



Universidade Federal do ABC

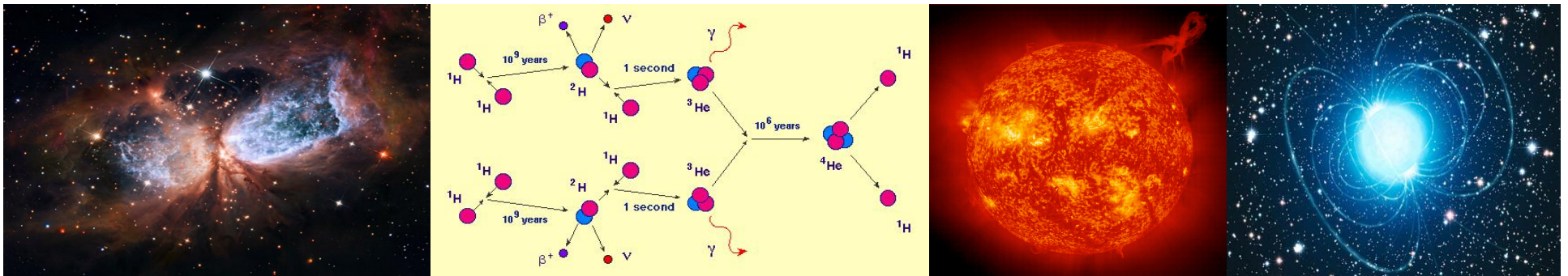
Introdução à Física Estelar

4 e 5. Atmosferas Estelares

Prof. Pieter Westera

pieter.westera@ufabc.edu.br

<http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/Estelar.html>



O Campo de Radiação

A maioria das estrelas não podem ser resolvidas espacialmente. A única informação que conseguimos medir é o **espectro**, isto é, o fluxo (e, se conhecemos a distância, a luminosidade) da **radiação eletromagnética** provindo da **atmosfera** da estrela **em função do comprimento de onda** λ ou da frequência ν .

As propriedades do espectro refletem **temperatura**, **densidade** e **composição** das camadas desta atmosfera. Para conseguir interpretá-lo, precisamos descrever como a luz viaja pelo gás que compõe a estrela.

O Campo de Radiação

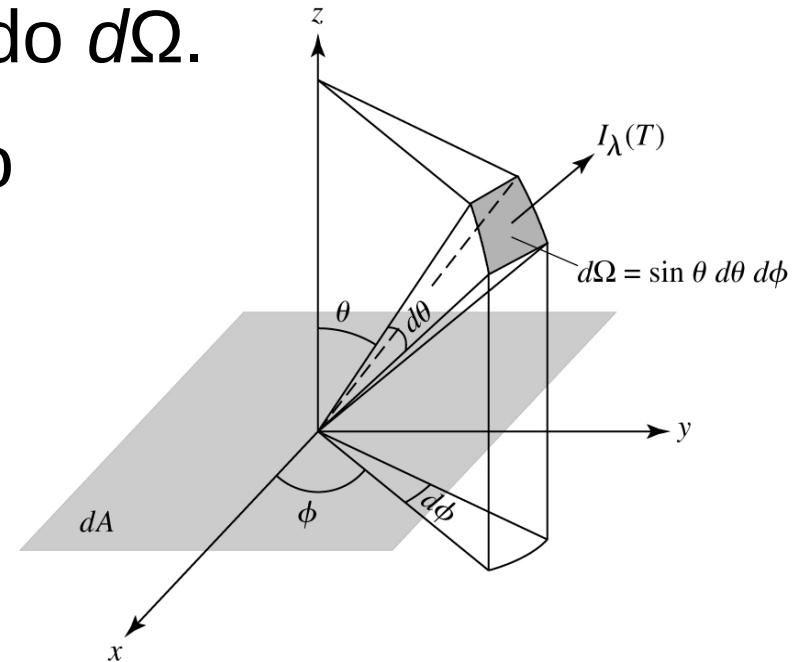
Supondo um raio de luz com comprimento de onda entre λ e $\lambda+d\lambda$ passando por uma superfície dA num ângulo θ dentro de um cone de ângulo sólido $d\Omega$.

=> A área dA projetada num plano perpendicular ao raio é $dA \cdot \cos \theta$.

Definindo $E_\lambda \equiv \partial E / \partial \lambda$, tal que $E_\lambda d\lambda$ é a energia carregada para o cone por intervalo de tempo dt , a **intensidade específica** dos raios é definida como

$$I_\lambda \equiv \frac{\partial I}{\partial \lambda} \equiv \frac{E_\lambda d\lambda}{d\lambda dt dA \cos \theta d\Omega}$$

$$[I_\lambda] = \text{W m}^{-2} \text{ nm}^{-1} \text{ sr}^{-1}$$



O Campo de Radiação

$$\Rightarrow E_{\lambda} d\lambda = I_{\lambda} d\lambda dt dA \cos \theta d\Omega$$

Em coordenadas esféricas:

$$E_{\lambda} d\lambda = I_{\lambda} d\lambda dt dA \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

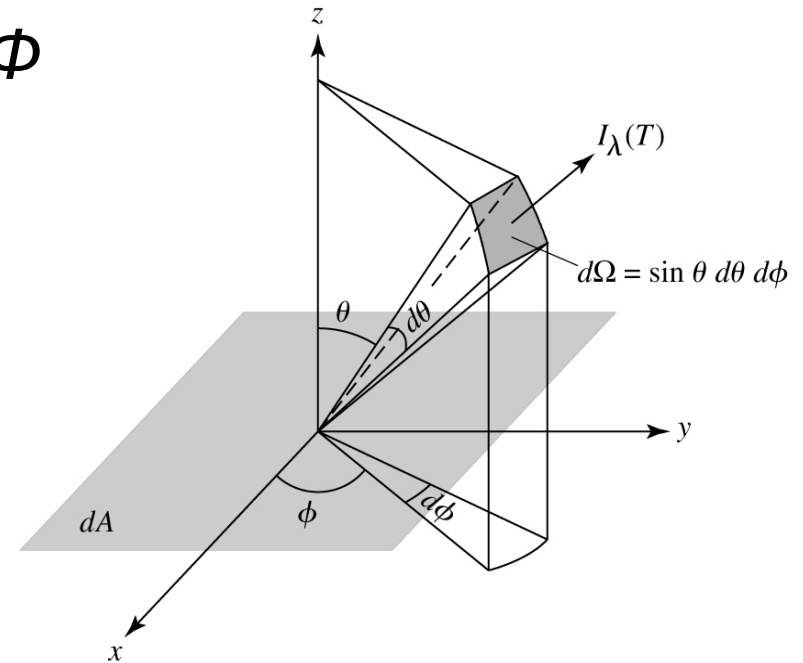
A **intensidade média** é a intensidade específica integrada sobre todas as direções, E dividida por 4π sr

$$\begin{aligned} \langle I_{\lambda} \rangle &\equiv 1/4\pi \int I_{\lambda} d\Omega \\ &= 1/4\pi \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_{\lambda} \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

Para um campo de radiação **isotrópico**: $\langle I_{\lambda} \rangle = I_{\lambda}$.

Exemplo: radiação de corpo negro: $\langle I_{\lambda} \rangle = I_{\lambda} = B_{\lambda}$,

onde $B_{\lambda} = 2hc^2\lambda^{-5} / (e^{hc/\lambda kT} - 1)$ (\Rightarrow EdM, Física Quântica,...)



O Campo de Radiação

Quanta energia está contida no campo de radiação?

Supondo um cilindro com área de base dA e “altura” dL :

A radiação percorre dL no tempo $dt = dL / c \cdot \cos \theta$

$$\Rightarrow E_{\lambda} d\lambda = I_{\lambda} d\lambda dt dA \cos \theta d\Omega = I_{\lambda} d\lambda dA d\Omega dL/c$$

mas $dA \cdot dL$ é o volume do cilindro

\Rightarrow **densidade de energia específica:**

$$u_{\lambda} d\lambda = \int (E_{\lambda} d\lambda / dAdL) d\Omega = 1/c \int I_{\lambda} d\lambda d\Omega$$

$$= 1/c \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_{\lambda} d\lambda \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi/c \langle I_{\lambda} \rangle d\lambda$$

O Campo de Radiação

Para um campo isotrópico: $u_\lambda d\lambda = 4\pi/c I_\lambda d\lambda$,

e para radiação de corpo negro: $u_\lambda d\lambda = \frac{4\pi}{c} B_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc/\lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda$

resp. em termos

da frequência da radiação: $u_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$

densidade de energia total: $u = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda = \int_0^\infty u_\nu d\nu$

corpo negro: $u = 4\pi/c \int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda = 4\sigma/c T^4 = a \cdot T^4$,

onde $a = 7.565767 \cdot 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$ constante de radiação

O Campo de Radiação

Outra grandeza de interesse é a energia entre λ e $\lambda+d\lambda$ por unidade de área e tempo passando na direção $+z$, o **fluxo radiativo específico**:

$$F_{\lambda} d\lambda = \int I_{\lambda} d\lambda \cos \theta d\Omega = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_{\lambda} d\lambda \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

! O fator $\cos \theta$ faz, que radiação passando na direção $-z$ conta negativamente.

Num campo de radiação isotrópico, $F_{\lambda} d\lambda = 0$.

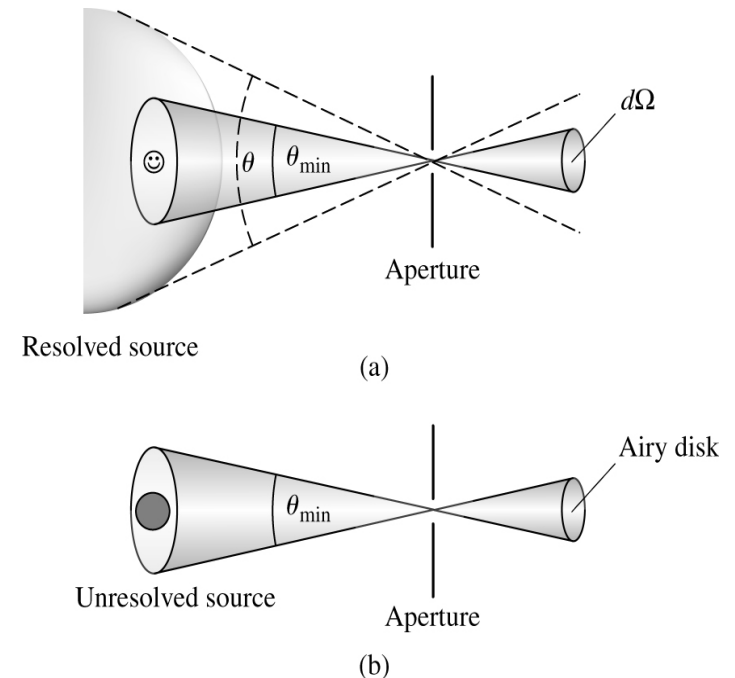
O Campo de Radiação

O que é medido por um telescópio, a intensidade específica, ou o fluxo radiativo específico?

Depende, se a fonte é espacialmente resolvida ou não.

No caso de uma fonte **resolvida**, medimos a **intensidade** específica, a **potência** por unidade de **área** (perp. à linha de visada) da fonte. Esta **independe** da **distância**, tal que medimos o mesmo valor para fontes próximas e para fontes similares distantes.

Mas a fonte próxima ocupa um ângulo sólido maior, tal que a **intensidade específica integrada** sobre a **imagem** observada **inteira** (somada sobre os “píxels” da imagem) cai com o **quadrado** da **distância**.

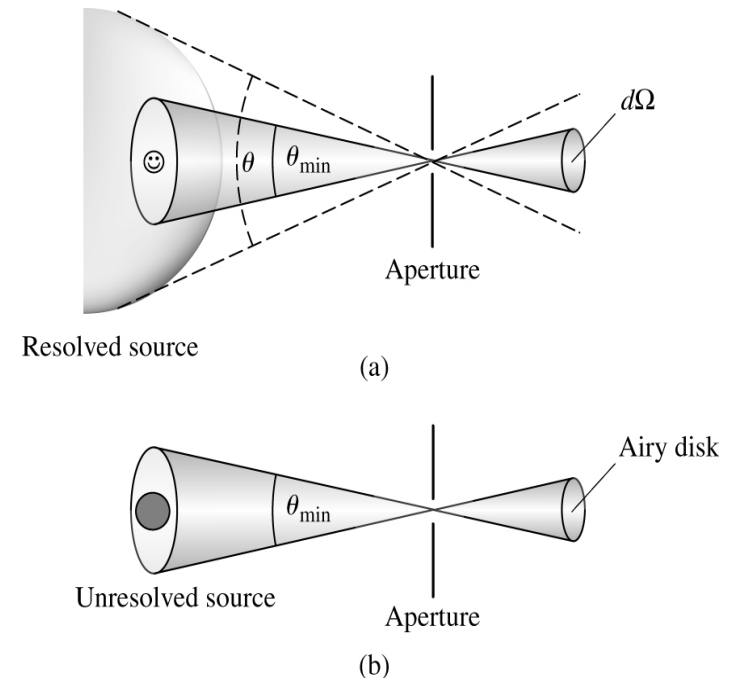


O Campo de Radiação

O que é medido por um telescópio, a intensidade específica, ou o fluxo radiativo específico?

Depende, se a fonte é espacialmente resolvida ou não.

No caso de uma fonte **não-resolvida**, medimos o **fluxo radiativo** específico, a potência por unidade de área do observador/telescópio. Este também cai com o **quadrado** da **distância**.

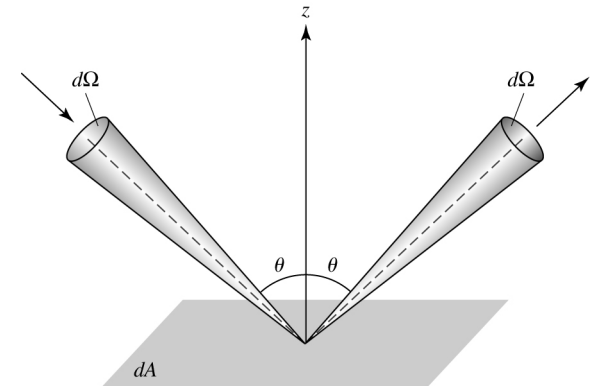


A Pressão da Radiação

Como sabemos da física quântica, **fótons** têm **momento linear** $p = E/c = h\nu/c = h/\lambda$ e podem transferir este para outras partículas.

=> podem exercer **pressão**.

Supondo radiação com potência $E_\lambda d\lambda$ sendo refletida por uma placa de área dA sob um ângulo θ .



Esta radiação muda de momento linear por

$$\begin{aligned} |d\mathbf{p}_\lambda| d\lambda &= 2\cos\theta p_\lambda d\lambda = 2\cos\theta E_\lambda /c d\lambda \\ &= 2/c \cdot I_\lambda d\lambda dt dA \cos^2\theta d\Omega \text{ (na direção -z)} \end{aligned}$$

Pela 3ª lei de Newton, ela exerce a força $-d\mathbf{p}_\lambda/dt$ na placa

=> pressão exercida por esta radiação (em módulo):

$$P_{\text{rad},\lambda} d\lambda = |d\mathbf{p}_\lambda| d\lambda/dt/dA = 2/c \cdot I_\lambda d\lambda \cos^2\theta d\Omega$$

A Pressão da Radiação

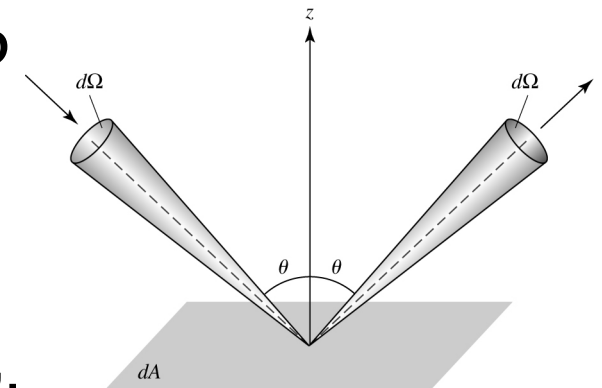
Integrando esta pressão sobre a radiação vindo de todas as direções incidindo em dA “de cima” ($\theta < \pi/2$):

$$P_{\text{rad},\lambda} d\lambda = 2/c \cdot \int_{\theta < \pi/2} I_{\lambda} d\lambda \cos^2\theta d\Omega$$
$$= 2/c \cdot \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_{\lambda} d\lambda \cos^2\theta \sin\theta d\theta d\phi$$

Substituindo a “placa” por uma superfície matemática, a radiação não é refletido => temos que remover o fator 2, e ela vem “de cima” e “de baixo”:

$$P_{\text{rad},\lambda} d\lambda = 1/c \cdot \int I_{\lambda} d\lambda \cos^2\theta d\Omega$$
$$= 1/c \cdot \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_{\lambda} d\lambda \cos^2\theta \sin\theta d\theta d\phi$$
$$= 4\pi/3c \cdot I_{\lambda} d\lambda \text{ para um campo de radiação isotrópico}$$

Para um campo não-isotrópico, a pressão dependerá da orientação da superfície matemática dA .



A Pressão da Radiação

A **pressão radiativa total** é obtida integrando sobre todos os comprimentos de onda:

$$P_{\text{rad}} = \int_0^{\infty} P_{\text{rad},\lambda} d\lambda$$

Para o corpo negro:

$$P_{\text{rad}} = 4\pi/3c \cdot \int_0^{\infty} B_{\lambda}(T) d\lambda = 4\sigma T^4/3c = 1/3 \cdot aT^4 = 1/3 \cdot u,$$

um terço da densidade de energia

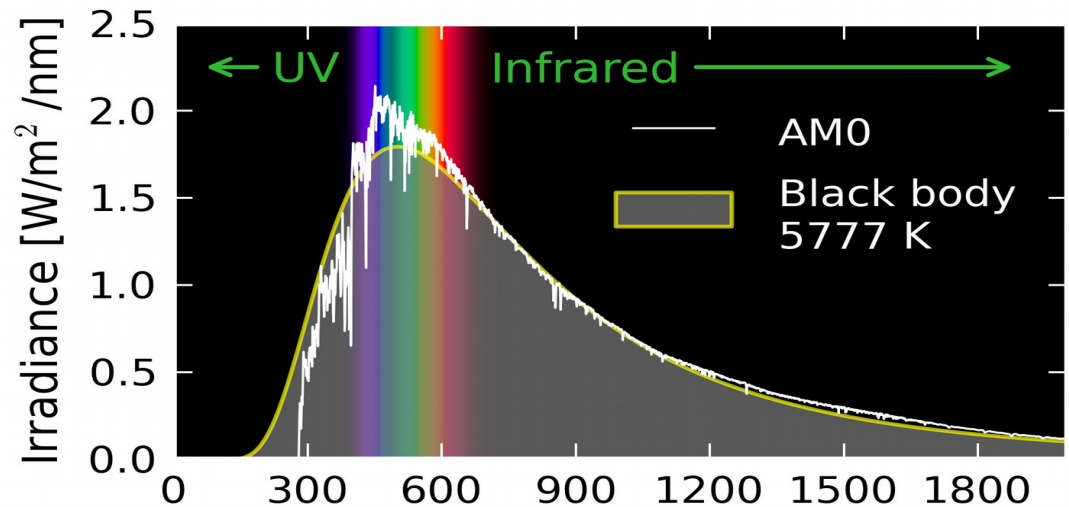
(para comparação: para um gás ideal, a pressão é 2 terços da densidade de energia

=> Estrutura da Matéria, Fenômenos Térmicos).

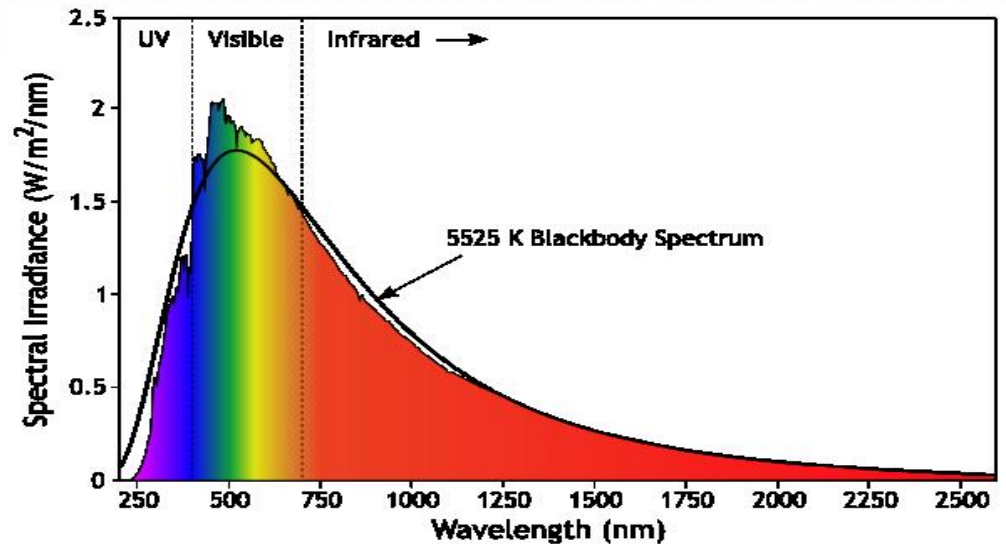
Opacidade Estelar

Como definir a temperatura de uma estrela?

Na figura superior, o espectro do Sol comparado ao espectro de um corpo negro com a mesma potência por área, de 5777 K.



Na inferior, com o espectro da “mesma cor”, de 5250 K.



=> Não é tão simples
Assim, existem **várias**
medidas de **temperatura**.

Opacidade Estelar

Como definir a temperatura de uma estrela?

- **Temperatura Efetiva**: $T = (L/A\sigma)^{1/4}$, baseada na lei de Stefan-Boltzmann.
- **Temperatura de excitação**, definida pela equação de Boltzmann.
- **Temperatura de ionização**, definida pela equação de Saha.
- **Temperatura cinética**, contida na distribuição de Maxwell-Boltzmann.
- **Temperatura de cor**, obtida ajustando a forma do espectro contínuo à função de Planck.

Opacidade Estelar

Como definir a temperatura de uma estrela?

Com exceção da **temperatura efetiva**, que depende da definição de uma **superfície**, todas estas medidas de temperatura **variam** com a **posição** dentro da estrela.

Mas, se o gás está em **equilíbrio termodinâmico**, isto é, cada processo ocorre na mesma taxa que o seu processo inverso, não há fluxo de energia, todas as medidas de temperatura concordam e temos uma temperatura bem-definida.

Opacidade Estelar

Como definir a temperatura de uma estrela?

Na prática, equilíbrio termodinâmico não pode existir numa estrela; há gradientes de temperatura e transporte de energia de dentro para fora, mas se as distâncias, naquelas as mudanças de temperatura ocorrem são grandes comparadas às distâncias percorridas pelas partículas e fótons entre choques (os seus **percursos livres médios**), a idealização de uma temperatura bem-definida pode ser mantida localmente. Temos **equilíbrio termodinâmico local** (LTE).

Opacidade Estelar

Como determinar o percurso livre médio?

Supondo que o gás tenha densidade de partículas

$n = \rho/m_H$. (ρ = densidade, m_H = massa do átomo de H),

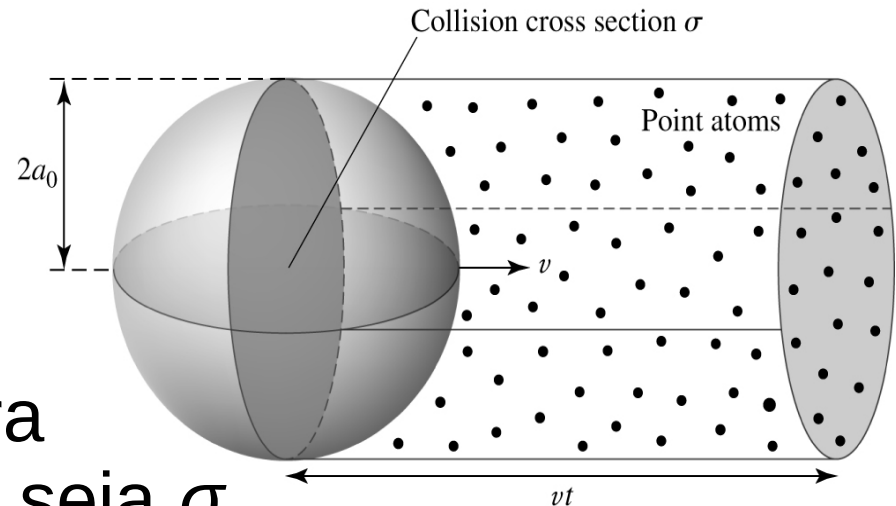
e que a seção transversal para o tipo de choque de interesse seja σ

(i.e. para choques $H \rightleftharpoons H$, $\pi(2a_0)^2$, a_0 = raio de Bohr).

Se as partículas viajam com velocidade v , em um tempo t , elas varrem um volume $V = \sigma vt$.

Neste volume há $n\sigma vt$ átomos, com aqueles a partícula colidiu => distância média entre choques

(= **percurso livre médio**): $\ell = vt/n\sigma vt = 1/n\sigma$.



Opacidade Estelar

Chamamos de **absorção** qualquer processo que remove fótons de um raio de luz, i. e. a absorção para fazer uma transição entre níveis de energia, mas também processos de espalhamento, (Thomson, Compton, ...).

A mudança de energia, dI_λ , de um raio viajando pelo gás é proporcional à sua intensidade I_λ , à densidade do gás ρ e à distância percorrida ds :

$dI_\lambda = -\kappa_\lambda \rho I_\lambda ds$, onde κ_λ é chamada **coeficiente de absorção**, ou **opacidade** (monocromática), $[\kappa_\lambda] = \text{m}^2 \text{kg}^{-1}$.

Em geral, a opacidade κ_λ de um gás depende das suas **composição, densidade e temperatura**.

! Alguns autores definem como opacidade o inverso do percurso livre médio (que difere da nossa definição por um fator ρ).

Opacidade Estelar

$$dI_\lambda = -\kappa_\lambda \rho I_\lambda ds \Rightarrow \text{integra } \int_{I_{\lambda,0}}^{I_{\lambda,f}} \frac{dI_\lambda}{I_\lambda} = - \int_0^s \kappa_\lambda \rho ds$$

$$\Rightarrow I_\lambda = I_{\lambda,0} \exp(-\int_0^s \kappa_\lambda \rho ds)$$

Para um gás uniforme com opacidade e densidade constantes:

$$I_\lambda = I_{\lambda,0} \exp(-\kappa_\lambda \rho s)$$

Em um **percurso livre médio**, I_λ diminui por um fator e:

$$\Rightarrow \ell = 1/\kappa_\lambda \rho.$$

Opacidade Estelar

Profundidade Ótica (?, *Optical Depth*)

É útil definir a profundidade ótica, τ_λ , de volta ao longo do raio de luz usando: $d\tau_\lambda = -\kappa_\lambda \rho ds$

=> A diferença em profundidade ótica entre as posições inicial (0) e final (f) após viajar a distância s é:

$$\Delta\tau_\lambda = \tau_{\lambda,f} - \tau_{\lambda,0} = -\int_0^s \kappa_\lambda \rho ds.$$

Tomando $\tau_\lambda = 0$ na superfície da estrela (a partir de lá, a luz viaja desobstruída até o observador na Terra) conseguimos calcular a profundidade ótica na posição de partida da luz, $\tau_{\lambda,0}$: $\tau_\lambda = \int_0^s \kappa_\lambda \rho ds$ (omitindo o “0”)

Opacidade Estelar

Profundidade Ótica

Combinando com $I_\lambda = I_{\lambda,0} \exp(-\int_0^s \kappa_\lambda \rho ds)$, obtemos que um raio viajando da profundidade ótica τ_λ até o observador é: $I_\lambda = I_{\lambda,0} e^{-\tau_\lambda}$.

A profundidade ótica pode ser interpretado como o **número de percursos livres médios** da posição inicial até a superfície ao longo do caminho do raio.

=> não vemos muito mais fundo que $\tau_\lambda \approx 1$.

Se $\tau_\lambda \gg 1$ => gás óticamente espesso

Se $\tau_\lambda \ll 1$ => gás óticamente fino

Exemplo: A atmosfera da Terra é óticamente fina em luz visual, e espessa em raios-X.

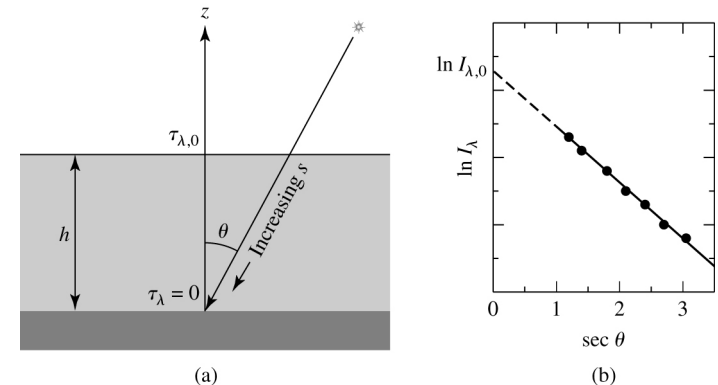
Opacidade Estelar

Profundidade Ótica

Caso a raio faz um ângulo θ com a perpendicular à camada de gás, temos $ds = -dz / \cos \theta$:

$$I_{\lambda} = I_{\lambda,0} e^{-\tau_{\lambda,0} / \cos \theta}.$$

Com uma observação única de um corpo celeste, $I_{\lambda,0}$ e $\tau_{\lambda,0}$ são incógnitas, mas dá para determiná-los enquanto a Terra gira e θ varia.

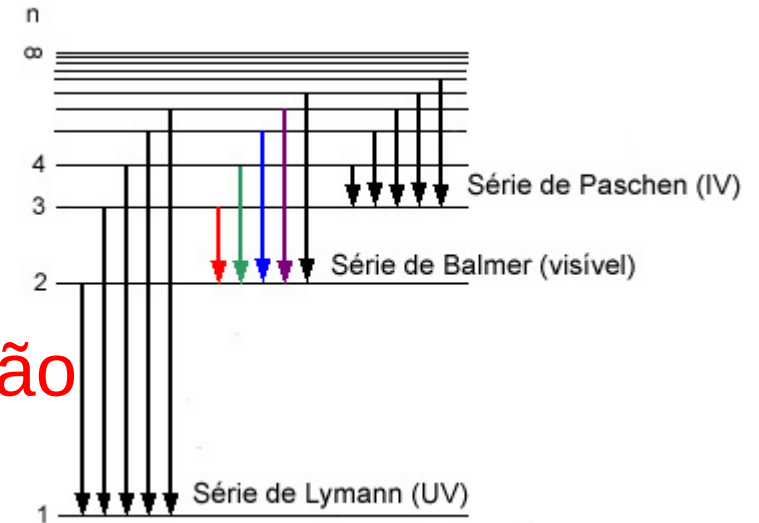


Opacidade Estelar

Há 4 fontes de **opacidade**:

- **Transições entre estados ligados** (*bound-bound*, excitações e de-excitações): responsável pelas **linhas de absorção**. $\kappa_{\lambda,bb}$ é baixa para comprimentos de onda outros que os das linhas espectrais. Não há uma fórmula simples para $\kappa_{\lambda,bb}$.

As **de-excitações** podem ser **diretamente** de volta pro estado inicial (dá no mesmo que o espalhamento do fóton), em **vários passos** (**degrada** a energia dos fótons) ou por **colisões** (energia vira energia térmica do gás).



Opacidade Estelar

- **Transições estado ligado => estado livre**
(*bound-free*, foto-**ionização**):

pode ocorrer, se a energia do fóton é maior que a energia de ionização do gás a partir do n -ésimo orbital, χ_n :

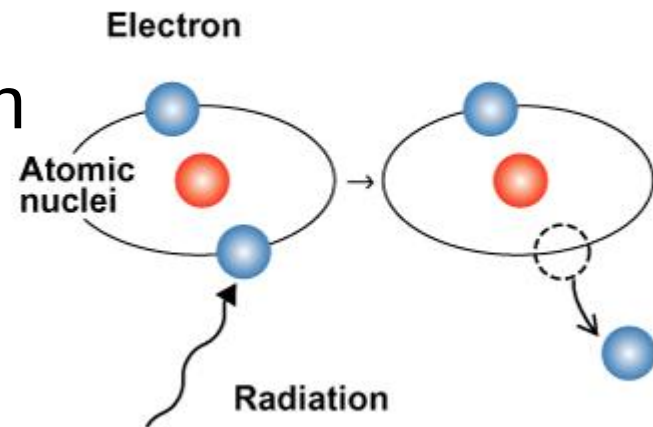
$$h\nu \geq \chi_n \text{ ou } \lambda \leq hc/\chi_n.$$

=> $\kappa_{\lambda, \text{bf}}$ é uma fonte de opacidade **contínua**.

Seção transversal: $\sigma_{\text{bf}} = 1.31 \cdot 10^{-19} n^{-5} (\lambda/500 \text{ nm})^3 \text{ m}^2$

Pode causar **descontinuidades** no espectro em $\lambda = hc/\chi_n$
(por exemplo o “Balmer jump”).

O processo inverso, a **recombinação** com emissão de um **fóton** em geral também **degrada** a energia de fótons.



Opacidade Estelar

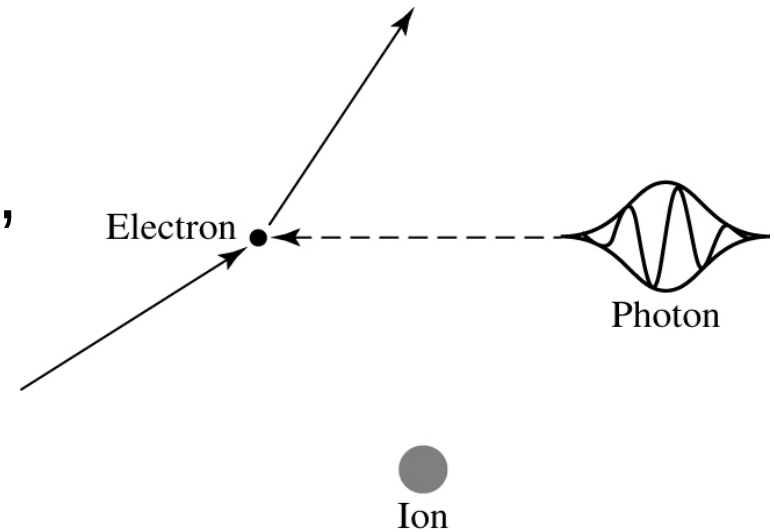
- Transições entre estados livres (free-free):

Um elétron livre absorve um fóton, acelerando o elétron.

É preciso de um íon por perto para conservar energia e momento linear.

$\kappa_{\lambda,ff}$ também é uma fonte de opacidade **contínua**.

O processo oposto, um elétron desacelerando e emitindo um fóton ao passar perto de um íon é chamado *Bremsstrahlung* (radiação de freiamento em alemão).



Opacidade Estelar

- Espalhamento por elétrons

(- Thomson, Compton, Rayleigh):

Um fóton é espalhado (não absorvido) por um elétron

livre (Thomson) ou ligado fracamente

a um átomo ($\lambda \ll$ átomo: Compton, $\lambda \gg$ átomo: R.)

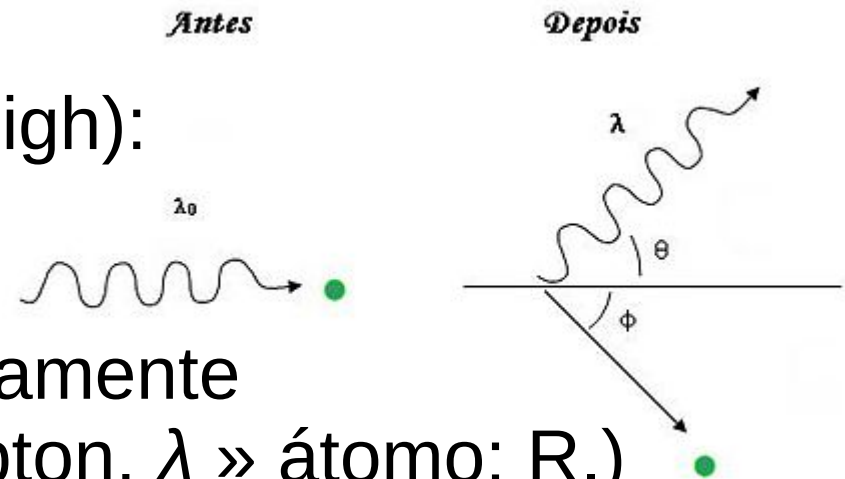
A seção de choque é pequeno e independe de λ :

$$\sigma_T = \frac{1}{6\pi\epsilon_0^2} (e^2/m_e c^2)^2 = 6.65 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2$$

$\Rightarrow \kappa_{es}$ normalmente é pequeno, com exceção de quando

há muitos e^- livres, em altas temperaturas.

O espalhamento Rayleigh tem σ prop. λ^{-4} e é importante nos envelopes estendidos de estrelas supergigantes e em situações de avermelhamento.



Opacidade Estelar

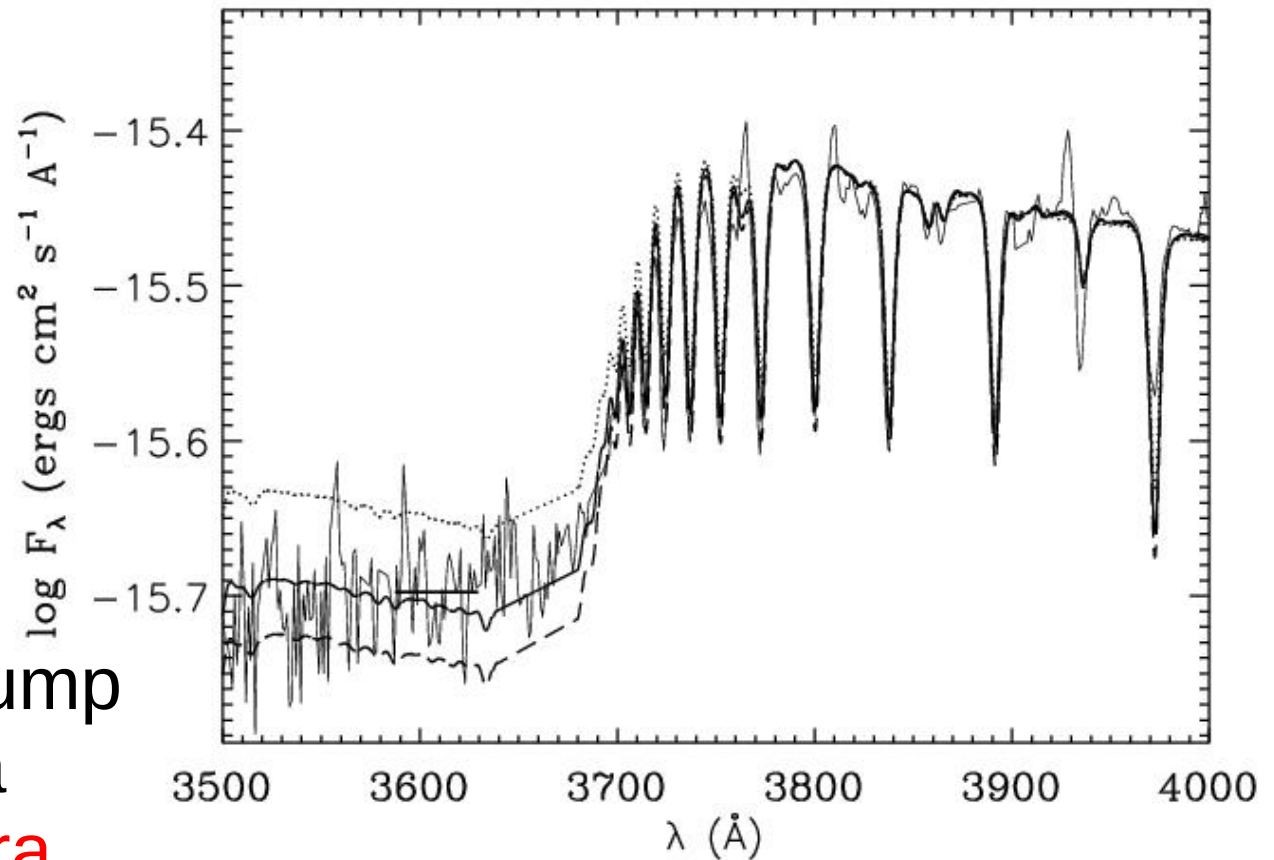
O “**Balmer jump**” (absorção de fótons pela ionização de hidrogênio inicialmente no estado $n = 2$)

$$E_2 = -13.6/2^2 \text{ eV}$$

$$= -3.4 \text{ eV} = -\chi_2$$

$$\lambda \leq hc/\chi_2 = 364.7 \text{ nm}$$

Já que o no. de átomos de H com $n = 2$ depende da temperatura (aula anterior), o Balmer jump pode ser usado para estimar a **temperatura**.



Opacidade Estelar

Outras contribuições importantes

- **Ionização de H**: importante para estrelas quentes, dos tipos A e B.
- **Espalhamento de elétrons**: estrelas mais quentes ainda, tipo O
- **O íon de H⁻** (átomo de H com um elétron extra), energia de ligação baixa, de 0.754 eV correspondendo a 1640 nm. A remoção do 2^o elétron é uma importante fonte de absorção contínua para estrelas frias a partir do tipo F, para λ maiores também responsável por espalhamento *free-free*.
- **Moléculas**: *bound-bound* e *bound-free* em estrelas frias, causando **bandas** de **absorção** (não linhas).

Opacidade Estelar

A **opacidade total** é a soma de todas as contribuições:

$$K_{\lambda} = K_{\lambda,bb} + K_{\lambda,bf} + K_{\lambda,ff} + K_{es} + K_{H-}$$

e depende, além de de λ , das composição, densidade e temperatura do material estelar.

Às vezes é útil usar uma opacidade **mediada** sobre todos os **comprimentos de onda**. A mais usada é a (opacidade) média de **Rosseland**:

uma média ponderada, que depende da taxa de variação

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\nu}} \frac{\partial B_{\nu}(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{\partial B_{\nu}(T)}{\partial T} d\nu}$$

do espectro de corpo negro com a temperatura e dando peso alto para valores baixas de opacidade.

Opacidade Estelar

Definimos

$X \equiv$ massa do hidrogênio / massa total do gás (~ 0.73),

$Y \equiv$ massa do hélio / massa total do gás (~ 0.26), e

$Z^* \equiv$ massa dos demais elementos / massa total do gás
entre 0.000'000'1 e 0.1 para estrelas até hoje
observadas ($Z_{\odot} = 0.019$)

Obviamente $X + Y + Z = 1$

*Já que, em primeira aproximação, os elementos mais pesadas do que hélio (“metais”) sempre são **formados juntos** da mesma maneira em **estrelas**, eles ocorrem sempre na **mesma abundância relativa**, tal que o parâmetro Z , também chamado de **metalicidade**, é suficiente para quantificar a composição química do gás (e não precisamos de um parâmetro para cada elemento).

Opacidade Estelar

Metalicidade

Frequentemente é usado um parâmetro logarítmico para quantificar a metalicidade:

$$[\text{Fe}/\text{H}] = \log_{10} [(\text{Fe}/\text{H})/(\text{Fe}/\text{H})_{\odot}] \quad (= [\text{Z}/\text{H}] = [\text{O}/\text{H}] = \dots)$$

uma “unidade” de um fator 10 em Z é, às vezes, chamada de dex,

com Z variando entre 0.000'000'1 e 0.1 e $Z_{\odot} = 0.019$,

$[\text{Fe}/\text{H}]$ varia entre -5 e +0.3.

$[\text{Fe}/\text{H}]_{\odot}$ é, por definição, zero.

Opacidade Estelar

Usando estas definições existem as seguintes aproximações pra maioria das opacidades:

$$\bar{\kappa}_{\text{bf}} = 4.34 \times 10^{21} \frac{g_{\text{bf}}}{t} Z(1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$$

$$\bar{\kappa}_{\text{ff}} = 3.68 \times 10^{18} g_{\text{ff}} (1 - Z)(1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$$

onde g_{bf} e g_{ff} são termos de correção quanto-mecânicos da ordem de 1 chamados fatores de Gaunt.

t é chamado fator de guillotine por descrever o fim da contribuição de um átomo na opacidade após ser ionizado. t é entre 1 e 100.

Opacidade Estelar

Para as contribuições do espalhamento de elétrons:

$$\bar{\kappa}_{es} = 0.02(1 + X) \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$$

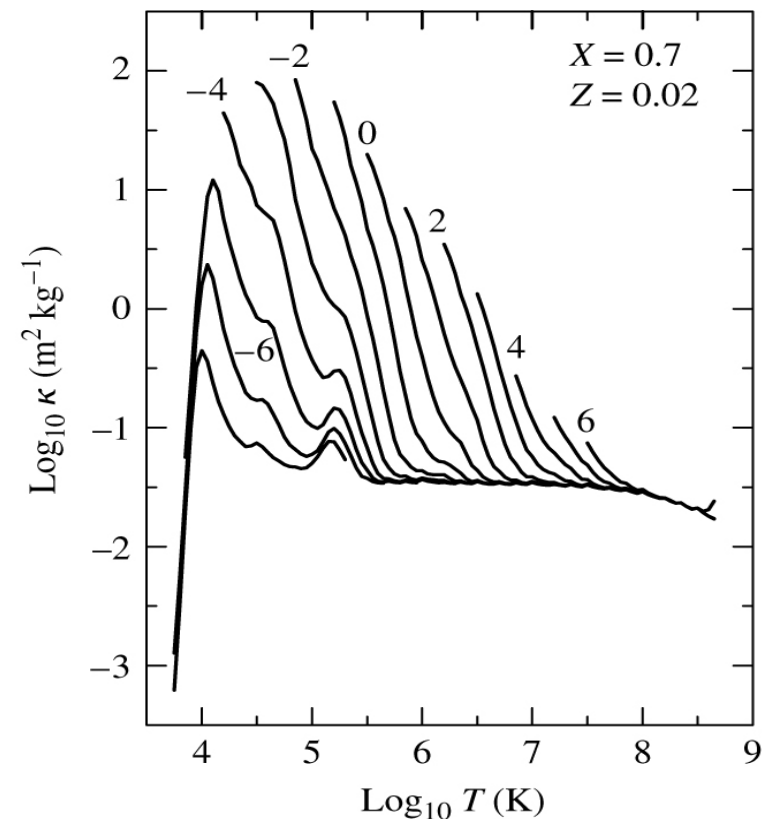
e do íon H^-

(válida entre 3000 K e 7000 K):

$$\bar{\kappa}_{\text{H}^-} \approx 7.9 \times 10^{-34} (Z/0.02) \rho^{1/2} T^9 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$$

A média de Rosseland é a média da soma das contribuições individuais:

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{bb} + \bar{\kappa}_{bf} + \bar{\kappa}_{ff} + \bar{\kappa}_{es} + \bar{\kappa}_{\text{H}^-}$$



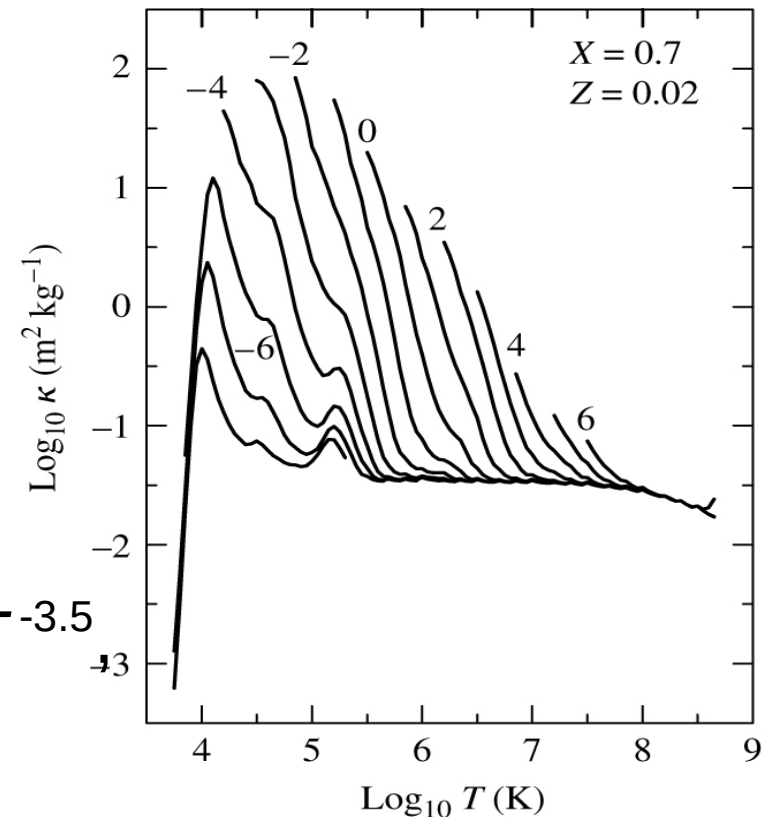
$\bar{\kappa}$, os rótulos das curvas significam o logaritmo da densidade (em kg m^{-3})

Opacidade Estelar

Para uma dada temperatura, a opacidade aumenta com a densidade (lógico).

Para uma dada densidade, $\bar{\kappa}$ aumenta primeiro com a temperatura, devido ao aumento do número de elétrons livres (ionização de H e He em torno de 10000 K).

A queda em seguida, de $\bar{\kappa}$ prop. $T^{-3.5}$ é devida à absorção *bound-free* e *free-free* de fótons (Lei de Kramer)



$\bar{\kappa}$, os rótulos das curvas significam o logaritmo da densidade (em kg m^{-3})

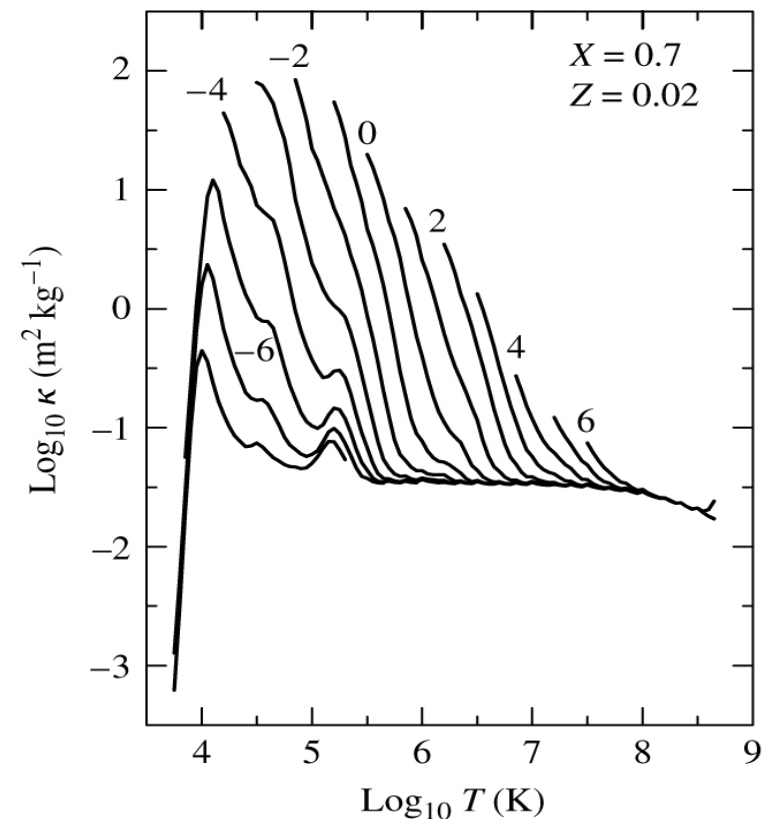
Opacidade Estelar

A subidinha em 40'000 K é devida à segunda ionização de Hélio.

Outra subidinha , a $> 100'000$ K, é o resultado da ionização de certos metais (especialmente Fe).

Para as mais altas temperaturas, $\bar{\kappa}$ é praticamente constante.

Aqui espalhamente em elétrons livres domina, e o número destes independe de densidade e temperatura.



$\bar{\kappa}$, os rótulos das curvas significam o logaritmo da densidade (em kg m^{-3})

Transporte Radiativo

Em certas camadas da atmosfera e do interior das estrelas, o **transporte** de **energia** ocorre por meio de fótons.

Estas camadas podem ser chamadas **zonas radiativas**.

Chamamos de **emissão** qualquer processo que adiciona **fótons** a um feixe de luz.

Para cada um dos quatro processos de absorção mencionados antes, há um processo inverso de emissão: emissão por transição entre níveis (*bound-bound*) por recombinação (*free-bound*), bremsstrahlung (*free-free*) e espalhamento por elétrons.

No transporte radiativo, fótons são **absorvidos** e **re-emitidos** constantemente.

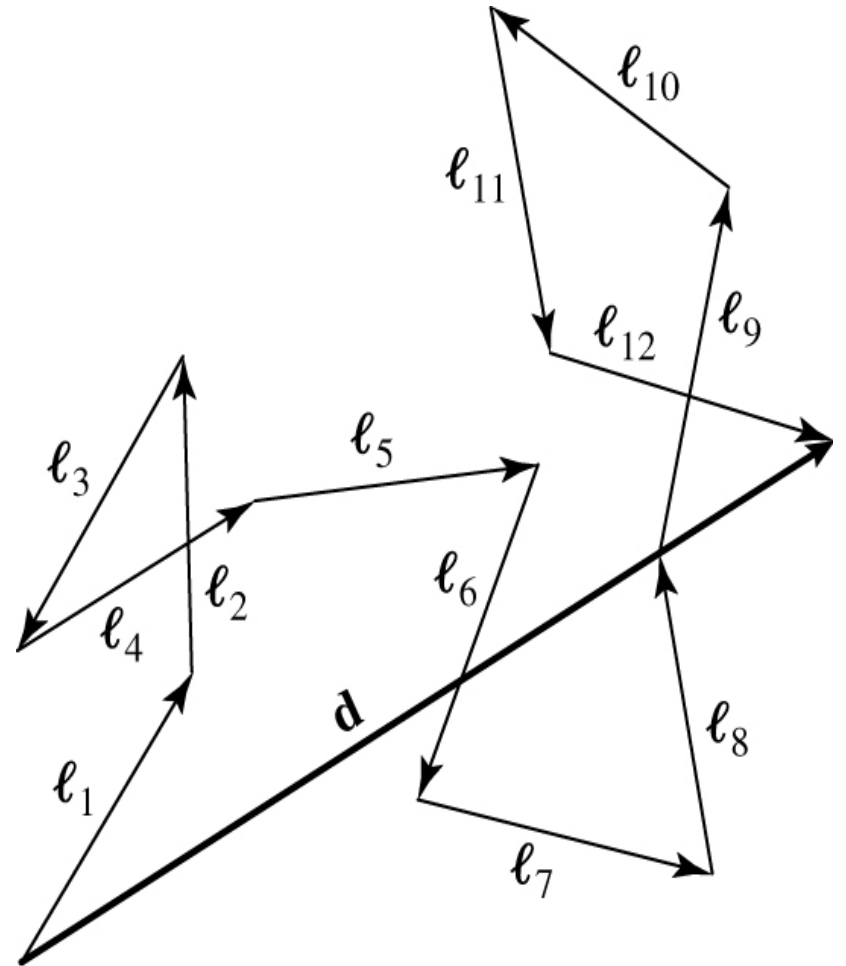
Transporte Radiativo

O passeio aleatório

Entre dois choques, os fótons percorrem, em média, um percurso livre médio ℓ .

Após cada choque, os fótons são re-emitidos em direções aleatórias, resultando em um **passéio aleatório**.

Por qual distância um fóton se desloca **em média** após N choques?



Transporte Radiativo

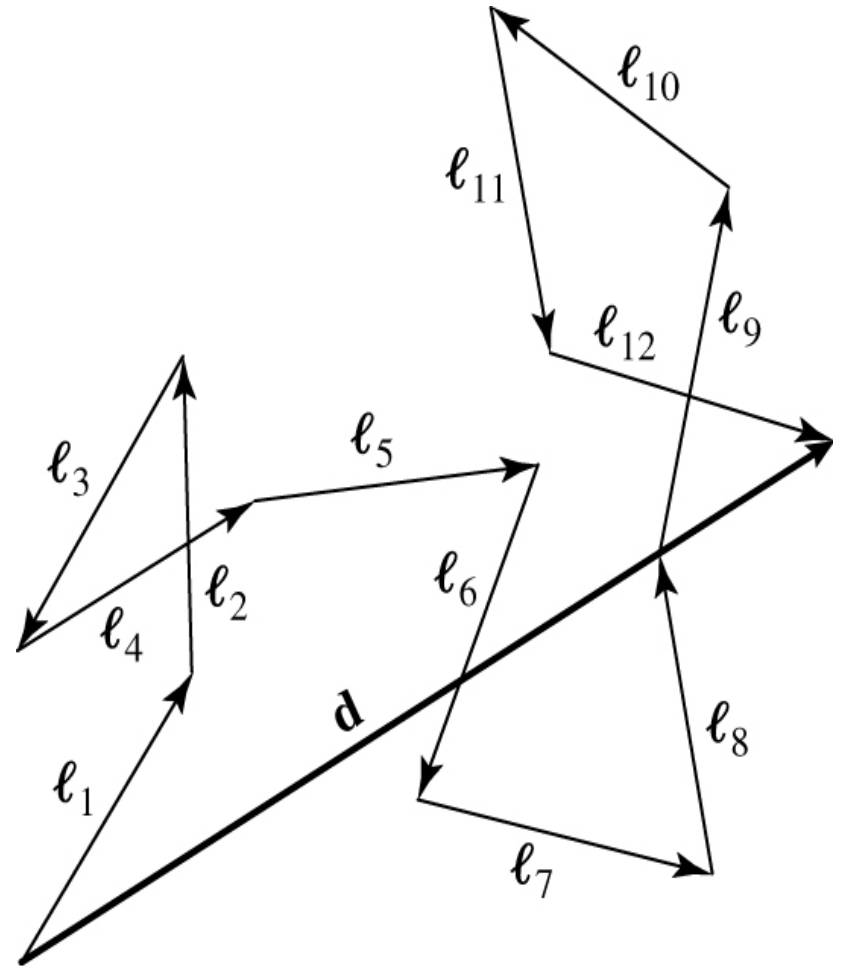
O passeio aleatório

$$\mathbf{d} = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \cdots + \ell_N.$$

O produto escalar de \mathbf{d} consigo mesmo:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} &= \ell_1 \cdot \ell_1 + \ell_1 \cdot \ell_2 + \cdots + \ell_1 \cdot \ell_N \\ &\quad + \ell_2 \cdot \ell_1 + \ell_2 \cdot \ell_2 + \cdots + \ell_2 \cdot \ell_N \\ &\quad + \cdots + \ell_N \cdot \ell_1 + \ell_N \cdot \ell_2 + \cdots + \ell_N \cdot \ell_N \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \ell_i \cdot \ell_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 &= N\ell^2 + \ell^2 [\cos \theta_{12} + \cos \theta_{13} + \cdots + \cos \theta_{1N} \\ &\quad + \cos \theta_{21} + \cos \theta_{23} + \cdots + \cos \theta_{2N} \\ &\quad + \cdots + \cos \theta_{N1} + \cos \theta_{N2} + \cdots + \cos \theta_{N(N-1)}] \\ &= N\ell^2 + \ell^2 \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \cos \theta_{ij}, \end{aligned}$$



Transporte Radiativo

O passeio aleatório

Os termos com os cossenos se cancelam em média.
=> Em média, os fótons se deslocam em **N passos** por uma **distância** de $\sqrt{N} \cdot \ell$.

Já que a profundidade ótica é a distância percorrida pelos fótons em unidades do percurso livre médio, temos que, para percorrer uma profundidade ótica τ_λ , é preciso de $N = (d/\ell)^2 = \tau_\lambda^2$ passos.

Este método de transporte pode ser muito **lento**.
Exemplo: No caso do Sol, a radiação leva da ordem de 170'000 anos para atravessar a zona radiativa, de $\sim 0.4 R_\odot \approx 300'000$ km (=> aula Sol).

A Equação de Transporte

O coeficiente de emissão

Análogo à absorção, no caso de um ambiente de emissão pura a intensidade de um raio passando pelo meio aumenta:

$$dl_{\lambda} = j_{\lambda} \rho ds,$$

Onde j_{λ} é o **coeficiente de emissão** do gás $[j_{\lambda}] = \text{m s}^{-3} \text{sr}^{-1}$.

Em geral, temos absorção e emissão:

$$dl_{\lambda} = -\kappa_{\lambda} \rho l_{\lambda} ds + j_{\lambda} \rho ds.$$

A Equação de Transporte

A Função de Fonte

Dividindo por $-\kappa_\lambda \rho ds$:

$$-1/\kappa_\lambda \rho \cdot dl_\lambda/ds = I_\lambda - j_\lambda/\kappa_\lambda$$

A razão entre os coeficientes de emissão e absorção determina, se (e por quanto) o raio aumenta ou diminui em intensidade, e é chamado **função de fonte** $S_\lambda \equiv j_\lambda/\kappa_\lambda$.

=> Podemos escrever a equação anterior como:

$$-1/\kappa_\lambda \rho \cdot dl_\lambda/ds = I_\lambda - S_\lambda,$$

Que é uma forma da **equação de transporte radiativo**, ou equação de transporte.

A Equação de Transporte

$$-1/\kappa_{\lambda} \rho \cdot dl_{\lambda}/ds = I_{\lambda} - S_{\lambda},$$

Dá para ver que:

- se $I_{\lambda} < S_{\lambda} \Rightarrow dl_{\lambda}/ds$ é positivo, I_{λ} aumenta,
- se $I_{\lambda} > S_{\lambda} \Rightarrow dl_{\lambda}/ds$ é negativo, I_{λ} diminui e
- se $I_{\lambda} = S_{\lambda} \Rightarrow dl_{\lambda}/ds = 0$, I_{λ} é constante

(a radiação está em equilíbrio com o gás)

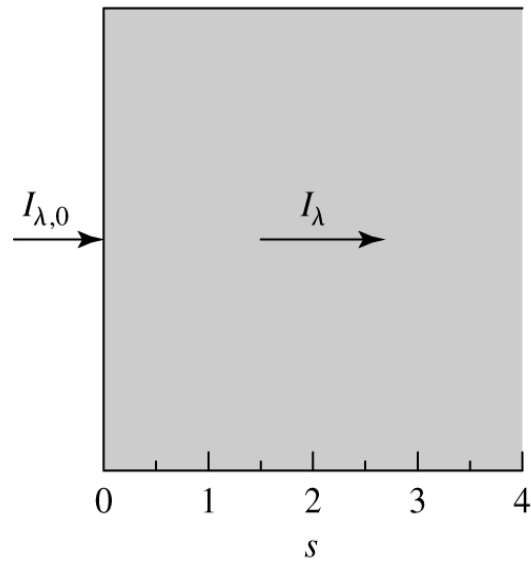
$\Rightarrow I_{\lambda}$ **tende** ao valor local da **função de fonte**.

Supondo um raio com intensidade inicial $I_{\lambda,0}$ passando por um meio com densidade, opacidade e função de fonte constantes:

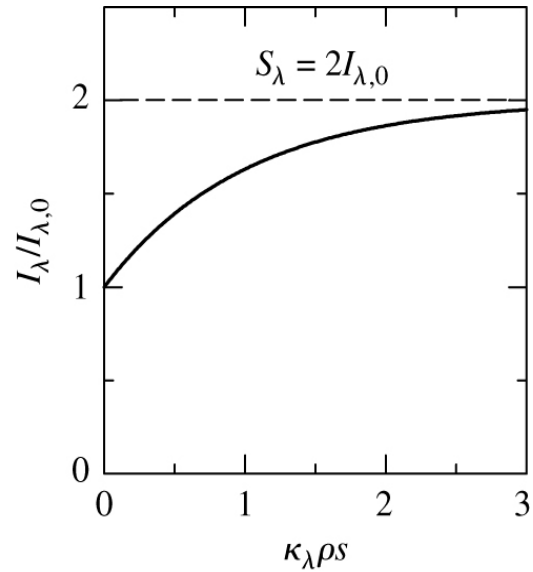
$$I_{\lambda}(s) = I_{\lambda,0} e^{-\kappa_{\lambda} \rho s} + S_{\lambda} (1 - e^{-\kappa_{\lambda} \rho s})$$

A Equação de Transporte

$$I_{\lambda}(s) = I_{\lambda,0} e^{-\kappa_{\lambda}\rho s} + S_{\lambda}(1 - e^{-\kappa_{\lambda}\rho s})$$



(a)



(b)

A Equação de Transporte

No caso de radiação de corpo negro, $I_\lambda = B_\lambda$.

Além disso temos **equilíbrio termodinâmico**, $I_\lambda = B_\lambda = S_\lambda$ (localmente).

Como mencionado, uma estrela real não pode estar em equilíbrio termodinâmico perfeito, há um fluxo de energia de dentro para fora.

Porém, bem debaixo da superfície a uma profundidade ótica $\tau_\lambda \gg 1$, um fóton fazendo um passeio aleatório leva pelo menos τ_λ^2 passos para alcançar a superfície. Numa profundidade onde o percurso livre médio é pequeno em relação à altura de escala térmica, os fótons são confinados a um espaço de temperatura \sim constante., e as condições para LTE são satisfeitas.

A Equação de Transporte

Em estrelas reais, aplicar a equação de transporte pode ser bem **complicado**, com a **intensidade** da luz dependendo da **direção** de propagação, e os **coeficientes** de **absorção** e **emissão** dependendo de maneira complicada de ρ e T .

Para aprender algo sobre atmosferas estelares temos que saber, **onde** (em que profundidade) as **linhas espectrais** são formados.

Reescrevendo a equação de transporte em termos de τ_λ :

$$dI_\lambda / d\tau_\lambda = I_\lambda - S_\lambda,$$

e usamos a **aproximação**, que as **atmosferas** de estrelas (da sequência principal) são **finas** em comparação aos raios, e podem ser consideradas **planas**.

A Equação de Transporte

A Suposição da Atmosfera Plana e Paralela

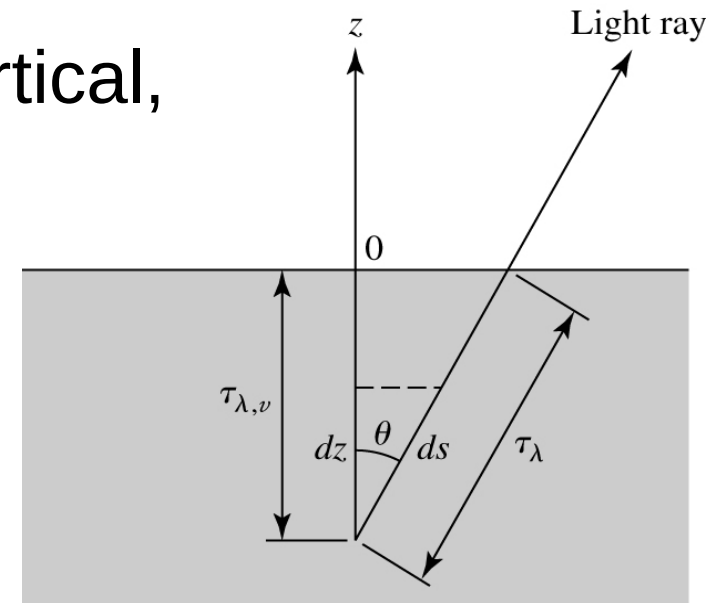
Tomando como eixo z a direção vertical, e $z = 0$ no topo da atmosfera.

A **profundidade ótica vertical** é definida como:

$$\tau_{\lambda,v}(z) = \int_z^0 \kappa_{\lambda} \rho dz.$$

Mas, caso o raio não está viajando pra cima, fazendo um **ângulo** θ com a vertical temos:

$$\tau_{\lambda} = \tau_{\lambda,v} / \cos \theta \Rightarrow \cos \theta \cdot dl_{\lambda} / d\tau_{\lambda,v} = I_{\lambda} - S_{\lambda}.$$



A Equação de Transporte

A Suposição da Atmosfera Plana e Paralela

Para simplificar integramos sobre todos os λ :

$$I = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda \text{ e } S = \int_0^\infty S_\lambda d\lambda$$

A equação de transporte usando esta “atmosfera cinza”:

$$\cos \theta \frac{dI}{d\tau_v} = I - S$$

e integrando sobre todas as direções (S é isotrópico):

$$\frac{dI}{d\tau_v} \int I \cos \theta d\Omega = \int I d\Omega - S \int d\Omega$$

$$\text{mas } F_{\text{rad}} = \int I \cos \theta d\Omega \Rightarrow \frac{dF_{\text{rad}}}{d\tau_v} = 4\pi(\langle I \rangle - S)$$

A Equação de Transporte

A Suposição da Atmosfera Plana e Paralela

Também podemos multiplicar a relação com $\cos \theta$ e de novo integrar sobre todos os ângulos:

$$d/d\tau_v \int I \cos^2 \theta d\Omega = \int I \cos \theta d\Omega - S \int \cos \theta d\Omega$$

Calculando a pressão da radiação usando

$$P_{\text{rad}} = 1/c \int I \cos^2 \theta d\Omega, F_{\text{rad}} = \int I \cos \theta d\Omega \text{ e } \int \cos \theta d\Omega = 0:$$

$$dP_{\text{rad}}/d\tau_v = 1/c F_{\text{rad}}.$$

$$\text{Substituindo } d\tau_v = -\bar{k}\rho dz: \quad dP_{\text{rad}}/dz = -\bar{k}\rho/c F_{\text{rad}}.$$

=> O “**vento**” de **fótons** vai de **alto** P_{rad} a **baixo** P_{rad} .

A Equação de Transporte

A Suposição da Atmosfera Plana e Paralela

Numa atmosfera de equilíbrio, nenhuma energia é adicionada ou subtraída do campo de radiação:

$$F_{\text{rad}} = \text{const.} = F_{\text{superfície}} = \sigma T_e^4,$$

$$\text{e (já que } dF_{\text{rad}}/d\tau_v = 4\pi(\langle I \rangle - S) = 0): \langle I \rangle = S$$

A intensidade deve ser igual à função de fonte.

Agora podemos integrar a equação do slide anterior para achar a **pressão da radiação** em **função** da **profundidade ótica**:

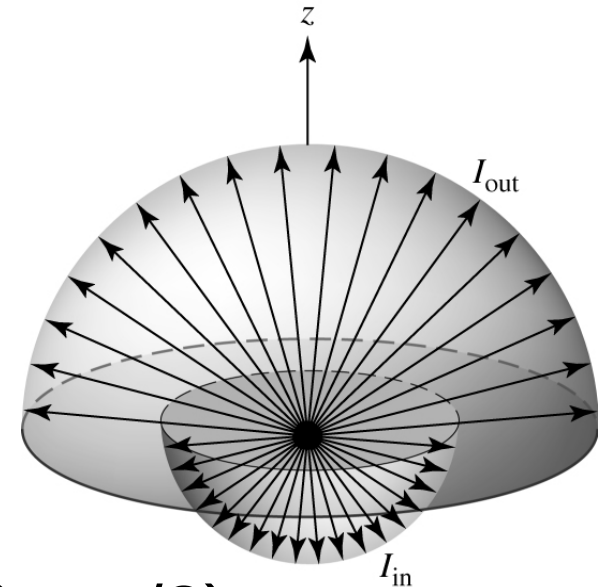
$$P_{\text{rad}} = 1/c \cdot F_{\text{rad}} \tau_v + C \quad (C = \text{const. de integração})$$
$$= P_{\text{rad}}(\tau_v=0) \text{ (na "superfície")}$$

A Equação de Transporte

A aproximação de Eddington

Conhecéssemos $P_{\text{rad}}(T)$, poderíamos usar esta equação para calcular o perfil vertical de temperatura $T(z)$ ou $T(\tau_v)$.

Usamos a **aproximação de Eddington**, que a intensidade da radiação tem apenas dois valores, I_{out} ($\theta < \pi/2$) e I_{in} ($\theta > \pi/2$).



$$\Rightarrow \langle I \rangle = \frac{1}{2} \cdot (I_{\text{out}} + I_{\text{in}}), \quad F_{\text{rad}} = \pi \cdot (I_{\text{out}} - I_{\text{in}}),$$

$$P_{\text{rad}} = \frac{2\pi}{3c} \cdot (I_{\text{out}} + I_{\text{in}}) = \frac{4\pi}{3c} \cdot \langle I \rangle$$

A Equação de Transporte

A aproximação de Eddington

Substituindo este último valor na equação do penúltimo slide:

$$4\pi/3c \cdot \langle I \rangle = 1/c \cdot F_{\text{rad}} \tau_v + C$$

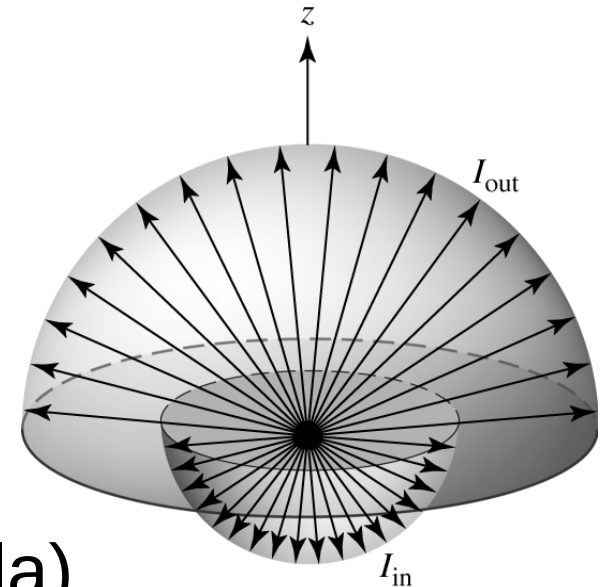
e usando $I_{\text{in}}(\tau_v=0) = 0$

(não há radiação vindo de fora da estrela),
obtemos $\langle I(\tau_v=0) \rangle = F_{\text{rad}}/2\pi$

$$\Rightarrow C = 2/3c \cdot F_{\text{rad}}, \quad 4\pi/3 \cdot \langle I \rangle = F_{\text{rad}} (\tau_v + 2/3)$$

e, já que $F_{\text{rad}} = \text{const.} = \sigma T_e^4$

$$\langle I \rangle = 3\sigma/4\pi \cdot T_e^4 (\tau_v + 2/3)$$



A Equação de Transporte

A aproximação de Eddington

Derivamos a aproximação para determinar a estrutura de temperatura da nossa atmosfera modelo, assumindo LTE => A função de fonte é a de Planck: $S_\lambda = B_\lambda$

$$\Rightarrow S = B = \sigma T^4 / \pi = \langle I \rangle$$

$$\Rightarrow T^4 = 3/4 \cdot T_e^4 (\tau_v + 2/3)$$

$$\Rightarrow T_e = T \text{ para } \tau_v = 2/3 !$$

=> A “superfície” que define a temperatura efetiva se encontra a uma profundidade ótica de 2/3.

Olhando para uma estrela, vemos até uma profundidade ótica de $\tau_v \approx 2/3$.

A Equação de Transporte

Escurecimento de Bordo

Isto explica, por que as bordas do disco do Sol aparacem mais escuras e avermelhadas que a região central do disco.

Na região central enxergamos mais fundo, até as camadas mais quentes e luminosas.

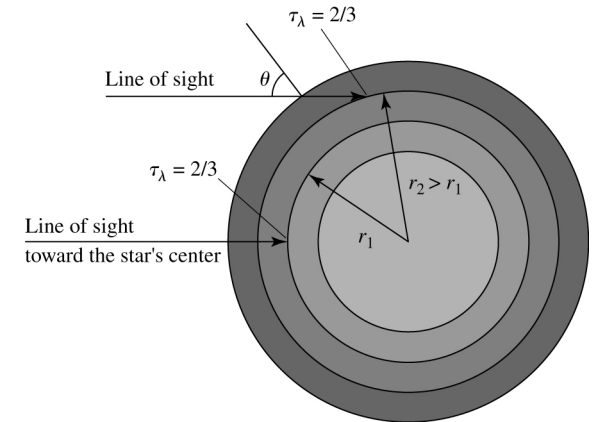


Figure 16-7
Universe, Eighth Edition
© 2008 W.H. Freeman and Company

A Equação de Transporte

Escurecimento de Bordo

Partindo da equação de transporte:

$$dI_{\lambda}/d\tau_{\lambda} = I_{\lambda} - S_{\lambda},$$

e multiplicando os dois lados por $e^{-\tau_{\lambda}}$ obtemos:

$$\frac{dI_{\lambda}}{d\tau_{\lambda}} e^{-\tau_{\lambda}} - I_{\lambda} e^{-\tau_{\lambda}} = -S_{\lambda} e^{-\tau_{\lambda}}$$

$$\frac{d}{d\tau_{\lambda}} (e^{-\tau_{\lambda}} I_{\lambda}) = -S_{\lambda} e^{-\tau_{\lambda}}$$

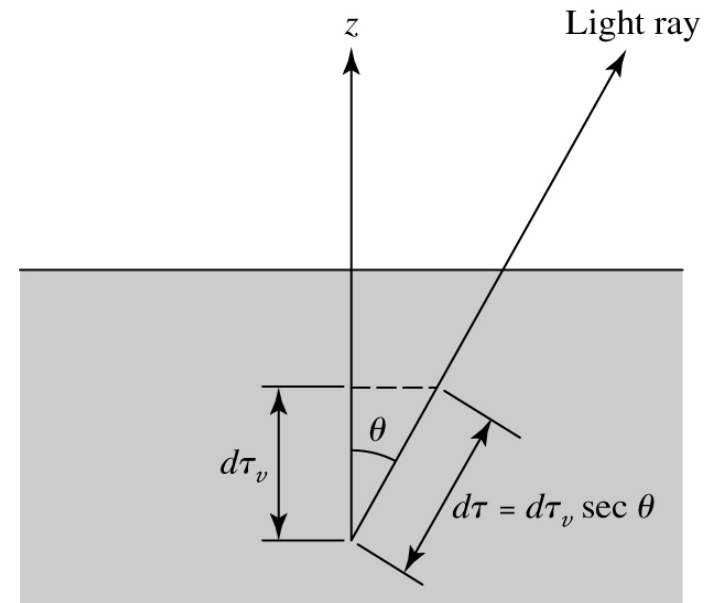
$$d(e^{-\tau_{\lambda}} I_{\lambda}) = -S_{\lambda} e^{-\tau_{\lambda}} d\tau_{\lambda}$$

integrando: $I_{\lambda}(0) = I_{\lambda,0} e^{-\tau_{\lambda,0}} - \int_{\tau_{\lambda,0}}^0 S_{\lambda} e^{-\tau_{\lambda}} d\tau_{\lambda}$

A Equação de Transporte

Escurecimento de Bordo

Para entender o escurecimento de bordo, temos que calcular a intensidade em função do ângulo θ : Isto implica em substituir τ_λ por $\tau_{\lambda,v}/\cos \theta$ para obter (omitindo o λ subscrito):



$$I(0) = I_0 e^{-\tau_{v,0}/\cos \theta} - \int_{\tau_{v,0}/\cos \theta}^0 S/\cos \theta \cdot e^{-\tau v/\cos \theta} d\tau_v$$

Tomando como posição inicial dos raios $\tau_{v,0} = \infty$, isto vira

$$I(0) = \int_0^\infty S/\cos \theta \cdot e^{-\tau v/\cos \theta} d\tau_v$$

A Equação de Transporte

Escurecimento de Bordo

Supondo que a função da fonte esteja da forma

$$S = a + b\tau_v,$$

obtemos (colocando os λ subscritos de volta)

$$I_\lambda(0) = a_\lambda + b_\lambda \cos \theta,$$

onde a_λ e b_λ podem ser determinados fazendo alguns hipóteses.

A Equação de Transporte

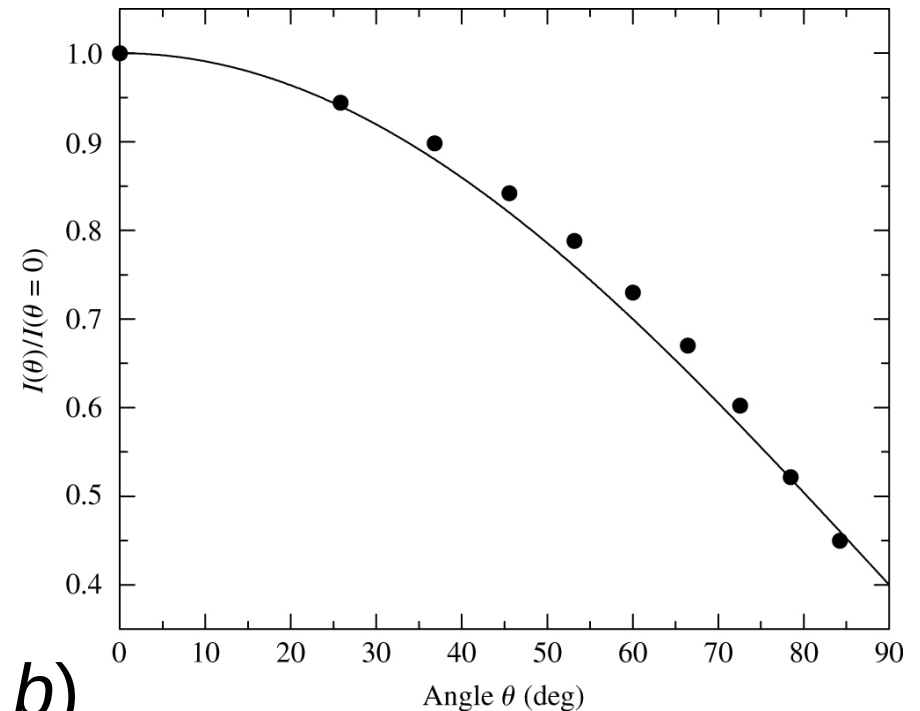
Escurecimento de Bordo

No caso do Sol, supondo LTE e a aproximação de Eddington chega-se em

$$a = \sigma/2\pi \cdot T_e^4 \text{ e } b = 3\sigma/4\pi \cdot T_e^4$$

Em unidades da intensidade no centro, isto se torna:

$$I(\theta)/I(\theta = 0) = (a + b \cos \theta)/(a + b) \\ = 0.4 + 0.6 \cos \theta, \text{ em boa concordância com as medições.}$$



Os Perfis de Linhas Espectrais

Agora temos os meios para fazer a análise de **linhas espectrais**.

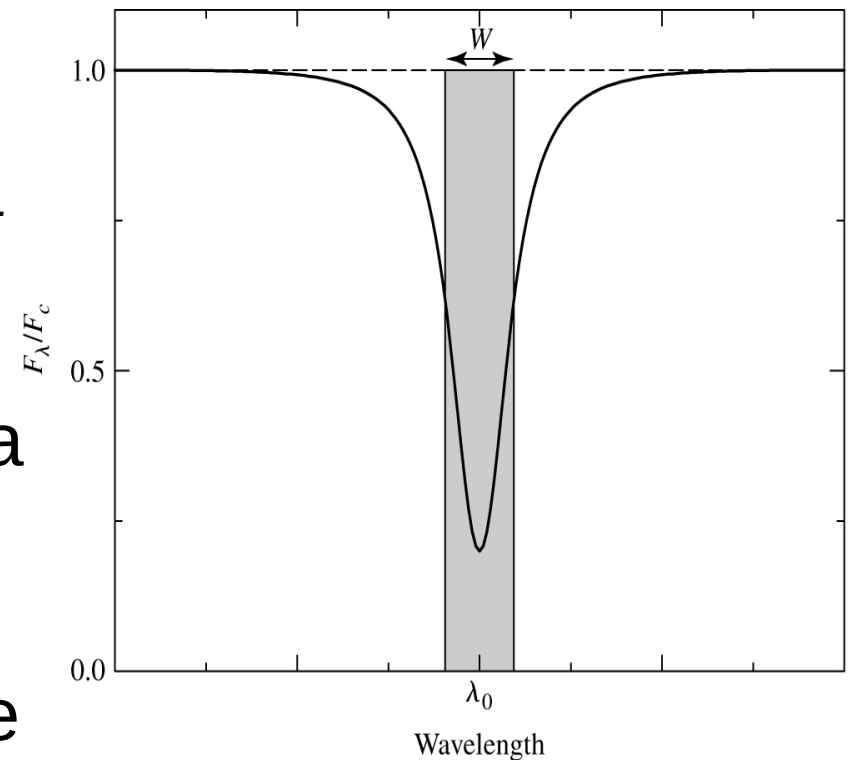
Largura Equivalente

Nesta figura vemos uma típica linha de absorção, normalizada para o nível do contínuo do espectro.

Uma medida pra intensidade da linha é a **largura equivalente**:

$$W = \int (F_c - F_\lambda) / F_c d\lambda$$

a largura que teria uma linha de absorção retangular com a mesma área, normalmente da ordem de 0.01 nm.



Os Perfis de Linhas Espectrais

Largura a meia Altura

(FWHM do inglês *Full Width at Half Maximum*)

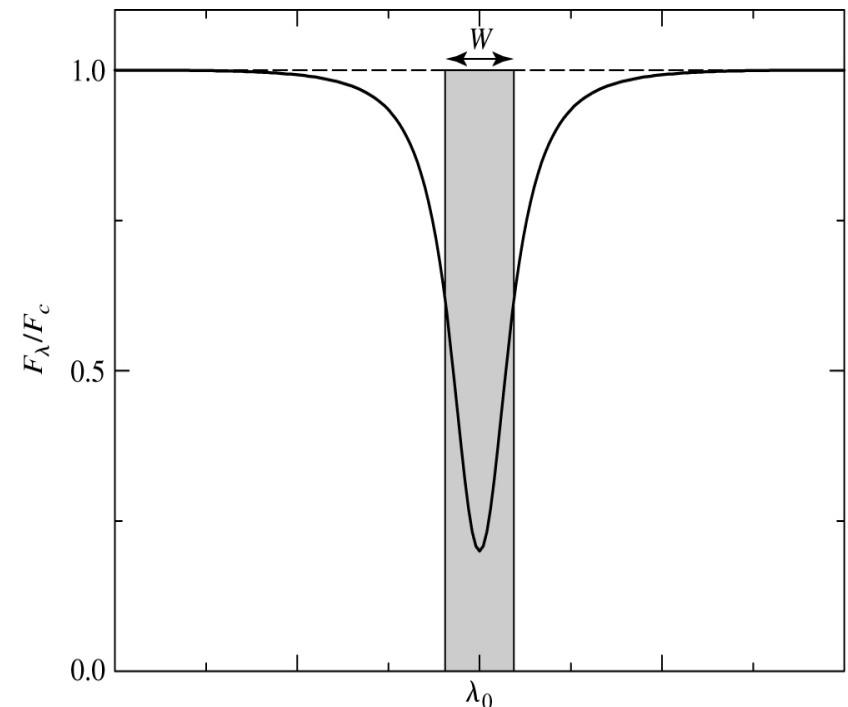
Uma outra medida é a largura da linha, lá onde ela tem metade da sua altura ou profundidade,

$$(\Delta\lambda)_{1/2},$$

então a distância entre os dois pontos, onde

$$(F_c - F_\lambda) / (F_c - F_{\lambda_0}) = 1/2$$

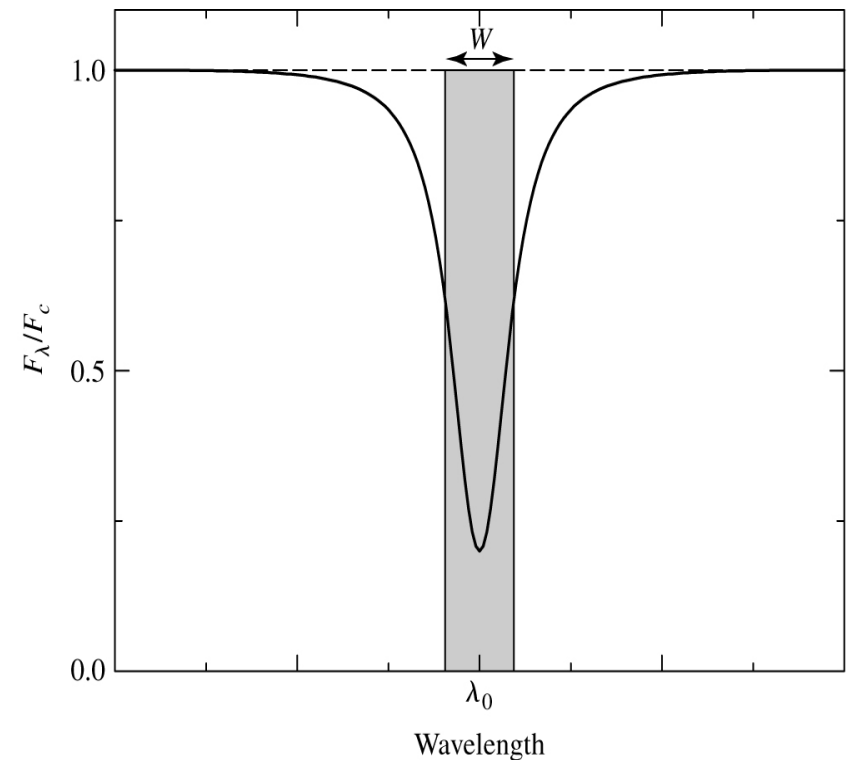
Esta linha é chamada ópticamente fina. Não há nenhum comprimento de onda, onde ela satura (absorve toda a luz).



Os Perfis de Linhas Espectrais

O resultado que obtivemos, de que se vê até profundidade ótica $2/3$ vale também para os diferentes λ .

O centro da linha é formado nas partes mais altas e frias da atmosfera, que as asas.



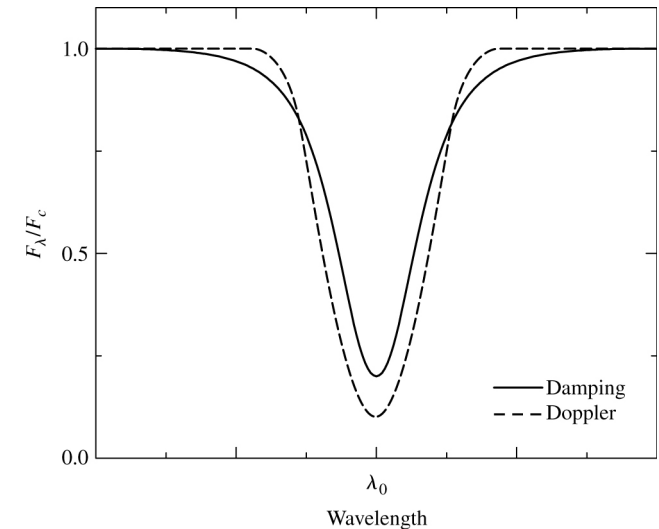
Os Perfis de Linhas Espectrais

Processos que alargam Linhas Espectrais

Três processos principais, cada um causando um perfil típico:

1. Alargamento Natural

(=> Física Quântica): Alargamento devido à **incerteza intrínseca** na energia dos dois níveis de energia envolvidos na linha (=> princípio de incerteza de Heisenberg), sendo Δt_0 o “tempo de espera” média pra transição ocorrer, então $(\Delta\lambda)_{1/2} = \lambda^2/\pi c \cdot 1/\Delta t_0$, normalmente da ordem de $2 \cdot 10^{-5}$ nm.



Os Perfis de Linhas Espectrais

2. Alargamento Doppler

Efeito **Doppler** refletindo os **movimentos térmicos** das partículas na atmosfera da estrela:

$$(\Delta\lambda)_{1/2} = 2\lambda/c \cdot \sqrt{(2kT \ln 2)/m} ,$$

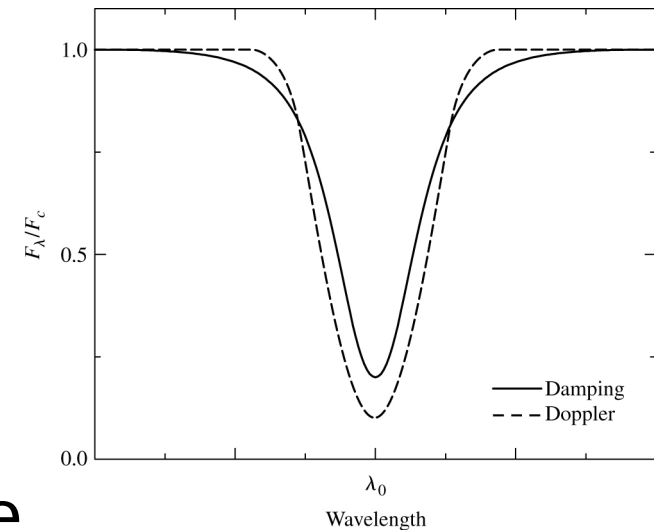
onde T = temperatura,
 m = massa das partículas.

As asas diminuem exponencialmente por causa da queda exponencial em altas velocidades na distribuição de Maxwell-Boltzmann.

Se houver também **turbulências** na atmosfera (em estrelas gigantes e supergigantes),

$$(\Delta\lambda)_{1/2} = 2\lambda/c \cdot \sqrt{(2kT/m + v_{\text{turb}}^2) \ln 2} ,$$

onde v_{turb} é a velocidade de turbulência mais provável.



Os Perfis de Linhas Espectrais

3. Alargamento por Pressão e Colisões

Devido à perturbação dos orbitais por **campos elétricos** gerados em colisões ou passagens próximas de íons.

O perfil da linha é similar àquele do alargamento natural e é às vezes chamado *damping* ou *Lorentz profile*.

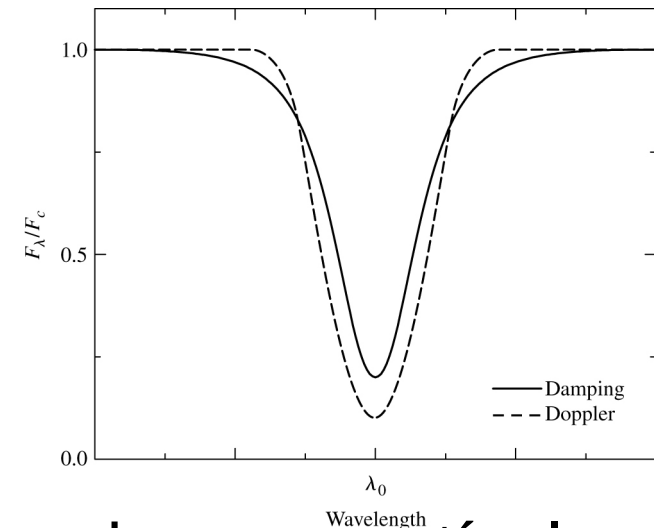
Sendo Δt_0 o tempo média entre colisões de uma partícula,

$$\Delta t_0 \approx \ell/v = 1/n\sigma\sqrt{2kT/m},$$

então a largura da linha é aproximadamente

$$\Delta\lambda = \lambda^2/c \cdot 1/\pi\Delta t_0 \approx \lambda^2/c \cdot n\sigma/\pi \cdot \sqrt{2kT/m},$$

onde n , σ e m são as densidade, seção transversal e massa das partículas.



Os Perfis de Linhas Espectrais

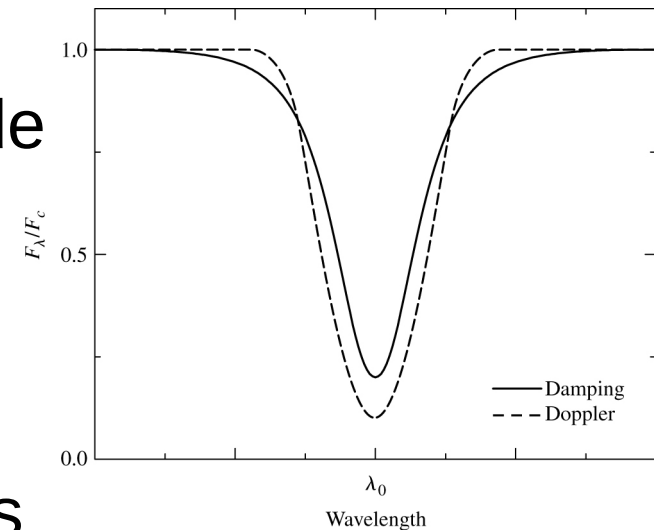
3. Alargamento por Pressão e Colisões

$$\Delta\lambda \approx \lambda^2/c \cdot n\sigma/\pi \cdot \sqrt{2kT/m}$$

Isto explica as classes de luminosidade de Morgan-Keenan

(Supergigantes a Anãs, => aula 3):

As linhas estreitas nas gigantes luminosas e supergigantes se devem às baixas densidades nas suas atmosferas.

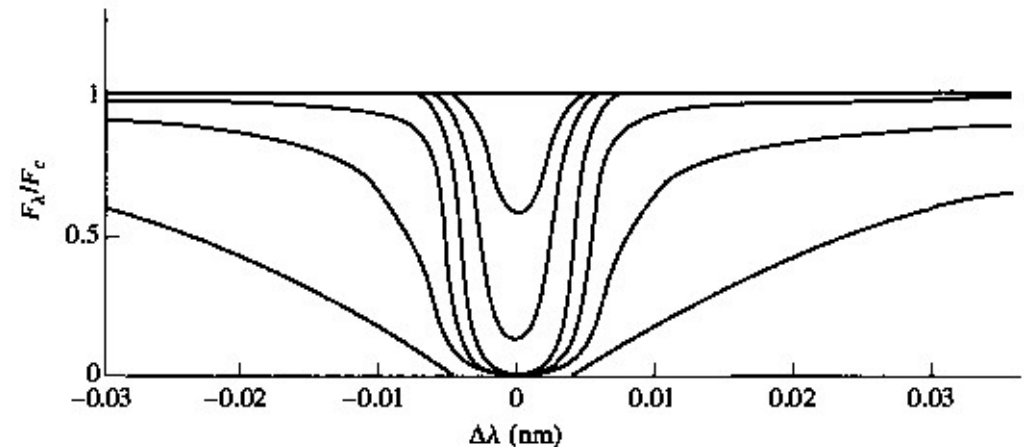
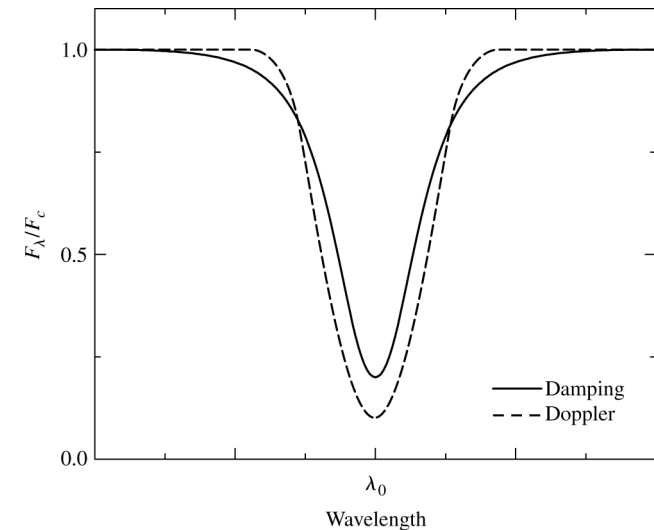


Nas estrelas anãs (da Sequência Principal) as linhas são alargadas por pressão nas atmosferas mais densas.

Os Perfis de Linhas Espectrais

O Perfil de Voigt

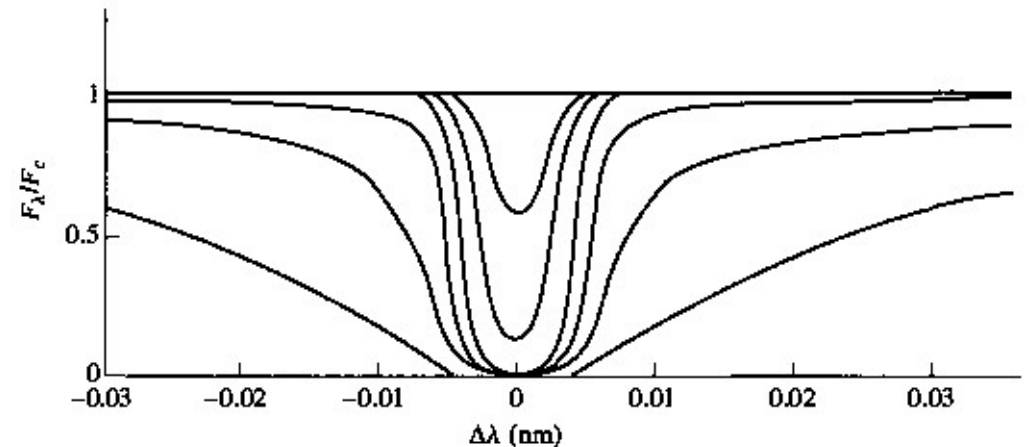
O perfil da linha total, chamado **perfil de Voigt**, é devido à combinação dos efeitos. Tipicamente, elas têm partes centrais de Doppler e asas *damping*.



Os Perfis de Linhas Espectrais

O Perfil de Voigt

Os cálculos que prevêem os **perfis** das linhas usam como **contínuo** espectros de corpo negro, e calculam a **absorção** levando em conta a **abundância**, os estados de **excitação** (equação de Boltzmann) e de **ionização** (Saha), as probabilidades da **transição** (depende da degeneração dos dois níveis e das regras de seleção), e os **alargamentos** Natural, Doppler e de pressão.

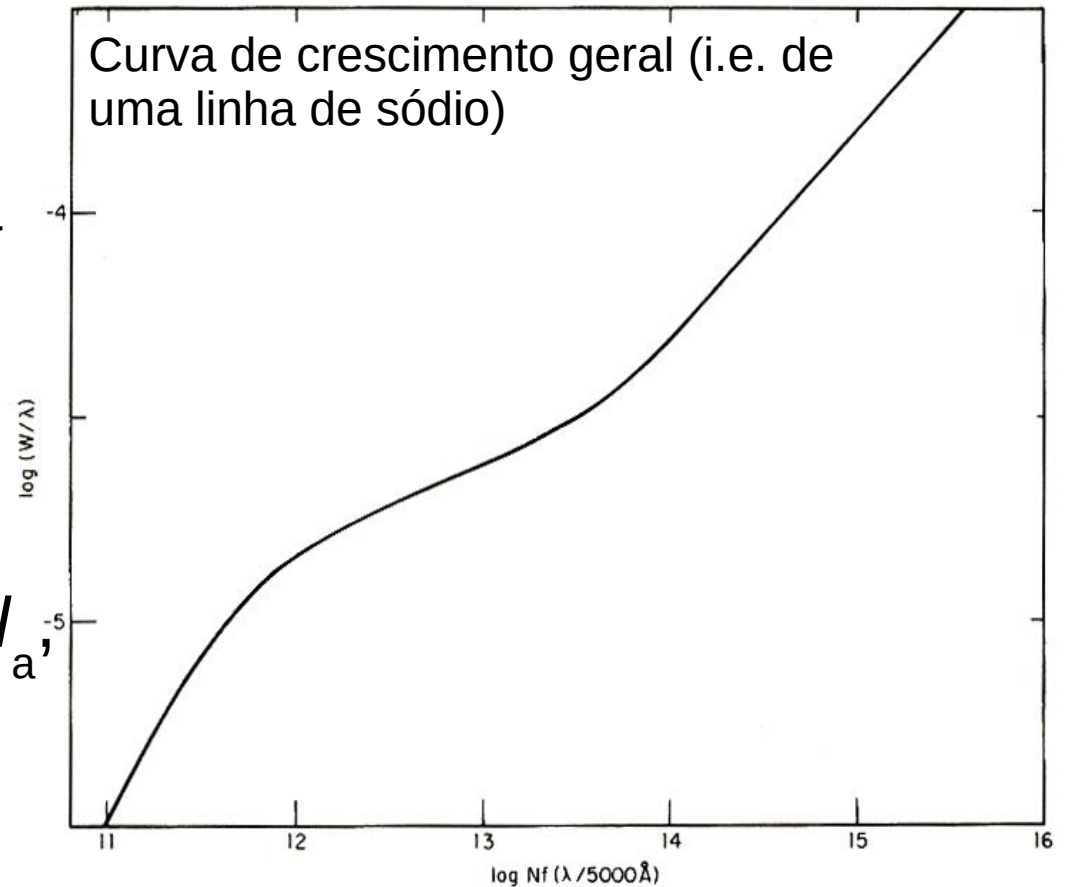


Perfis de Voigt da linha K Ca II, variando a abundância de cálcio, que aumenta da linha mais fraca até a totalmente saturada.

Os Perfis de Linhas Espectrais

A Curva de Crescimento

Estes cálculos fornecem previsões para a **largura equivalente** W de alguma linha em função da **abundância** do elemento que absorve esta linha em unidades de número de átomos absorventes N_a , chamada **curva de crescimento**.



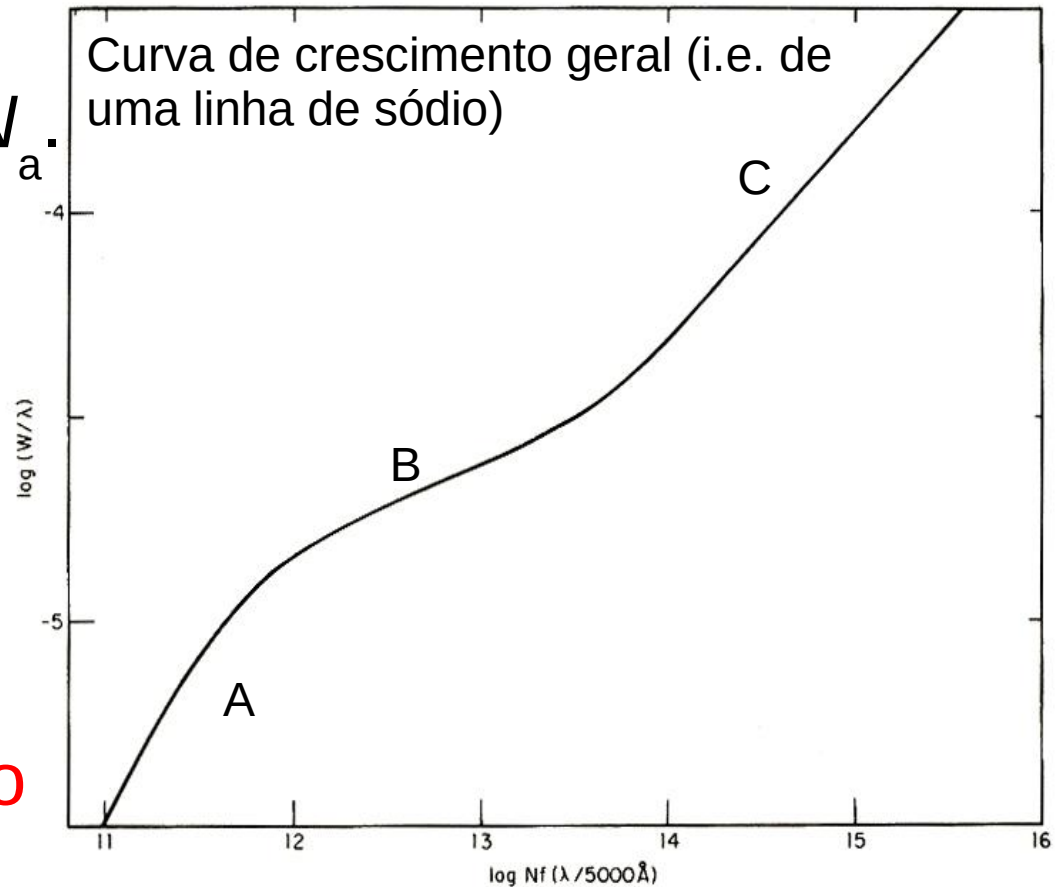
Os Perfis de Linhas Espectrais

A Curva de Crescimento

A: Para **abundâncias baixas**, W é **proporcional** a N_a .

B: Aumentando N_a mais, a linha começa a **saturar**, W prop. $\sqrt{\ln N_a}$.

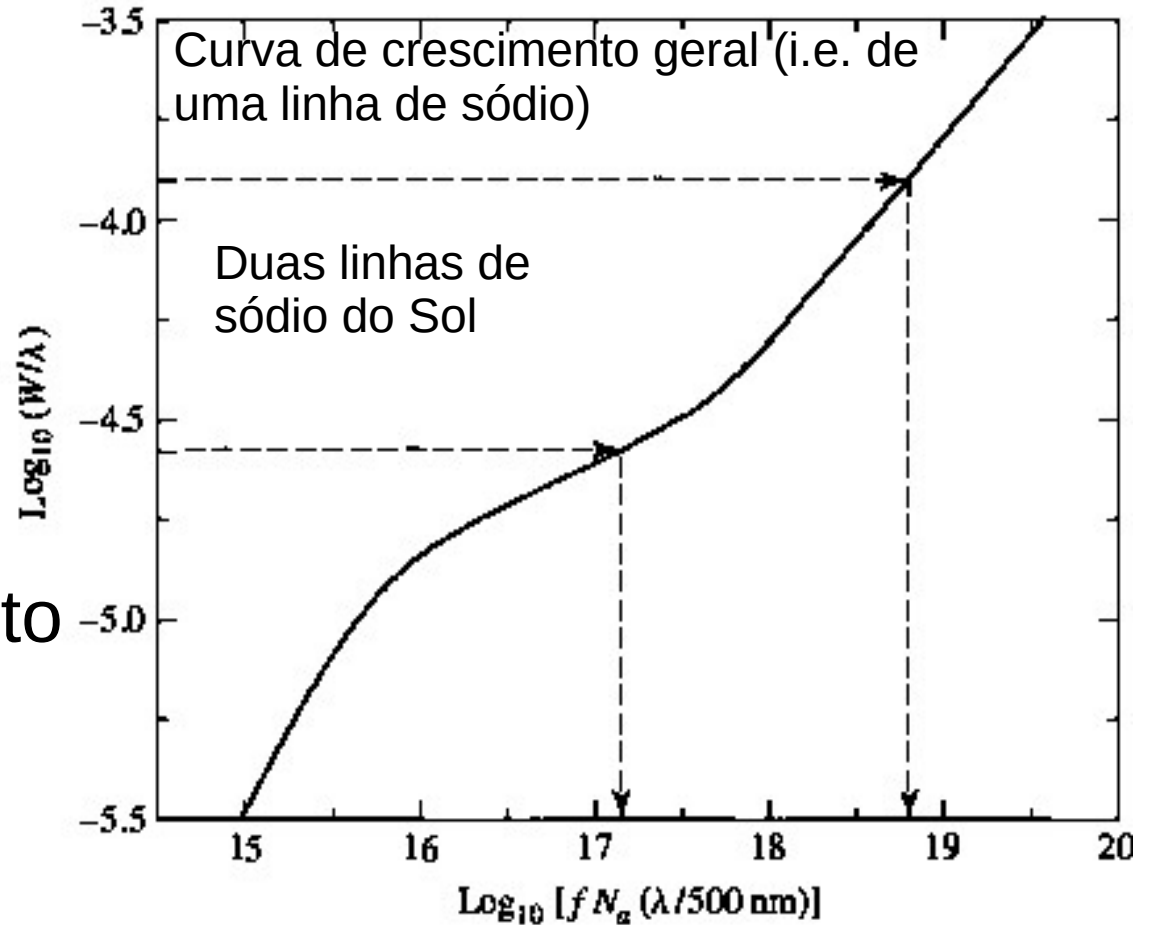
C: Com **abundâncias** (densidades) **muito altas**, o alargamento de **pressão** domina, W prop. $\sqrt{N_a}$.



Os Perfis de Linhas Espectrais

A Curva de Crescimento

Comparando a largura equivalente de alguma linha espectral medida no espectro de uma estrela com a curva de crescimento, dá para **determinar** a **abundância** do elemento correspondente na atmosfera da estrela.



Modelos Computacionais de Atmosferas

Hoje se calcula **atmosferas modelos** em **computadores**, subdividindo a atmosfera em **camadas finas** e calculando a contribuição de cada camada no espectro.

Todos os ingredientes mencionados, mais as equações de **equilíbrio hidrostático**, **termodinâmica**, **mecânica estatística** e **quântica**, **transporte** de energia por radiação e convecção (=> aulas 6 e 7, O Interior das Estrelas) combinados com **bibliotecas** extensas de **opacidades** calculam não apenas as **abundâncias**, mas também outras informações importantes como a **temperatura** efetiva e o **campo gravitacional** na superfície da estrela.

Modelos Computacionais de Atmosferas

A comparação destes modelos com **dados empíricos** levou a um bom **entendimento** das **atmosferas estelares**.

Vê-se, por exemplo, que a **composição química** da **atmosfera** do **Sol** é muito **similar** àquela de outras **estrelas** e do **gás interestelar**.

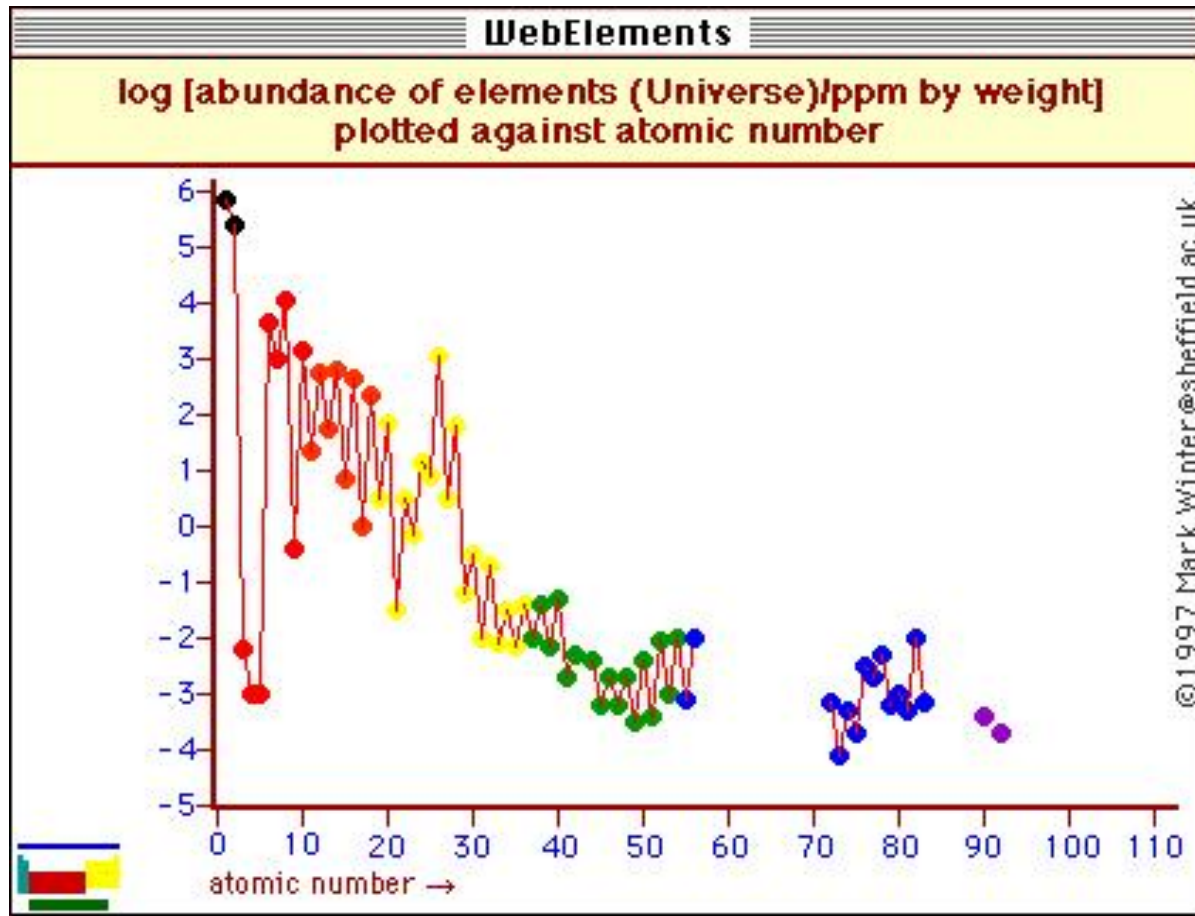
Também acha-se boa concordância com as abundâncias dos elementos (tirando os voláteis) em **meteoritos**.

Os elementos mais abundantes na atmosfera do Sol

Element	Atomic Number	Log Relative Abundance
Hydrogen	1	12.00
Helium	2	10.93 ± 0.004
Oxygen	8	8.83 ± 0.06
Carbon	6	8.52 ± 0.06
Neon	10	8.08 ± 0.06
Nitrogen	7	7.92 ± 0.06
Magnesium	12	7.58 ± 0.05
Silicon	14	7.55 ± 0.05
Iron	26	7.50 ± 0.05
Sulfur	16	7.33 ± 0.11
Aluminum	13	6.47 ± 0.07
Argon	18	6.40 ± 0.06
Calcium	20	6.36 ± 0.02
Sodium	11	6.33 ± 0.03
Nickel	28	6.25 ± 0.04

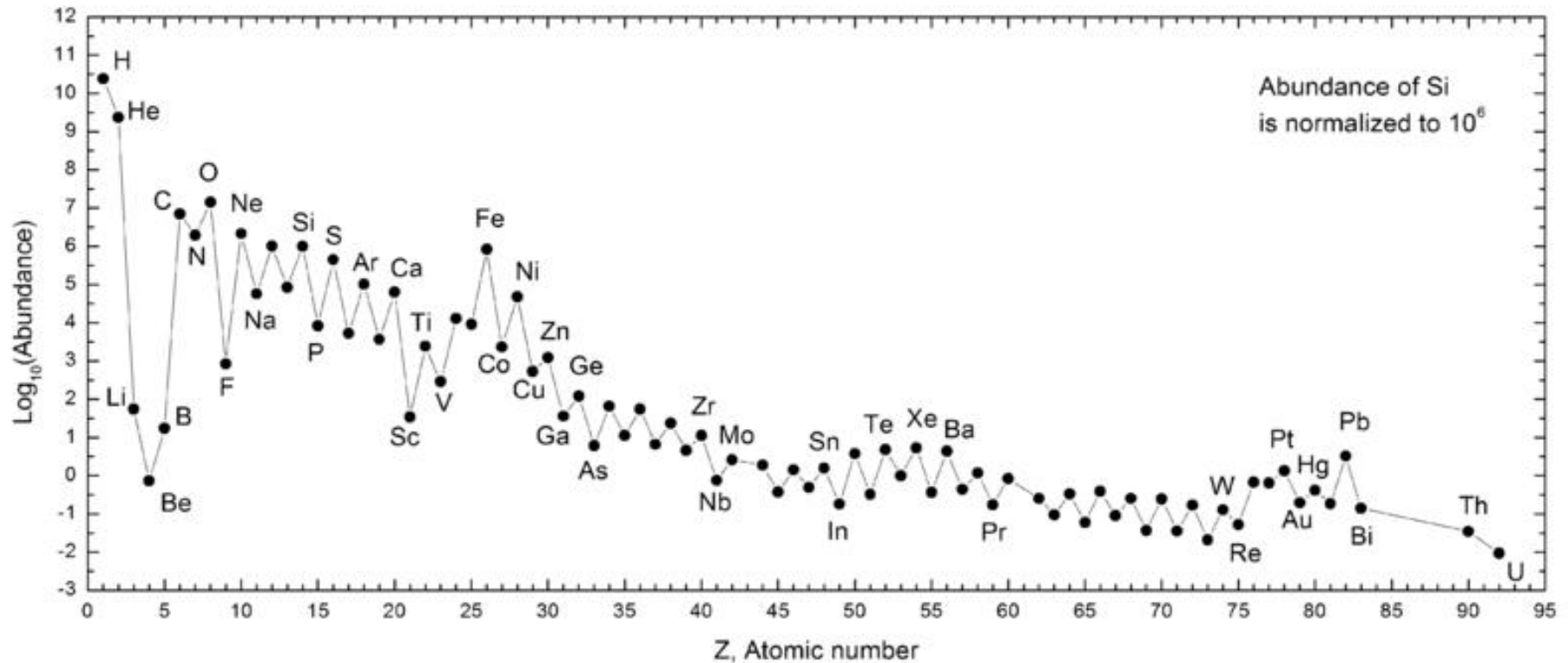
Modelos Computacionais de Atmosferas

Abundâncias dos Elementos no Universo



Modelos Computacionais de Atmosferas

Abundâncias dos Elementos no Sistema Solar





Universidade Federal do ABC

Introdução à Física Estelar

FIM PRA HOJE

