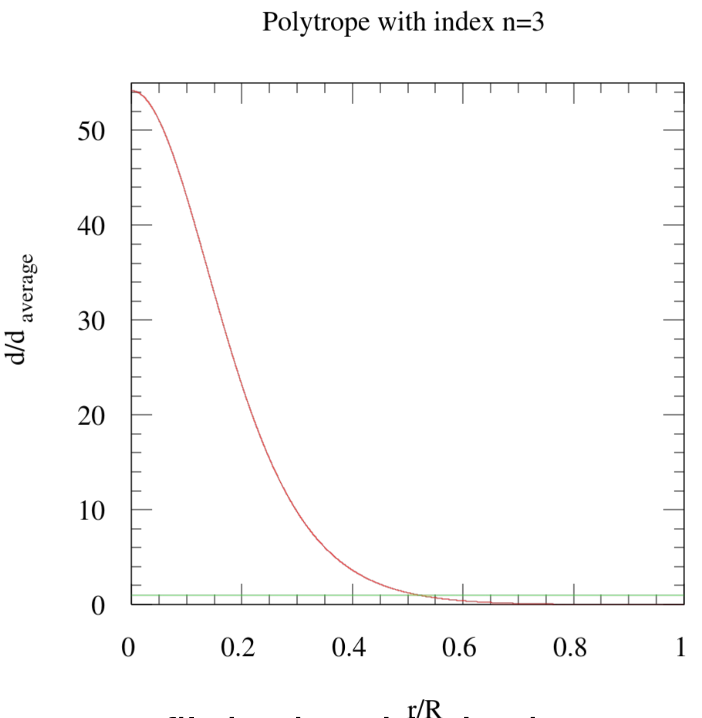
$P = ⅓\cdot aT^4/(1 - \beta) = ⅓\cdot a/(1 - \beta) \cdot (\beta P \mu m_H/\rho k_B)^4 = K\rho^{4/3}$,

onde $K \equiv \left[\frac{3(1-\beta)}{a}\right]^{1/3} \left(\frac{k}{\beta \mu m_H}\right)^{4/3}$

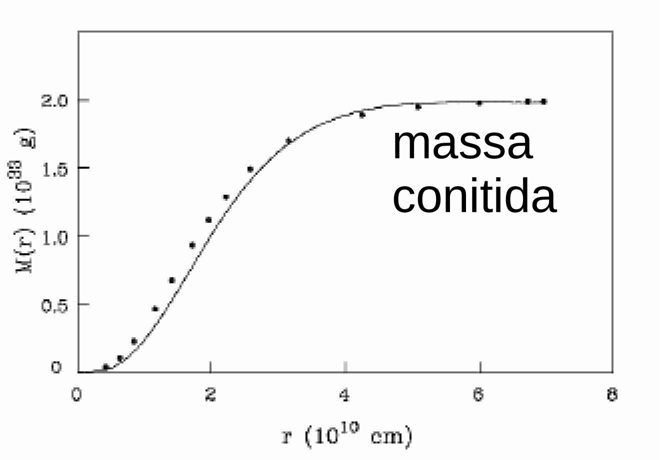
Modelos Politrópicos

$P = K\rho^{4/3}$

Uma Estrela de Eddington é, então, um politropo com
$\gamma = 4/3$ e $n = 3$,
bom para modelar estrelas da Sequência Principal (como o Sol), e núcleos degenerados relativísticos como aqueles de Anãs Brancas.

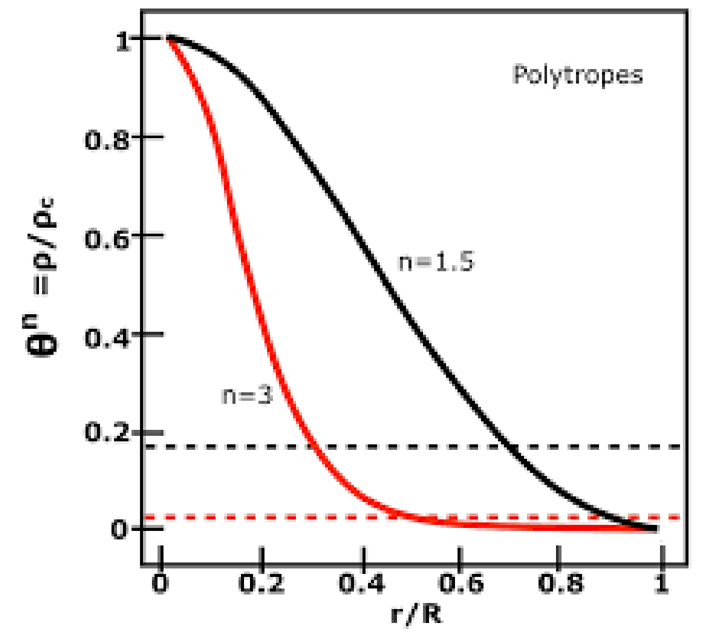


Perfil de densidade de um modelo politrópico com $n = 3$

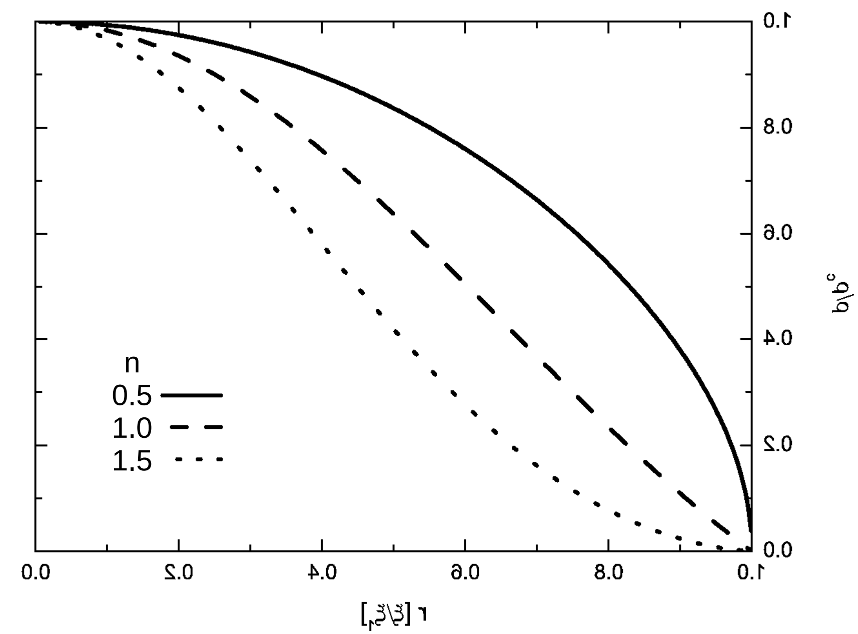


Modelos Politrópicos

Os dois casos, *n* = 1.5 e *n* = 3, servem como casos limites para Anãs Brancas
(=> aula na segunda parte),



e Estrelas de Nêutrons
(tb. segunda parte) são bem modelos por politropos com índices entre *n* = 0.5 e *n* = 1.



Introdução à Física Estelar

FIM PRA HOJE