



Universidade Federal do ABC

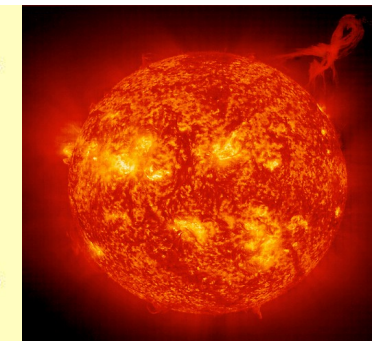
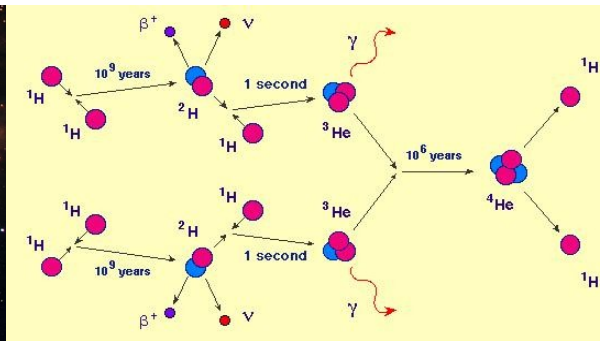
Introdução à Física Estelar

6 e 7. O Interior das Estrelas

Prof. Pieter Westera

pieter.westera@ufabc.edu.br

<http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/Estelar.html>



Como saber mais sobre o Interior das Estrelas?

Nas últimas aulas, falamos sobre as **grandezas observacionais** (espectros) das estrelas, e de como estas refletem as propriedades das suas fontes, as **atmosferas estelares**.

Não há **nenhuma radiação detectável** provindo do **interior** das estrelas (tirando menos que um em cada 10^{40} neutrinos do Sol e uns poucos de uma Supernova em 1987).

Nosso conhecimento do interior das estrelas vem de **Modelos Estelares**, que usam as **leis da física** para preverem as **estrutura e evolução dos interiores** das estrelas.

Estes devem prever de maneira correta as propriedades observáveis das atmosferas incl. a evolução observada.

Como saber mais sobre o Interior das Estrelas?

Problema: A **evolução estelar** é muito **lenta**. Em nossos ~5000 anos de **observação**, a maioria das **estrelas não mudou** de maneira observável.

Estamos na situação de um alienígena observando a Praça da Sé, vendo pessoas em idades (estágios evolutivos) diferentes, e que tem que determinar, como decorre a vida (evolução) do ser humano, e ele tem só dois minutos de tempo de observação à disposição.



=> Ele não vê as pessoas envelhecerem (evoluiem).

=> Os modelos devem pelo menos explicar a variedade de estrelas observada.

Equilíbrio Hidrostático

Um dos resultados principais destes modelos é que a vida de uma estrela é uma **batalha constante** entre a **gravidade**, que tenta **contrair** a estrela, e a **pressão interna** (p. e. térmica, de radiação, ...), que se contrapõe a esta contração.

Na **maior parte da vida**, estes dois se **cancelam** em **todas** as **posições** dentro da estrela e a estrela é **estática**, estado chamado **equilíbrio hidrostático**.

Quando a estrela não está em equilíbrio hidrostático, há camadas se contraindo ou expandindo.

Frequentemente isto inclui o envelope, e a estrela muda de tamanho.

Equilíbrio Hidrostático

Supondo, que a estrela é **esfericamente simétrica**.

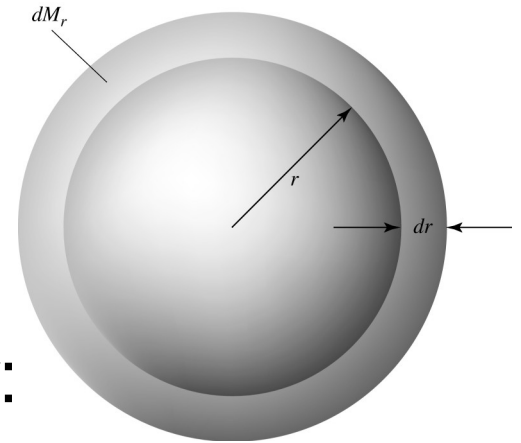
Definindo como **massa interna** M_r a massa dentro de uma esfera com raio r :

$$M_r = \int_0^r dM = \int_0^r \rho dV = \int_0^r \rho \cdot 4\pi r^2 dr.$$

Segundo o **teorema das cascas esféricas**, a força gravitacional sobre um elemento de massa dm encontrando-se na distância r do centro da estrela é:

$$F_g = -G \cdot M_r dm / r^2$$

(sinal negativo por ser na direção $-r$)



Equilíbrio Hidrostático

Calculando as forças pra cima (pressão), F_p , e pra baixo (gravidade), F_g , agindo sobre um pequeno cilindro com base A e altura dr na distância r do centro:

$$F_p = A \cdot P(r) - A \cdot P(r+dr) = A \cdot (P(r) - P(r+dr))$$

$$F_g = -G \cdot M_r dm / r^2, \text{ onde } dm = \rho dV = \rho A dr$$

=> A força resultante no cilindro:

$$F_{\text{res}} = dm \cdot d^2r/dt^2 = A \cdot (P(r) - P(r+dr)) - G \cdot M_r dm / r^2$$

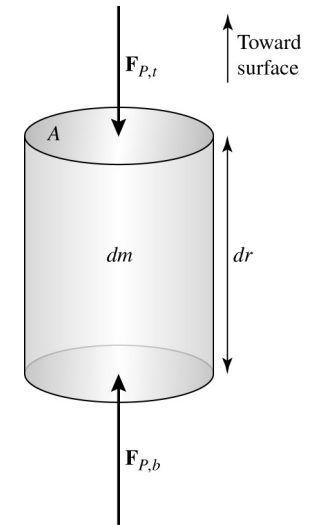
$$\text{ou } \rho A dr \cdot d^2r/dt^2 = -A \cdot (P(r+dr) - P(r)) - G \cdot M_r \rho A dr / r^2$$

dividindo por $dV = A dr$:

$$\rho \cdot d^2r/dt^2 = -(P(r+dr) - P(r)) / dr - G \cdot M_r \rho / r^2, \text{ e deixando } dr \rightarrow 0:$$

$$\rho \cdot d^2r/dt^2 = -dP/dr - G \cdot M_r \rho / r^2$$

que é a **equação do movimento radial**.



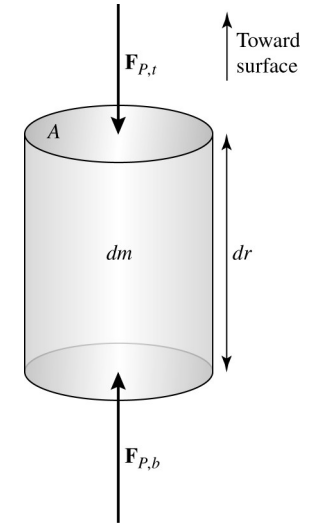
Equilíbrio Hidrostático

No caso de uma **estrela estática** ($d^2r/dt^2 = 0$) obtemos uma das equações fundamentais da estrutura estelar, a condição do **equilíbrio hidrostático**:

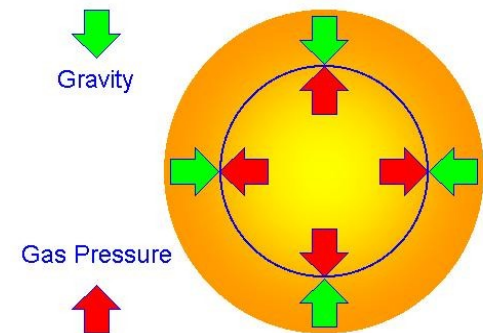
$$dP/dr = -G \cdot M_r \rho / r^2 = -\rho g,$$

$$\text{onde } g \equiv G \cdot M_r / r^2$$

É o **gradiente da pressão** que **contrabalança** a **gravidade**.



Hydrostatic Equilibrium



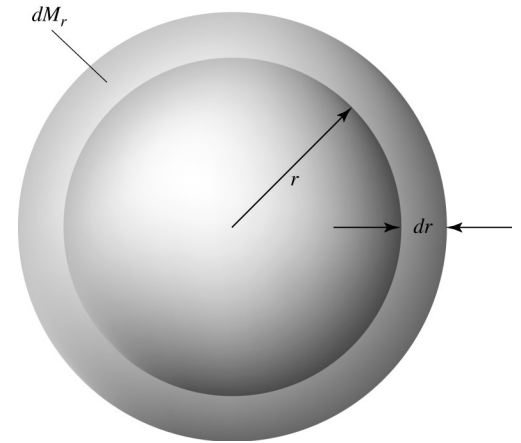
A Equação da Conservação de Massa

A segunda relação fundamental pode ser derivada da expressão da massa de uma casca infinitesimalmente fina:

$$dM_r = \rho(4\pi r^2 dr)$$

=> Equação da Conservação de Massa

$$dM_r/dr = 4\pi r^2 \rho$$



A Equação de Estado de Pressão

Partindo da Equação dos gases ideais (\Rightarrow FeTerm),
 $PV = Nk_B T = nRT$

Com a ajuda da Teoria Cinética dos Gases podemos reescrevê-la em termos da massa molecular média, $\mu \equiv \bar{m}/m_H$, onde \bar{m} é a massa média das partículas do gás e da pressão P_g , e explicitar esta última (\Rightarrow tb. FeTerm):

$$P_g = \rho k_B T / \mu m_H$$

A Equação de Estado de Pressão

Para um **gás neutro**:

$$\bar{m} =: \bar{m}_n = \sum_j N_j m_j / \sum_j N_j,$$

onde m_j e N_j são os massa e número de átomos do tipo j .

Dividindo por m_H dá: $\mu_n = \sum_j N_j A_j / \sum_j N_j,$

onde $A_j \equiv m_j / m_H$ é o número de massa (de prótons + nêutrons) por núcleo de átomos do tipo j .

Para um **gás completamente ionizado**: $\mu_i \approx \sum_j N_j A_j / \sum_j N_j (1+Z_j),$

onde Z_j é a carga nuclear de átomos do tipo j (e, então o no. de elétrons que estes átomos contribuem)

=> $(1+Z_j)N_j$ é o no. total de partículas (núcleos + e^-) no gás.

A Equação de Estado de Pressão

Invertendo $\bar{m} = \mu m_H = \sum_j N_j m_j / \sum_j N_j$ obtemos para o **gás neutro**:

$$\begin{aligned} 1/\mu_n m_H &= \sum_j N_j / \sum_j N_j m_j = \sum_j N_j / m_{\text{tot}} = \sum_j N_j \cdot m_{\text{tot},j} / m_{\text{tot},j} \cdot m_{\text{tot}} \\ &= \sum_j N_j / m_{\text{tot},j} \cdot m_{\text{tot},j} / m_{\text{tot}} = \sum_j N_j / N A m_H \cdot X_j = \sum_j 1 / A m_H \cdot X_j, \end{aligned}$$

onde X_j é a fração da massa total em átomos do tipo j .

$$\Rightarrow 1/\mu_n = \sum_j 1 / A_j \cdot X_j$$

Usando as frações de massa para H, He, e “metais”, X , Y e Z : $1/\mu_n \approx X + 1/4 \cdot Y + \langle 1/A \rangle_n \cdot Z$,

$\langle 1/A \rangle_n$ sendo uma média ponderada sobre os “metais”.

Para composição química “solar”

$$(X = 0.70, Y = 0.28, Z = 0.02, \langle 1/A \rangle_n \approx 1/15.5)$$

$$\Rightarrow \mu_n = 1.30$$

A Equação de Estado de Pressão

Um cálculo similar para **gás completamente ionizado** leva a:

$$1/\mu_i = \sum_j (1+Z_j)/A_j \cdot X_j$$

$$\text{e } 1/\mu_i \approx 2X + \frac{3}{4} \cdot Y + \langle (1+Z)/A \rangle_i \cdot Z$$

!!! Os dois Z na fórmula são grandezas diferentes.

Já que, para muitos elementos com $Z_j > 2$ (incl. os mais frequentes C, N, O, etc.), $A_j \approx 2Z_j$, temos

$$\langle (1+Z)/A \rangle_i \approx 1/2$$

=> para composição “solar”: $\mu_i = 0.62$

A Energia Cinética Média por Partícula

A Teoria Cinética dos gases, aplicada na distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann também fornece a energia cinética média das partículas do gás (\Rightarrow tb. FeTerm):

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2} \cdot k_B T, \text{ onde } \bar{v}^2 \text{ é a velocidade média quadrática}$$

isto é, ela é $\frac{1}{2}k_B T$ por grau de liberdade.

! As Lei dos Gases Ideais e distribuição de Maxwell-Boltzmann nem sempre são uma boa aproximação. No caso de densidades altas, fenômenos quânticos podem se tornar importantes.

No caso de férmions (e^- , p^+ , n , ...) em altas densidades, como em Anãs Brancas, temos que usar a distribuição de Fermi-Dirac (\Rightarrow segunda parte da disciplina).

Para bósons (γ , ...), a distribuição de Bose-Einstein.

A Contribuição da Pressão de Radiação

Como mencionado na aula anterior, a radiação exerce uma pressão também, de $P_{\text{rad}} = 1/3 \cdot u = 1/3 \cdot aT^4$.

No interior de estrelas, esta contribuição é longe de ser desprezível, às vezes excedendo a pressão do gás, e/ou superando a atração gravitacional (causando a expansão do sistema).

Assim, temos que usar a pressão total

$$P_{\text{tot}} = P_{\text{g}} + P_{\text{rad}} = \rho kT / \mu m_{\text{H}} + 1/3 \cdot aT^4$$

$$(a = 4\sigma/c = 7.5657 \cdot 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4})$$

A Equação do Gradiente de Luminosidade

Se a densidade de energia gerada numa posição da estrela é ε , então a contribuição de uma massinha neste posição à luminosidade da estrela é

$$dL = \varepsilon dm$$

Se dm é uma casca esférica de raio r centrada no centro da estrela de espessura infinitesimal dr , $dm = 4\pi r^2 \cdot \rho dr$, obtemos mais uma das equações fundamentais da estrutura estelar, a **equação do gradiente de luminosidade**:

$$dL/dr = 4\pi r^2 \cdot \rho \varepsilon$$

O Gradiente de Temperatura Radiativo

Então, a **Luminosidade** contida na esfera com raio r é

$$L_r = \int_0^r dL = \int_0^r 4\pi r^2 \cdot \rho \varepsilon dr,$$

onde ε é a energia por unidade de massa gerada na esfera na distância r do centro

=> o fluxo radiativo no raio r é $F_{\text{rad}} = L_r / 4\pi r^2$

O Gradiente de Temperatura Radiativo

Na aula anterior, achamos que o gradiente da pressão de radiação é dado por ($dz = dr$):

$$dP_{\text{rad}}/dr = -\bar{\kappa}\rho/c \cdot F_{\text{rad}}$$

Mas podemos exprimir este gradiente também como:

$$dP_{\text{rad}}/dr = d/dr (1/3 \cdot aT^4) = 4/3 \cdot aT^3 dT/dr$$

Igualando os dois: $dT/dr = -3/4ac \cdot \bar{\kappa}\rho/T^3 \cdot F_{\text{rad}}$,

e usando $F_{\text{rad}} = L_r / 4\pi r^2$

obtemos o **gradiente de temperatura** para transporte radiativo (mais uma das equações fundamentais):

$$dT/dr = -3/4ac \cdot \bar{\kappa}\rho/T^3 \cdot L_r/4\pi r^2$$

Transporte de Energia

Existem três mecanismos de transporte de energia operando nos interiores das estrelas:

- transporte por **radiação**, tratado na última aula
- **condução**, choques entre partículas. É insignificante na maioria dos casos, e não trataremos dela.
- **convecção**: gás quente ou frio se deslocando, levando a sua energia térmica junto.

Basicamente: Gás se esquenta “em baixo”, expande e fica menos denso, sobe, resfria “em cima” (i.e. por radiação ou condução) se livrando da energia, se contrai, fica mais denso e desce de novo.

Tratamos deste mecanismo em seguida.

Convecção

Infelizmente, convecção é bastante **complicada**.

Se trata de um **processo 3D** envolvendo mecânica dos fluidos, enquanto a maioria dos **modelos estelares** são **1D**, tratando a estrela como esfericamente simétrica e usando apenas r como coordenada.

Além disso, convecção pode ocorrer em **escalas de tempo** comparáveis às escalas de tempo de **outros processos** nas estrelas, causando **interação** entre os dois.

A aproximação de tratar estes outros processos e a convecção separadamente às vezes não é justificada.

A Altura de Escala de Pressão

Definimos a **altura de escala de pressão** H_P , usando a equação

$$1/H_P = -1/P \cdot dP/dr$$

Se H_P é uma constante, obtemos

$$P = P_0 e^{-r/H_P}$$

H_P é a distância vertical, naquele a pressão cai por um fator e.

Usando a equação do equilíbrio hidrostático

$$dP/dr = -\rho g \quad (g = GM_r/r^2)$$

$$\Rightarrow H_P = P/\rho g$$

Energia Interna e a Primeira Lei da Termodinâmica

A **primeira lei da termodinâmica** é uma versão da **conservação de energia**. Para um dado elemento:

$$dU = dQ - dW,$$

onde dQ é o calor adicionado ao elemento, dW é o trabalho feito pelo elemento à sua vinhança, e dU , a variação da energia interna U do elemento, todos por unidade de massa do elemento.

U é a energia interna por unidade de massa e é uma **função de estado**:

$$U = \bar{K}/\bar{m}, \text{ onde } \bar{K} \text{ é a energia por partícula e } \bar{m} = \mu m_H$$

$$\text{Para um gás ideal, } \bar{K} = 3k_B T/2$$

$$\Rightarrow U = 3/2 \cdot (k_B/\mu m_H) T = 3/2 \cdot n_e RT \quad (n_e = n/m)$$

Calor Específico

A variação em calor dQ é, em geral, expressa em termos dos calores específicos C do gás:

$$C_P \equiv \partial Q / \partial T \Big|_P \text{ e } C_V \equiv \partial Q / \partial T \Big|_V$$

O trabalho por unidade de massa realizado por um cilindro (base A , altura dr) de gás na sua vizinhança é:

$$dW = (F/m)dr = (PA/m)dr = PdV_e,$$

onde $V_e \equiv V/m = 1/\rho$ é o volume específico.

$$\Rightarrow \text{primeira lei: } dU = dQ - PdV_e,$$

Para um volume constante, $dV = 0 \Rightarrow dV_e = 0$, $dW = 0$:

$$dU = dU \Big|_V = dQ \Big|_V = \partial Q / \partial T \Big|_V dT = C_V dT$$

mas $dU = (3n_e R/2)dT$ para um gás monoatômico

$$\Rightarrow C_V = 3/2 \cdot n_e R$$

Calor Específico

Para achar C_P para um gás monoatômico, observe que

$$dU = dU|_P = \partial Q / \partial T|_P dT - P \cdot \partial V_e / \partial T|_P dT$$

Considerando todas as variações diferenciais em $PV_e = n_e RT$:

$$PdV_e + V_e dP = RTdn_e + n_e R dT \text{ (já que } R = \text{const.)}$$

para P e n_e const., isto dá $P \cdot dV_e / dT = n_e R$

Substituindo isto, $dU = C_V dT$ e $C_P \equiv \partial Q / \partial T|_P$ na

equação em cima (e dividindo por dT), chegamos em:

$$C_P = C_V + n_e R,$$

o que vale sempre quando a lei do gás ideal se aplica.

Definindo $\gamma \equiv C_P / C_V$ o “gama adiabático”

Para um gás monoatômico, $\gamma = 5/3$

e se aproxima de 1 para um gás ionizado.

A Lei de Gases Adiabáticas

Supondo que, na convecção, os elementos de gás não trocam calor com a vizinhança, temos um processo **adiabático**, $dQ = 0$. $\Rightarrow dU = -PdV_e$,

e a segunda equação do slide anterior com $n_e = \text{const.}$ dá:

$$PdV_e + V_e dP = n_e R dT$$

Combinando estes com $dU = -PdV_e = C_V dT$ resulta em:

$$PdV_e + V_e dP = -(n_e R / C_V) \cdot PdV_e$$

Dividindo por PV_e e usando $C_P = C_V + n_e R$ e $\gamma = C_P / C_V$ dá

$$\gamma \cdot dV_e / V_e = -dP / P$$

o que é uma equação diferencial cuja solução é a

Lei de gases adiabáticos: $PV_e^\gamma = K$, onde $K = \text{const.}$

Usando a lei dos gases ideais também obtemos:

$$P = K' T^{\gamma/(\gamma-1)}, \text{ onde } K' = \text{outra constante.}$$

A Velocidade do Som Adiabática

Conseguimos calcular a velocidade do som nestas circunstâncias que é dada por:

$$v_s = \sqrt{B/\rho},$$

$$\text{onde } B \equiv V(\partial P/\partial V)_{\text{ad}}$$

$$\Rightarrow v_s = \sqrt{\gamma P/\rho}$$

O Gradiente de Temperatura Adiabático

Supondo uma bolha de gás convectiva quente subindo pela estrela, o gradiente de temperatura adiabático é a taxa de variação da **temperatura da bolha** ao se propagar pelo interior da estrela.

Derivando a lei dos gases ideais ($P_g = \rho k_B T / \mu m_H$):

$$dP/dr = -P/\mu \cdot d\mu/dr + P/\rho \cdot d\rho/dr + P/T \cdot dT/dr \quad (I)$$

Combinando $PV_e^\gamma = K$ e lembrando que $V_e \equiv 1/\rho$ temos

$$P = K \cdot \rho^\gamma$$

$$\Rightarrow dP/dr = \gamma \cdot P/\rho \cdot d\rho/dr$$

Combinando com (I) e supondo $\mu = \text{const.}$, obtemos o gradiente de temperatura adiabático:

$$dT/dr \Big|_{\text{ad}} = (1 - 1/\gamma) \cdot T/P \cdot dP/dr$$

O Gradiente de Temperatura Adiabático

Usando $dP/dr = -G \cdot M_r \rho / r^2 = -\rho g$ e $P_g = \rho k T / \mu m_H$ obtemos:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} = - \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\mu m_H}{k} \frac{G M_r}{r^2}.$$

outra equação fundamental

ou $dT/dr \Big|_{\text{ad}} = -g/C_p$

Este gradiente deve ser maior que o gradiente de temperatura real da estrela, isto é, ser **superadiabático**, para que a convecção possa acontecer:

$$\left| dT/dr \right|_{\text{act}} > \left| dT/dr \right|_{\text{ad}}$$

Normalmente, o transporte por uma camada no interior de uma estrela é quase puramente por convecção ou por radiação.

Na atmosfera a coisa é mais complicada.

O Gradiente de Temperatura Adiabático

A condição $\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{act}} > \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}}$
equivale à condição (dedução => livro)
 $T/P \cdot dP/dT < \gamma(\gamma-1)$
ou $d \ln P / d \ln T < \gamma(\gamma-1)$

Em geral, há **convecção** e não transporte radiativo, se

- a **opacidade** do gás é **alta**, praticamente impedindo o transporte radiativo
- existe uma zona, onde há **ionização**, causando gradientes adiabáticos pequenos ($\gamma \rightarrow 1$)
- a **taxa de fusão nuclear depende fortemente da temperatura** (i.e. nos processos triplo α ou ciclo CNO).

As primeiras duas condições podem ocorrer em atmosferas estelares, enquanto a terceira ocorre nos núcleos de estrelas.

Fontes de Energia da Estrela

Agora sabemos, como a energia de uma estrela é transportada pra superfície, onde ela é irradiada pro espaço.

Ainda precisamos saber, de onde ela vem.

Tratamos de duas fontes:

- Energia potencial gravitacional
- Reações (fusões) nucleares

Gravidade e a Escala de Tempo de Helmholtz

Uma possível fonte de energia é a **energia potencial gravitacional** liberada na **contração** da estrela.

Lembrando que a energia potencial de duas massas M e m na distância r é:

$U = -GMm/r$, onde $G = 6.67408 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ é a constante gravitacional

Esta **energia diminui** (vira mais negativa) quando a(s) **distância(s) diminui(em)** => **energia é liberada**.

Porém, pelo teorema de virial (1ª aula) apenas **metade** da energia potencial perdida é liberada. A outra metade se torna **energia cinética** das **partículas** compondo a estrela (isto é, a estrela se **esquenta**).

Gravidade e a Escala de Tempo de Helmholtz

Calculamos a energia potencial de uma esfera com massa M , raio R e perfil de densidade $\rho(r)$ (obviamente $M = \int_0^R \rho \cdot 4\pi r^2 dr$):

Pelo teorema das cascas esféricas, uma massinha dm encontrando-se na distância r do centro tem energia potencial:

$$dU = -GM_r dm/r$$

Pela simetria, podemos usar como massinhas cascas esféricas:

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr \quad \Rightarrow \quad dU = -GM_r 4\pi r^2 \rho dr/r = -GM_r 4\pi r \rho dr$$
$$\Rightarrow U = \int_0^R dU = -4\pi G \int_0^R M_r \rho r dr$$

Gravidade e a Escala de Tempo de Helmholtz

Usamos um perfil de densidade constante:

$$\rho(r) = \bar{\rho} = M/(4/3)\pi R^3$$

$$\Rightarrow M_r = \bar{\rho}(4/3)\pi r^3 = Mr^3/R^3$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow U &= -4\pi G \int_0^R Mr^3/R^3 \cdot M/(4/3)\pi R^3 \cdot r \, dr \\ &= -3GM^2/R^6 \int_0^R r^4 \, dr = -3/5 GM^2/R\end{aligned}$$

que é, então, a energia potencial perdida, quando a estrela se contrai “do infinito” (uma nuvem muito maior que R , $U \approx 0$) até uma bola homogênea.

A metade liberada como radiação é $\Delta E_g = 3/10 M^2/R$

Gravidade e a Escala de Tempo de Helmholtz

No caso do Sol, com $M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30}$ kg e $R_{\odot} = 6.960 \cdot 10^8$ m obtemos $1.1 \cdot 10^{41}$ J.

À taxa atual de $L_{\odot} = 3,827 \cdot 10^{26}$ W, ele pode ter brilhado por $t_{\text{KH}} = \Delta E_g / L_{\odot} \sim 10^7$ anos, conhecido como **escala de tempo de Kevin-Helmholtz**.

Na verdade, as estrelas não têm densidade constante. Elas são mais densas na região central, o que faz que a contração foi maior e ΔE_g é um pouco maior que o valor calculado, mas da mesma ordem de grandeza.

Gravidade e a Escala de Tempo de Helmholtz

Porém, sabemos por técnicas de determinação de idade envolvendo substâncias radioativas em pedras da Terra e da Lua, que o Sistema Solar tem, pelo menos, $4 \cdot 10^9$ anos de idade.

=> Deve ter uma **fonte** de **energia** muito **mais rendosa** para explicar a radiação do Sol (e outras estrelas).

!!! Para objetos compactos, energia gravitacional potencial perdida por material caindo “em cima”, pode, sim, liberar um montante enorme de energia, já que neste caso, o material cai até um potencial muito menor (até uma distância muito menor do centro da massa).

Outras Fontes de Energia

Será que é **energia química**?

A energia liberada em reações químicas é da ordem de 1-10 eV por átomo, o que faria o Sol brilhar à taxa atual por poucos milhares de anos.

=> **Não** rende o **suficiente**.

Difusão de elementos pesados para o interior e radioatividade também **não** explicam.

Na virada do século XIX para XX, a fonte de energia do Sol era um mistério.

Energia Nuclear

Talvez **energia nuclear**?

Reações nucleares (fusões, fissões) envolvem energias da ordem de MeV por átomo, o suficiente para fornecer a energia para o Sol brilhar por bilhões de anos.

=> Pode ser. Na verdade, **deve ser**, já que não conhecemos nenhuma outra fonte de tanta energia.

A Base da geração de energia por reações nucleares é o fato, que os **produtos** das reações podem totalizar **menos massa** que os **ingredientes de partida**.

A massa perdida **equivale** a **energia** segundo a teoria da **relatividade restrita**:

$$E = mc^2$$

O fator enorme c^2 explica, por que esta fonte de energia é tão rendosa.

A Escala de Tempo Nuclear

Na física nuclear, massas são frequentemente dadas em unidades de massa atômica (Dalton), u, definida como 1/12 vezes a massa do isótopo carbono-12.

Vale: $1 \text{ u} = 1.66053873 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 931.494013 \text{ MeV}/c^2$

Nestas unidades, as massas dos próton, nêutron e elétron são:

$$m_p = 1.00727646688 \text{ u}$$

$$m_n = 1.00866491578 \text{ u}$$

$$m_e = 0.0005485799110 \text{ u.}$$

A Escala de Tempo Nuclear

Estimando o tempo que o Sol poderia brilhar com a energia liberada, caso ele fosse inicialmente composto por hidrogênio e transformasse tudo em hélio (curricularmente chamado “queima de hidrogênio”), obtemos a **escala de tempo nuclear**:

Neste processo, 7 % da massa inicial são liberados (mais detalhes daqui a pouco):

$$\Rightarrow t_{\text{nuclear}} = E_{\text{nuclear}} / L_{\odot} = 0.007 M_{\odot} c^2 / L_{\odot} \sim 7.5 \cdot 10^{10} \text{ anos}$$

Apesar das simplificações, isto é uma boa estimativa do tempo de vida do Sol.

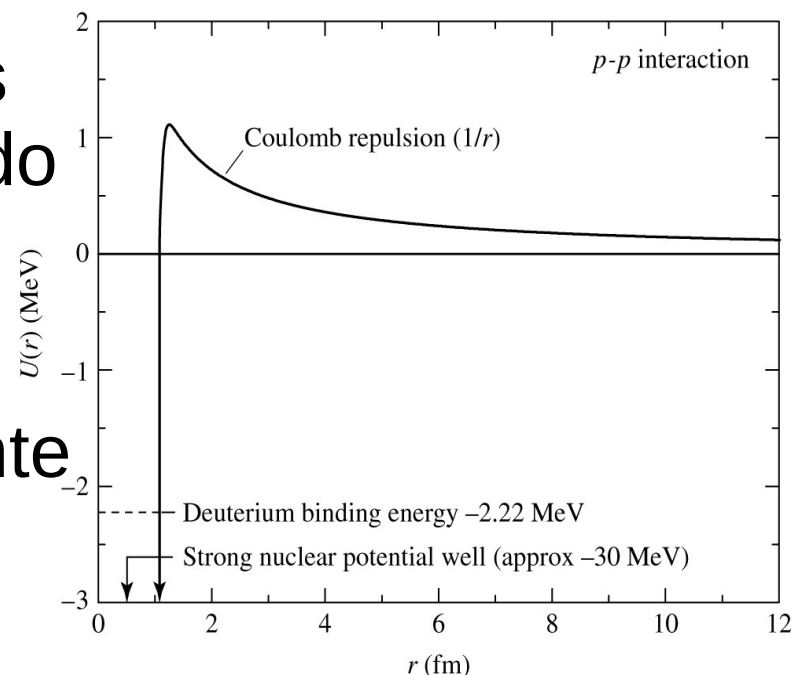
Fusão Nuclear

A fusão nuclear pode acontecer no Sol?

Olhando pra fusão nuclear mais simples, a de 2 prótons formando deutério.

Pra eles poderem fusionar, eles têm que se **aproximar** o suficiente para a **força nuclear forte**, de **curta alcance**,
 $r \sim 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$,
poder agir.

Para isto, eles têm que superar a repulsão eletrostática, ou barreira de Coulomb.



Fusão Nuclear

A fusão nuclear pode acontecer no Sol?

=> Eles têm que ter energia (antes da aproximação, cinética) de

$$1/4\pi\epsilon_0 \cdot q_1 q_2 / r = 1/4\pi\epsilon_0 \cdot Z_1 Z_2 e^2 / r$$

Para as partículas terem esta energia em média, a temperatura no núclei do Sol deve satisfazer

$$3/2 \cdot k_B T = 1/4\pi\epsilon_0 \cdot Z_1 Z_2 e^2 / r$$

$$\Rightarrow T = Z_1 Z_2 e^2 / 6\pi\epsilon_0 k r \sim 10^{10} \text{ K (para } Z_1 = Z_2 = 1)$$

Mas o centro do Sol tem apenas $1.57 \cdot 10^7$ K!

Até considerando que, na distribuição de Maxwell-Boltzmann, tem partículas com energias bem acima de $3/2 \cdot k_B T$, **não** chegamos em **taxas** significativas de fusões.

Fusão Nuclear

A fusão nuclear pode acontecer no Sol?

Como os prótons superam a barreira de Coulomb, então?

Pelo **efeito Túnel!**

Tomando como estimativa que as partículas têm que chegar dentro de um comprimento de onda de de Broglie uma da outra (classicamente) para poderem tunelar pela barreira.

Sendo μ_m a massa reduzida $m_1 m_2 / m_1 + m_2$, no caso de 2 prótons,

$$\mu_m = 1/2 m_p: \quad 1/4\pi\epsilon_0 \cdot Z_1 Z_2 e^2 / \lambda = p^2 / 2\mu_m = (h/\lambda)^2 / 2\mu_m$$

$$\Rightarrow \lambda = 2h^2 \pi \epsilon_0 / Z_1 Z_2 e^2 \mu_m$$

$$\Rightarrow T = [(h/\lambda)^2 / 2\mu_m] / (3/2 \cdot k_B) = Z_1^2 Z_2^2 e^4 \mu_m / 12\pi^2 \epsilon_0^2 h^2 k \sim 10^7 \text{ K},$$

compatível com a temperatura central do Sol.

Fusão Nuclear

Vamos tentar determinar a **taxa** de fusões.

Em termos de energia, a distribuição de Maxwell-Boltzmann é:

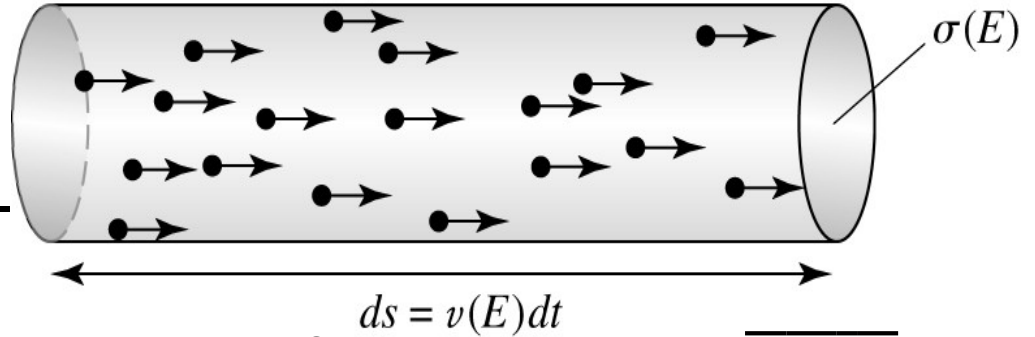
$$n_E dE = \frac{2\pi}{\pi^{1/2}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/kT} dE$$

onde n é a densidade total de partículas,
e n_E , a densidade de partículas com energia cinética
entre E e $E+dE$.

$$\text{vale } n = \int_0^{\infty} n_E dE$$

Fusão Nuclear

Precisamos saber a taxa de choques por volume para partículas com velocidades relativas v , resp.



energia cinética relativa $E = \frac{1}{2}\mu_m v^2$ ($\Rightarrow v(E) = \sqrt{2E/\mu_m}$), áreas de choque $\sigma(E)$, e densidade n_E .

Sendo n_i a densidade de partículas incidentes, e n_x , a de partículas “alvo”

$$dN_E/dt = \sigma(E)v(E) \cdot n_i/n \cdot n_E dE$$

\Rightarrow no. de reações por unidade de volume e de tempo:

$$r_{ix} = \int_0^\infty n_x n_i \sigma(E)v(E) \cdot n_E /n dE$$

Fusão Nuclear

O raio da seção de choque $\sigma(E)$ é aproximadamente um **comprimento de onda de de Broglie**:

$$\sigma(E) \approx \pi\lambda^2 = \pi(h/p)^2 \text{ prop. } 1/E$$

Mas a seção de choque também é proporcional à **probabilidade de tunelamento** (\Rightarrow física quântica):

$$\sigma(E) \text{ prop. } e^{-2\pi^2 U_c/E},$$

onde U_c/E é a razão entre altura da barreira de Coulomb

(de novo, $r \sim \lambda$) e energia cinética da partícula,

$$U_c/E = Z_1 Z_2 e^2 / 4\pi\epsilon_0 r (1/2 \mu_m v^2) = Z_1 Z_2 e^2 / 2\pi\epsilon_0 h v$$

$$\Rightarrow \sigma(E) \text{ prop. } e^{-b/\sqrt{E}}, \text{ onde } b \equiv \pi\sqrt{\mu_m} Z_1 Z_2 e^2 / \sqrt{2}\epsilon_0 h$$

Combinando: $\sigma(E) \text{ prop. } 1/E \cdot e^{-b/\sqrt{E}}$

Fusão Nuclear

Infelizmente, estas ideias funcionam apenas aproximadamente, e temos que aplicar uma correção na forma de uma função $S(E)$, daquela esperamos que ela não varia muito rapidamente com E :

$$\sigma(E) = S(E)/E \cdot e^{-b/\sqrt{E}}$$

substituindo na integral da taxa de reações:

$$r_{ix} = \left(\frac{2}{kT} \right)^{3/2} \frac{n_i n_x}{(\mu_m \pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} S(E) e^{-bE^{-1/2}} e^{-E/kT} dE$$

(o $e^{-E/kT}$ vem da parte de altas energias da distribuição de Maxwell-Boltzmann; os \sqrt{E} da distribuição de M.-B. e de $v(E)$ se cortam com o $1/E$ de $\sigma(E)$)

Fusão Nuclear

A função dentro da integral,

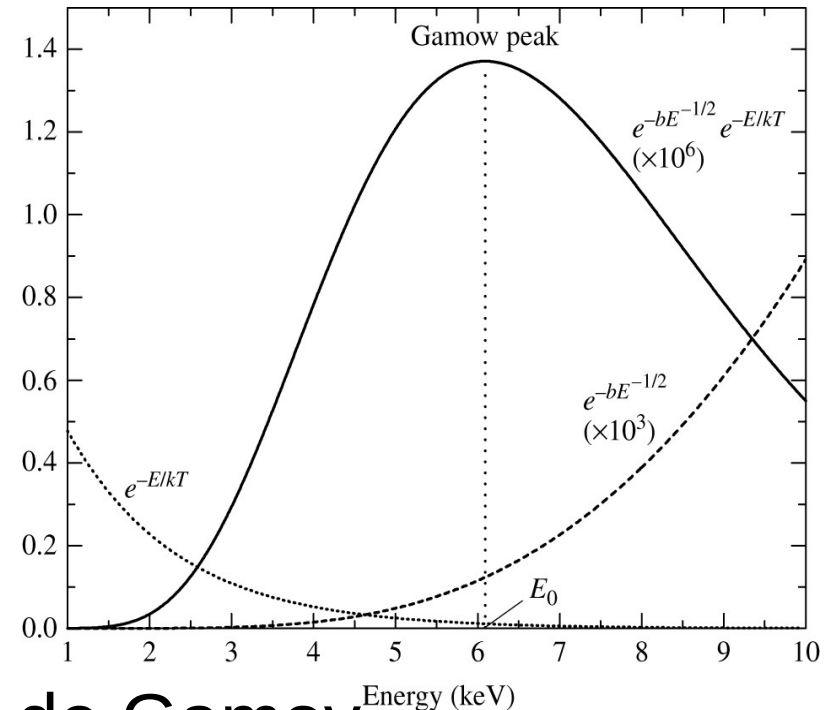
$$S(E) e^{-b/\sqrt{E}} e^{-E/kT},$$

é, então, proporcional à **taxa de reações** em função da **energia**.

Esta taxa tem um máximo em

$$E_0 = (bk_B T/2)^{2/3}, \text{ chamado pico de Gamov.}$$

A maior parte das reações vem de uma faixa de energias relativamente estreita em torno deste pico, que depende da temperatura do gás e das cargas e massas das constituintes da reação.



Fusão Nuclear

Ressonância

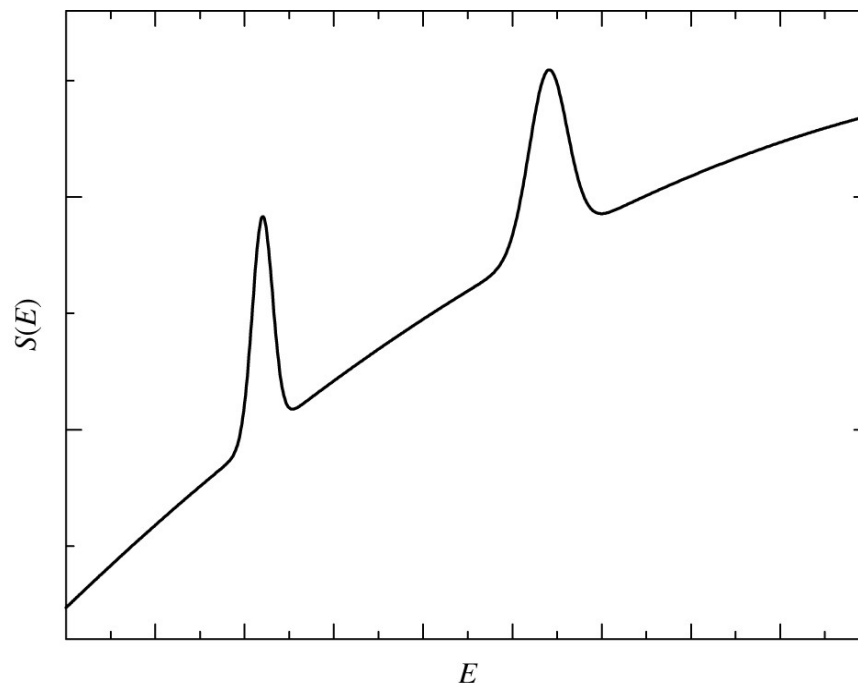
Nem sempre $S(E)$ varia lentamente com E .

Se a energia das partículas coincide com um nível de energia de um dos núcleos, pode ocorrer **ressonância**, aumentando

significativamente

a probabilidade da reação,

o que se exprime como picos estreitos em $S(E)$.



Fusão Nuclear

Blindagem (?) de Elétrons (Electron Screening)

Outro fator afetando as taxas de reações é a **blindagem de elétrons**. Nas condições nos núcleos das estrelas, os átomos são altamente **ionizados**, tal que os núcleos se encontram dentro de um “mar” de **elétrons**, que **reduzem** a carga nuclear que as partículas vêem, o que aumenta a taxa de reações.

O potencial efetivo vira: $U_{\text{eff}} = 1/4\pi\epsilon_0 \cdot Z_1 Z_2 e^2/r + U_s(r)$, onde $U_s(r)$ é a contribuição da blindagem de elétrons.

O **aumento** na **taxa** de **reações** pode ser significativo, às vezes aumentando a taxa de produção de hélio, por exemplo, por 10 % a 50 %.

Fusão Nuclear

Representando Taxas de Reações por Potências

Às vezes é ilustrativo aproximar a **dependência** da **taxa de reações** da **temperatura** por **funções de potência**:

$$r_{ix} \approx r_0 X_i X_x \rho^{\alpha'} T^\beta,$$

onde r_0 é uma constante, X_i e X_x são as frações de massa das duas partículas, e α' e β podem ser determinados por uma expansão de Taylor das equações de taxa de reações. Normalmente, $\alpha' = 2$ e β pode variar de 1 a 40 ou mais.

Fusão Nuclear

Representando Taxas de Reações por Potências

Combinando a taxa de reações com a energia liberada por reação, ε_0 , a energia liberada por unidades de massa e tempo vira:

$$\varepsilon_{ix} = (\varepsilon_0 / \rho) r_{ix} = \varepsilon_0' X_i X_x \rho^\alpha T^\beta,$$

onde $\alpha = \alpha' - 1$.

Fusão Nuclear

Nucleossíntese Estelar e Leis de Conservação

Daremos uma olhada nos processos principais de **nucleossíntese** que ocorrem em estrelas, processos naqueles elementos químicos são convertidos em outros.

Além dos núcleos (compostos de prótons e nêutrons), estes processos podem envolver fótons (γ), elétrons (e^-), pósitrons (antielétrons, e^+), neutrinos do elétron (ν_e) e antineutrinos do elétron ($\bar{\nu}_e$).

Estes últimos quatro partículas são de uma classe chamada **leptons** (juntos com os (anti)múons e (anti)tauons e seus (anti)neutrinos).

Fusão Nuclear

Nucleossíntese Estelar e Leis de Conservação

Nas reações, várias grandezas são **conservadas**:

- a **carga elétrica**
- o **número de núcleons**
- o **número leptônico**, isto é, o número de leptons de matéria (e^- , ν_e) menos o número de leptons de antimatéria (e^+ , $\bar{\nu}_e$).

Fusão Nuclear

Simbolizaremos os núcleos da seguinte maneira:



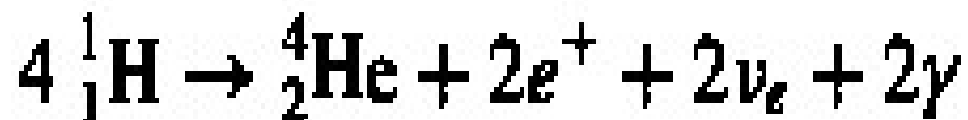
onde X é um código em letras (H, He, Li, etc.), designando o elemento, Z é o número de prótons (que determina o elemento, então não seria necessário colocar e é frequentemente omitido) que também é a carga do núcleo em unidades da carga elementar e , A é o número de núcleons, $A = Z + N$, N sendo o número de nêutrons.

Núcleos com Z iguais, mas N e portanto, A , diferentes são chamados **isótopos** do mesmo elemento.

Fusão Nuclear

“Queima” de Hidrogênio

Praticamente em **todas** as **estrelas**, **hidrogênio** é transformado em **hélio** (se não no núcleo da estrela, então provavelmente em alguma outra camada):



A queima de hidrogênio pode ocorrer de duas maneiras diferentes: Pela **cadeia próton-próton** e pelo **ciclo CNO**.

A queima de hidrogênio é de longe a reação nuclear com o maior rendimento. As estrelas passam a maior parte (80 % a 90 %) das suas vidas queimando apenas hidrogênio.

Fusão Nuclear

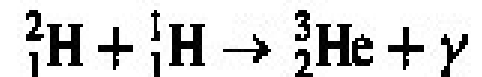
Cadeia próton-próton I (PP I)

A cadeia próton-próton tem três sub-ramos.

A primeira é mostrada aqui:



O isótopo hidrogênio ${}^2_1\text{H}$ é também chamada deutério.

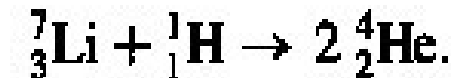
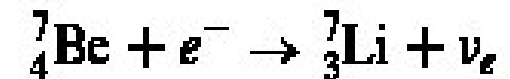
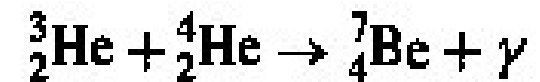


O passo mais lento é o primeiro, ${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2 {}^1_1\text{H}$.
que envolve o decaimento de um próton,
 $p^+ \rightarrow n + e^+ + \nu_e$, causado pela força nuclear fraca.

Fusão Nuclear

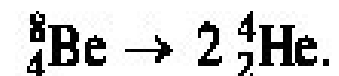
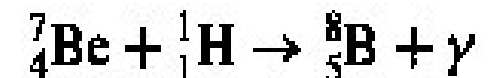
Cadeia próton-próton II (PP II)

Uma vez formados hélio-3 e hélio-4, um outro ramo da cadeia p-p pode acontecer,



Cadeia próton-próton III (PP III)

ou um terceiro (raro).

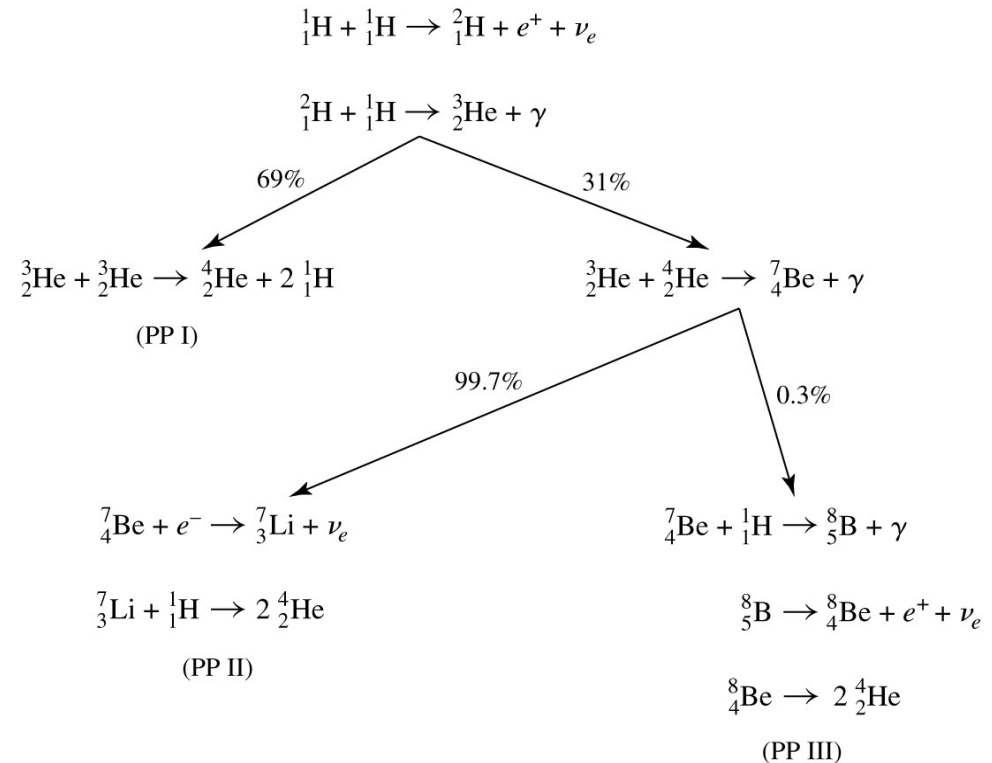


Fusão Nuclear

Cadeia próton-próton

Resumo dos três ramos da cadeia p-p, incl. as porcentagens de frequência de cada um.

A cadeia p-p ocorre a partir de $\sim 10^7$ K, e a energia liberada é proporcional a T^4 .



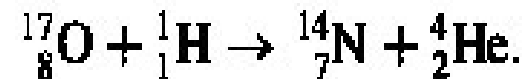
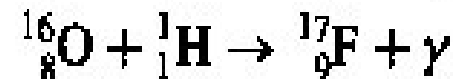
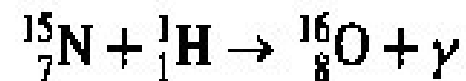
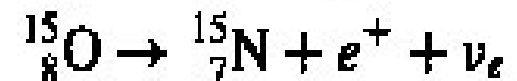
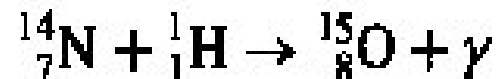
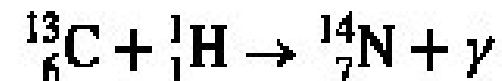
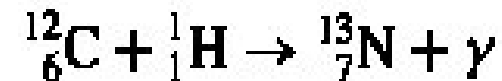
Fusão Nuclear

Ciclo CNO I

A partir de $15 \cdot 10^6$ K, um outro processo também queima H, o **ciclo CNO**, naquele carbono, nitrogênio e oxigênio servem como catalisadores.

Ciclo CNO II

Em uns 0.04 % das vezes, em lugar do último passo, ocorre uma sequência de reações alternativa.



Fusão Nuclear

Ciclo CNO

A energia gerada pelo ciclo CNO aumenta muito rapidamente com a temperatura,

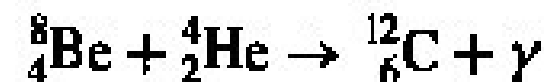
$$\varepsilon_{\text{CNO}} \text{ prop. } T^{19.9},$$

tal que este processo domina a cadeia p-p a partir de $\sim 17 \cdot 10^6$ K.

Fusão Nuclear

Processo Triplo-alpha

Neste processo, três núcleos de hélio (partículas α) fusionam para formarem carbono, com um passo intermediário pelo berílio.



Como o berílio é instável, o segundo passo tem que ser feito imediatamente depois do primeiro, senão o berílio decai de novo, antes de fazer o segundo passo.

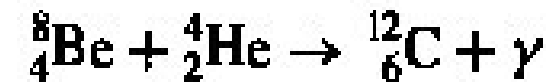
Pela baixa probabilidade deste “choque de três corpos”, o processo triplo-alpha ocorre (normalmente) **muito lentamente** (para temperaturas normais). O processo triplo-alpha é o **gargalo** da **nucleossíntese** .

Fusão Nuclear

Processo Triplo-alpha

O processo triplo-alpha começa a 10^8 K, e a energia liberada é proporcional a T^{41} (!).

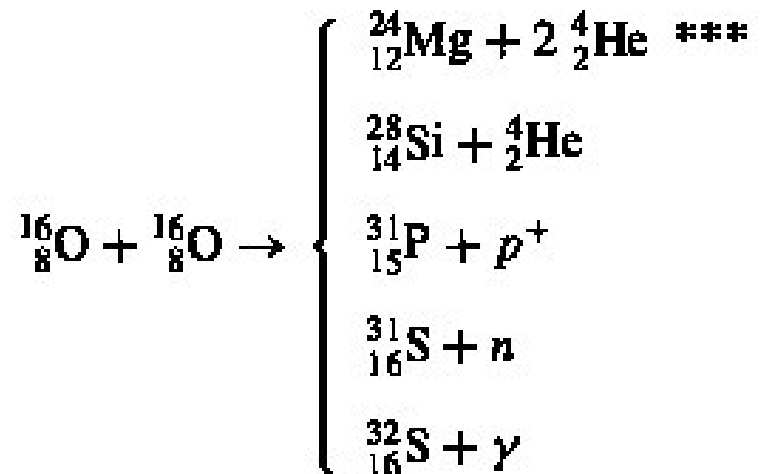
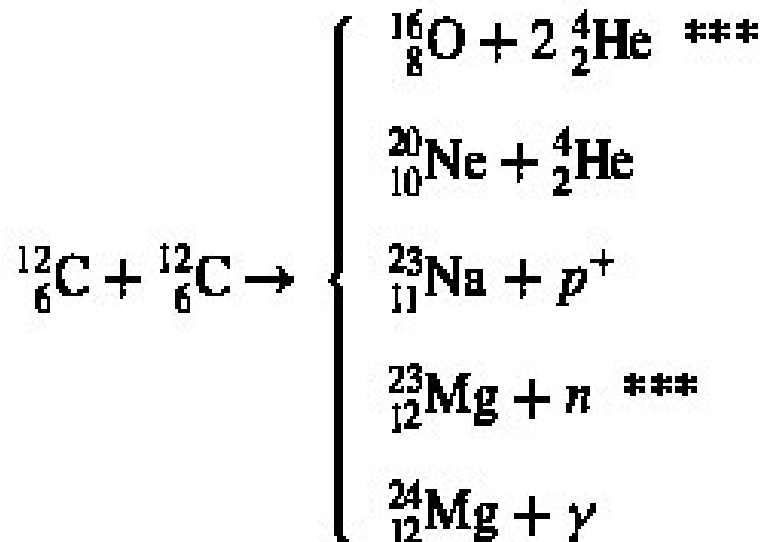
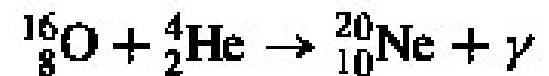
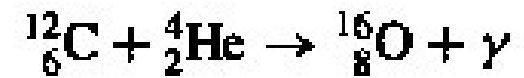
=> Uma vez “acesso”, pode acontecer uma reação em cadeia.



Fusão Nuclear

”Queima” de Carbono e de Oxigênio

A partir de $6 \cdot 10^8$ K, respectivamente $1.5 \cdot 10^9$ K, ocorrem as queimas de carbono e de oxigênio.



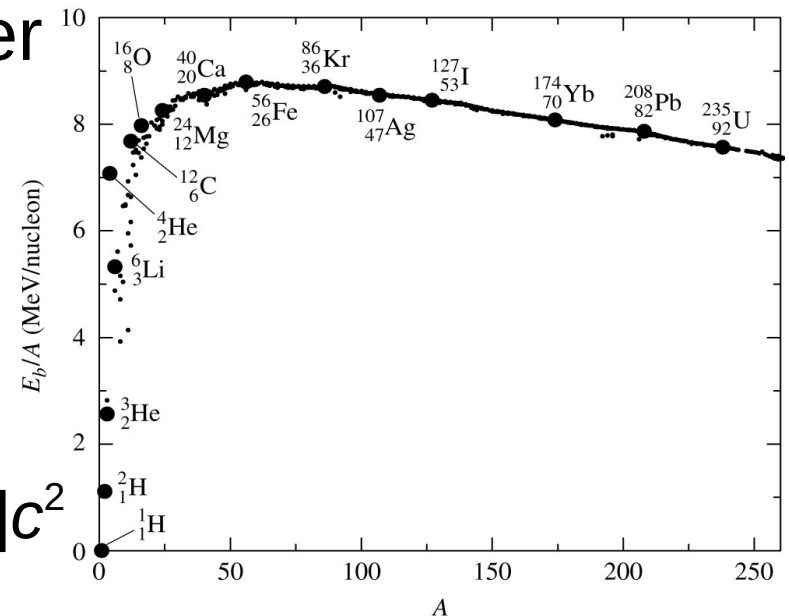
Os processos intermediários marcados com *** são endotérmicos, i. e. eles consomem energia.

Fusão Nuclear

A Energia de Ligação por núcleon

Uma grandeza útil para entender a liberação de energia em reações nucleares é a **energia de ligação** por núcleon E_b/A , onde

$$E_b = \Delta mc^2 = [Zm_p + (A-Z)m_n - m_{\text{núcleo}}]c^2$$



Elementos com E_b/A **alto**, como He e O são entre os núcleos **mais frequentes** no Universo.

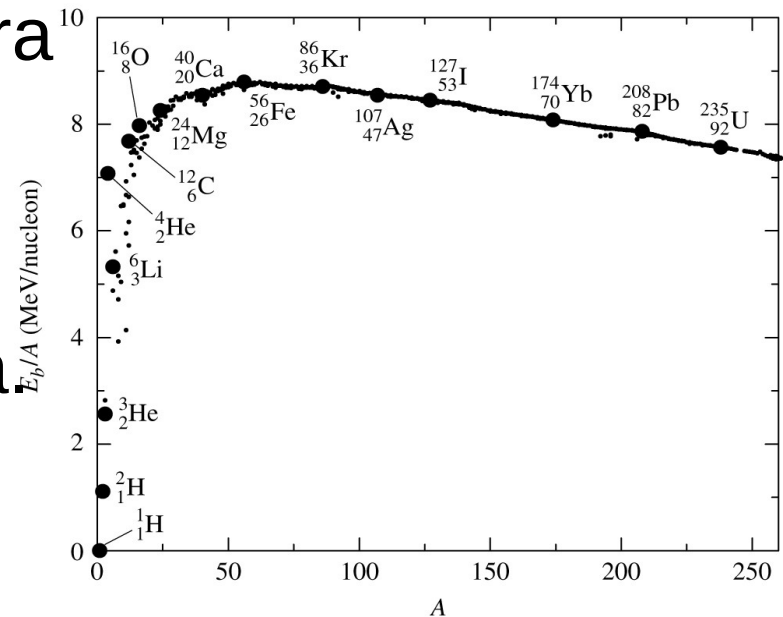
Fusão Nuclear

A Energia de Ligação por núcleon

O que se vê também nesta figura é, que o **maior pulo** ocorre de **hidrogênio** para **hélio**.

=> A **queima de hidrogênio** é o passo que **mais** libera energia.

Em uma estrela que faz vários passos em seguida, os passos duram cada vez **mais curtos**, por que para cada passo tem menos combustível a disposição.

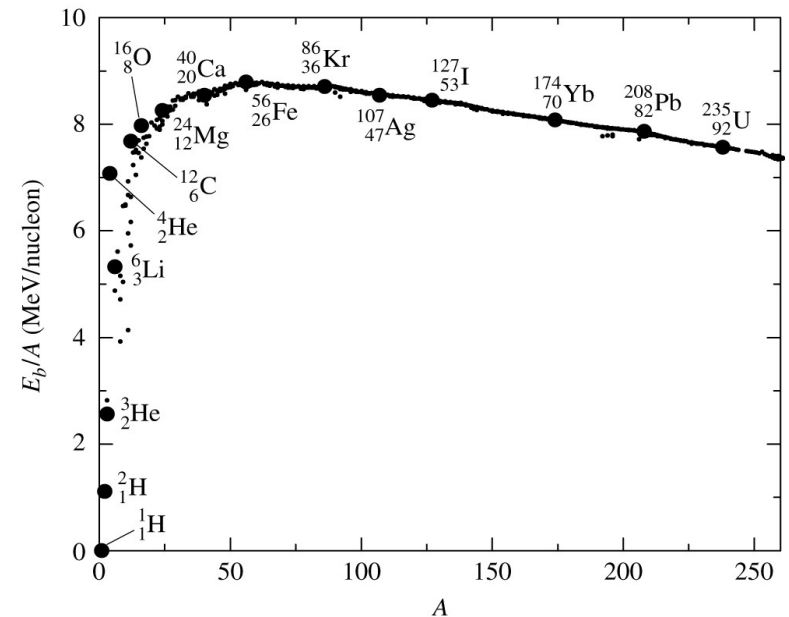


Fusão Nuclear

A Energia de Ligação por núcleon

O **máximo** fica em ferro-56, o que significa, que **fusões** de elementos até produzir o ferro-56 são **exotérmicos** e podem ocorrer “espontaneamente”. A partir de lá, **fusões** são **endotérmicos** e **consomem energia**.

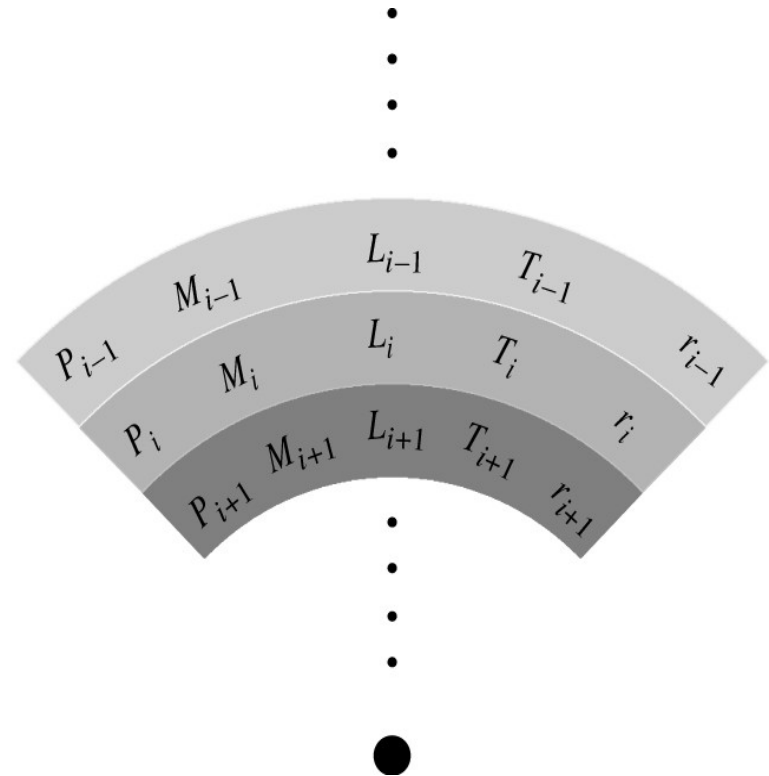
A **formação** de **elementos** além do ferro-56 só pode acontecer em ambientes **muito extremos**, como em **Supernovas** (=> segunda metade da disciplina).



Evolução Estelar

Modelos Estelares

Calculam as **densidade** e **composição** de íons, elétrons, fótons e neutrinos e as **temperatura** e **pressão** em função de r e do tempo, subdividindo a estrela em cascas finas esféricas, frequentemente supondo simetria esférica.



Evolução Estelar

Modelos Estelares

Elas levam em conta:

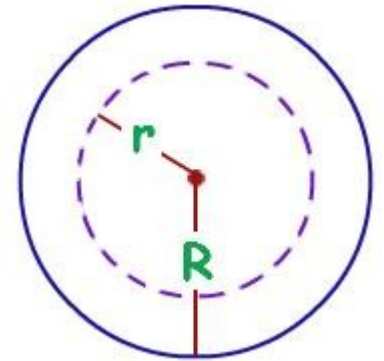
- A **Fusão Nuclear** em função de temperatura, pressão e montante de “combustível” (hidrogênio e, mais tarde, outros elementos),

- A **Luminosidade** contida na esfera com raio r :

$$L_r = \int_0^r dL = \int_0^r 4\pi r^2 \cdot \rho \varepsilon dr, \text{ onde}$$

$\varepsilon = \varepsilon_{\text{nuclear}} + \varepsilon_{\text{gravidade}}$ é a energia por unidade de massa

gerada na esfera na distância r do centro,



Evolução Estelar

Modelos Estelares

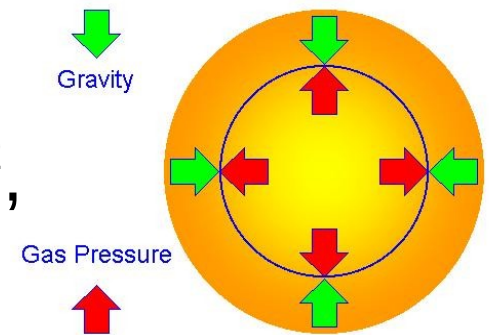
- **Equilíbrio Hidrostático:**

Em cada ponto da estrela, o gradiente da pressão tem que contrabalancear a atração gravitacional:

$$dP/dr = -GM_r \rho / r^2,$$

onde $M_r = \int_0^r dM = \int_0^r \rho dV = \int_0^r \rho \cdot 4\pi r^2 dr,$

Hydrostatic Equilibrium



- E o **Transporte de Energia** por

- radiação: $dT/dr = -3/4ac \cdot \bar{\kappa} \rho / T^3 \cdot L_r / 4\pi r^2$

- convecção adiabática: $dT/dr \Big|_{ad} = -(1-1/\gamma) \cdot \mu m_H / k_B \cdot GM_r / r^2$

- condução (normalmente desprezível)

Evolução Estelar

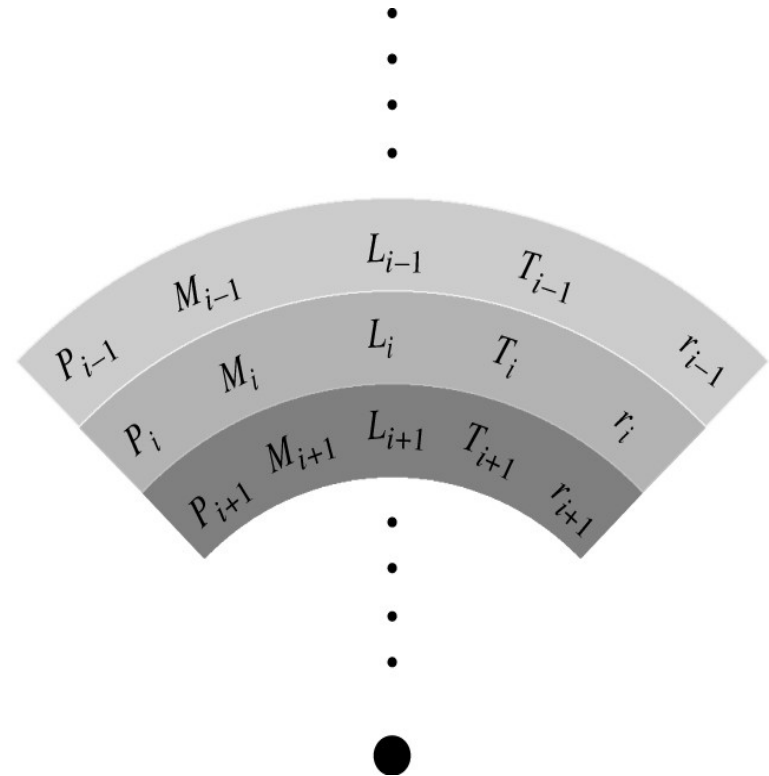
Modelos Estelares

Eles partem de **condições de contorno** razoáveis, i. e.

$M_r, L_r = 0$ para $r = 0$.

T, P e ρ tomam seus valores observados em $r = R$ (se conhecidos), e **integram** do centro até a superfície e/ou vice-versa.

Têm que explicar a **variedade de Estrelas observadas**.



Evolução Estelar

Resultados dos Modelos Estelares

- O **destino** de uma estrela é determinado pela sua **massa**.
- Quanto **maior** a **massa** da estrela, tanto **maior** as **densidade**, **pressão** e **temperatura** no **interior**
=> tanto **mais rápida** decorre a sua **evolução**
(incl. a sua evolução proto-estelar
=> aulas na segunda parte da disciplina),
e tanto **mais elementos** podem ser formados no
seu caroço

Evolução Estelar

$M < 0.072 M_{\odot}$:

$T_{\text{caroço}} < 10^7 \text{ K} \Rightarrow$ não ocorre fusão nuclear estável
 \Rightarrow “estrela frustrada”, anã marrom, “Jupiter”

$M > \sim 150 M_{\odot}$:

Fusão já começa antes da relaxação da estrela
 \Rightarrow Estrela se desfaz antes de se formar

$0.072 M_{\odot} < M < \sim 150 M_{\odot}$:

$T_{\text{caroço}} > 10^7 \text{ K} \Rightarrow$ ignição do H \Rightarrow fusão nuclear

\Rightarrow Estrela comum, “estrela anã” como o Sol

- $0.072 M_{\odot} < M < \sim 8 M_{\odot}$: estrelas de baixa massa

- $\sim 8 M_{\odot} < M < \sim 150 M_{\odot}$: estrelas de alta massa

! Os limites entre as faixas de massa podem diferir muito de acordo com a fonte consultada. Alguns astrônomos ainda usam uma faixa de estrelas de massa intermediária.



Universidade Federal do ABC

Introdução à Física Estelar

FIM PRA HOJE

