

## Estrelas Variáveis

Relação período-luminosidade de Cefeidas:  $\log_{10} \frac{\langle L \rangle}{L_{\odot}} = 1.15 \log_{10} P[\text{d}] + 2.47$

em magnitudes:  $M_{\langle V \rangle} = -2.81 \log_{10} P[\text{d}] - 1.43$

Período do modo fundamental atravessando uma estrela ( $\rho = \text{const.}$ ):  $P \approx \sqrt{\frac{3\pi}{2\gamma G \rho}}$

## Estrelas Binárias

Duas estrelas orbitando na distância  $r$  uma da outra:  $r_1 = \frac{M_2}{M_1+M_2} \cdot r$ ,  $r_2 = \frac{M_1}{M_1+M_2} \cdot r$ ,

$$\omega = \sqrt{\frac{G(M_1+M_2)}{r^3}}, v_1 = \omega \cdot r_1, v_2 = \omega \cdot r_2$$

“Força centrífuga” numa massinha  $m$  na distância  $r$  do centro de massa:  $F_c = m\omega^2 r$

“Energia potencial” associada:  $U_c = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$

Potencial efetivo na posição de  $m$ :  $\Phi = -G \left( \frac{M_1}{s_1} + \frac{M_2}{s_2} \right) - \frac{1}{2}\omega^2 r^2$

Pontos Lagrangianos:  $\nabla\Phi = 0$

## Anãs Brancas

Distribuição de Fermi:  $f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\varepsilon_F)/k_B T} + 1}$

Energia de Fermi:  $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left[ 3\pi^2 \left( \frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{2/3}$

Pressão de degenerescência eletrônica:  $P = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_e} n_e^{5/3} = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_e} \left[ \left( \frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{5/3}$

Raio de uma Anã Branca (usando densidade constante):  $R_{\text{wd}} \approx \frac{(18\pi)^{2/3}}{10} \frac{\hbar^2}{G m_e M_{\text{wd}}^{1/3}} \left[ \left( \frac{Z}{A} \right) \frac{1}{m_H} \right]^{5/3}$

$\Rightarrow M_{\text{wd}} V_{\text{wd}} = \text{const.}$

Pressão no limite relativístico:  $\frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \hbar c \left[ \left( \frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{4/3}$

Massa de Chandrasekhar usando densidade constante:  $M_{\text{Ch}} \sim \frac{3\sqrt{2}\pi}{8} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \left[ \left( \frac{Z}{A} \right) \frac{1}{m_H} \right]^2$

Valor verdadeiro:  $M_{\text{Ch}} = 1.44 M_{\odot}$

## Supernovas e Remanescentes

Radioatividade / Decaimento exponencial:  $\frac{dN}{dt} = -\lambda N \Rightarrow N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} = N_0 \cdot 2^{-t/\tau_{1/2}}$

Decaimentos ocorrendo nos Remanescentes de Supernovas:

$^{56}\text{Ni} \rightarrow ^{56}\text{Co} + e^+ + \nu_e + \gamma$ ,  $\tau_{1/2} = 6.1$  dias;  $^{56}\text{Co} \rightarrow ^{56}\text{Fe} + e^+ + \nu_e + \gamma$ ,  $\tau_{1/2} = 77$  dias

de  $^{57}\text{Co}$ :  $\tau_{1/2} = 271$  dias, de  $^{44}\text{Ti}$ :  $\tau_{1/2} = 47$  anos, de  $^{22}\text{Na}$ :  $\tau_{1/2} = 2.6$  anos

Expansão dos Remanescentes:

Expansão livre:  $v_{\text{SNR}} = 3.2 \cdot 10^3 \frac{\text{km}}{\text{s}} \left( \frac{M_{\text{ej}}}{10 M_{\odot}} \right)^{-1/2} \left( \frac{E_{\text{exp}}}{10^{44} \text{ J}} \right)^{1/2}$ ,

$$R_{\text{SNR}} = 0.32 \text{ pc} \left( \frac{E_{\text{exp}}}{10^{44} \text{ J}} \right)^{1/2} \left( \frac{M_{\text{ej}}}{10 M_{\odot}} \right)^{-1/2} \left( \frac{t}{100 \text{ anos}} \right)$$

Fase de Sedov-Taylor:  $R_{\text{SNR}} = 15 \text{ pc} \left( \frac{E_{\text{exp}}}{10^{44} \text{ J}} \right)^{1/5} \left( \frac{n_{\text{ISM}}}{1 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1/5} \left( \frac{t}{10^4 \text{ anos}} \right)^{2/5}$ ,

$$v_{\text{SNR}} = 580 \frac{\text{km}}{\text{s}} \left( \frac{E_{\text{exp}}}{10^{44} \text{ J}} \right)^{1/5} \left( \frac{n_{\text{ISM}}}{1 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1/5} \left( \frac{t}{10^4 \text{ anos}} \right)^{-3/5}$$

Fase Removedor de neve:  $R_{\text{SNR}} = 30 \text{ pc} \left( \frac{E_{\text{exp}}}{10^{44} \text{ J}} \right)^{11/49} \left( \frac{n_{\text{ISM}}}{1 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-13/49} \left( \frac{t}{10^4 \text{ anos}} \right)^{2/7}$ ,

$$v_{\text{SNR}} = 120 \frac{\text{km}}{\text{s}} \left( \frac{E_{\text{exp}}}{10^{44} \text{ J}} \right)^{-4/49} \left( \frac{n_{\text{ISM}}}{1 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-13/49} \left( \frac{t}{10^4 \text{ anos}} \right)^{-5/7}$$

## Relatividade

Transformações de Lorentz:  $x' = \gamma(x - ut)$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$ ,  $t' = \gamma(t - \frac{ux}{c^2})$ ,

onde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$  fator de Lorentz,  $\beta = \frac{u}{c}$

Dilatação do tempo:  $\Delta t = \gamma \Delta t' \geq \Delta t'$ ,  $t'$  sendo o tempo próprio

Contração de comprimentos:  $L = \gamma^{-1} L' \leq L'$ ,  $L'$  sendo o comprimento próprio

Efeito Doppler pra luz:  $\nu_{\text{obs}} = \nu_0 \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+u_r/c}$ ,

onde  $u_r$  é a velocidade de afastamento radial entre fonte e observador

Efeito Doppler radial ( $u_t = u$ ,  $u_r = 0$ ):  $\nu_{\text{obs}} = \nu_0 \sqrt{\frac{1-u_r/c}{1+u_r/c}}$ ,

Efeito Doppler transversal ( $u_t = u$ ,  $u_r = 0$ ):  $\nu_{\text{obs}} = \nu_0 \sqrt{1 - u_t^2/c^2}$

Momento linear relativístico:  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$

Energia relativística:  $E = \gamma m c^2$

Fórmula útil:  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$

Intervalo no espaço-tempo:  $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$

Mudança de frequência na variação de altura:  $\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = \frac{g \Delta h}{c^2}$

Entre a superfície de uma massa esférica e um ponto "longe":  $\frac{\nu_\infty}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0 c^2}}$

para  $r_0 \gg \frac{2GM}{c^2}$ :  $\frac{\nu_\infty}{\nu_0} \approx 1 - \frac{GM}{r_0 c^2}$

redshift gravitacional:  $z = \frac{\lambda_\infty - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\nu_0}{\nu_\infty} - 1 = (1 - \frac{2GM}{r_0 c^2})^{-1/2} - 1 \approx \frac{GM}{r_0 c^2}$

Dilatação gravitacional do tempo:  $\frac{\Delta t_0}{\Delta t_\infty} = \frac{\nu_\infty}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0 c^2}}$

Para um campo fraco:  $\frac{\Delta t_0}{\Delta t_\infty} \approx 1 - \frac{GM}{r_0 c^2}$

Equação de campo de Einstein:  $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$

Métrica do espaço-tempo na ausência de massas:  $(ds)^2 = (cdt)^2 - (dl)^2$

$$= (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (cdt)^2 - (dr)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2)$$

Raio de Schwarzschild:  $R_S = \frac{2GM}{c^2}$

Métrica de Schwarzschild:  $(ds)^2 = (cdt\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}})^2 - (\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}})^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2)$

Ângulo de deflexão de luz por uma massa:  $\Delta\varphi = \frac{4GM}{c^2 R}$

## Estrelas de Nêutrons

Raio de uma Estrela de Nêutrons:  $R_{\text{ns}} \approx \frac{(18\pi)^{2/3}}{10} \frac{\hbar^2}{GM_{\text{ns}}^{1/3}} \left(\frac{1}{m_{\text{H}}}\right)^{8/3}$

Conservação do momento angular na contração:  $P_f = P_i \cdot \left(\frac{R_f}{R_i}\right)^2$

Conservação do fluxo magnético na contração:  $B_f = B_i \cdot \left(\frac{R_i}{R_f}\right)^2$

processo Urca:  $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ ,  $p^+ + e^- \rightarrow n + \nu_e$

## Buracos Negros

Momento angular máximo de um buraco negro:  $L_{\text{max}} = \frac{GM^2}{c}$

Radiação Hawking:  $\frac{dM}{dt} \propto M^{-2}$

$$t_{\text{evap}} = 2560\pi^2 \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 \left(\frac{M}{\hbar}\right) \approx 2 \cdot 10^{67} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3 \text{ anos}$$