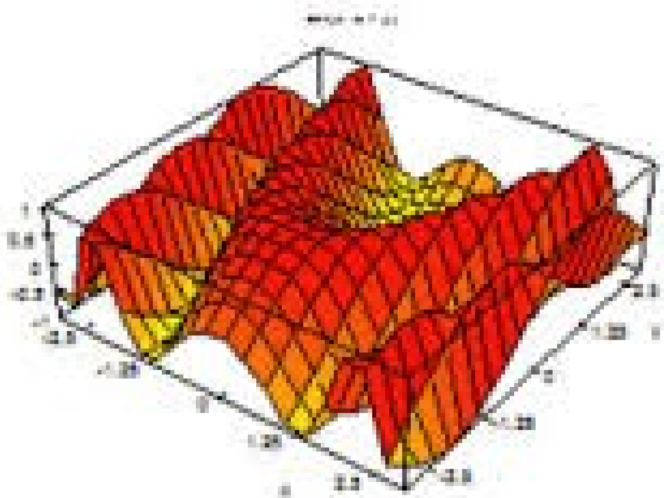
Universidade Federal do ABC

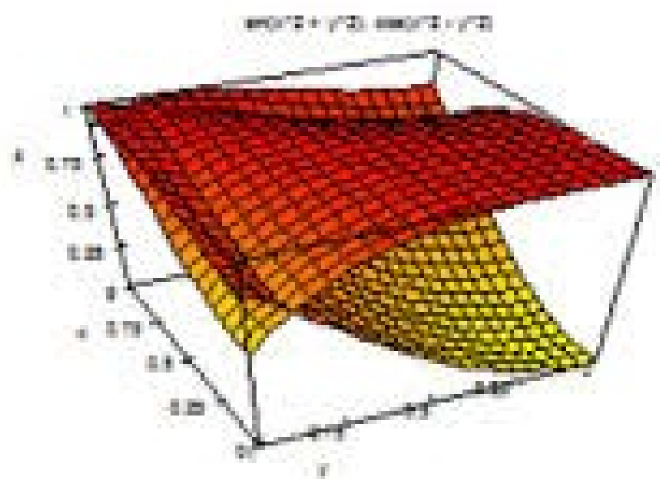
Funções de Várias Variáveis

1. Introdução; Curvas, Superfícies e exemplos

Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/FVV.html





Repetição FUV

=> Quadro, Tabela de Derivadas e Integrais no site

Rep. GA: Convenções

Escalares: Letras latins (normalmente em itálico).

Exemplo: a

Vetores: Em negrito (slides) ou com flecha em cima:

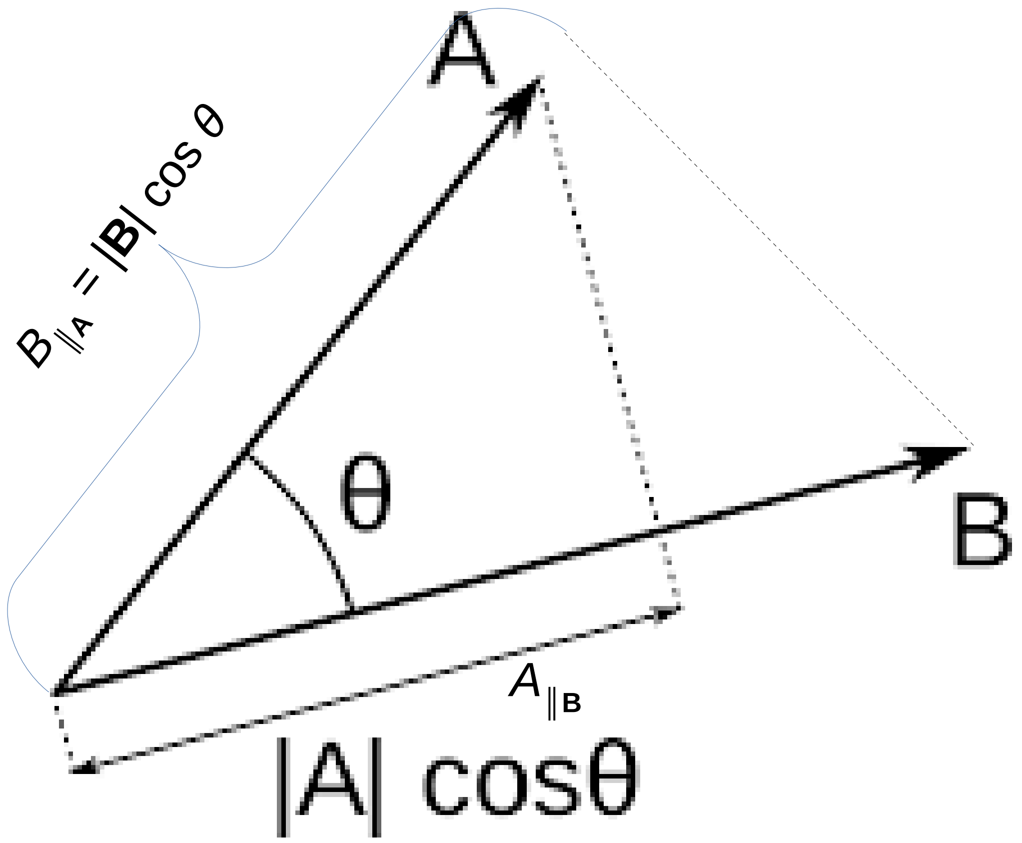
Exemplo: $\mathbf{r} = \vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ ou (x, y, z)

Escalar com o mesmo nome de um vetor: Normalente o módulo deste vetor:

Exemplo: $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

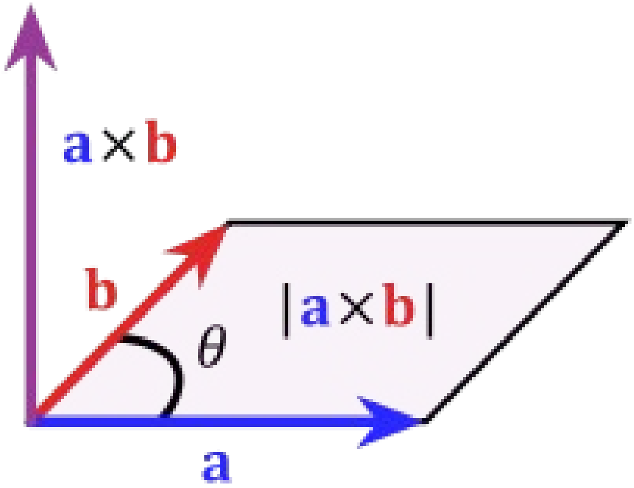
O Produto Escalar **a·b**

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_{\parallel \mathbf{B}}B = A\ B_{\parallel \mathbf{A}} = A\ B \cos\theta = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta$



O Produto Vetorial **a×b** (só 3D)

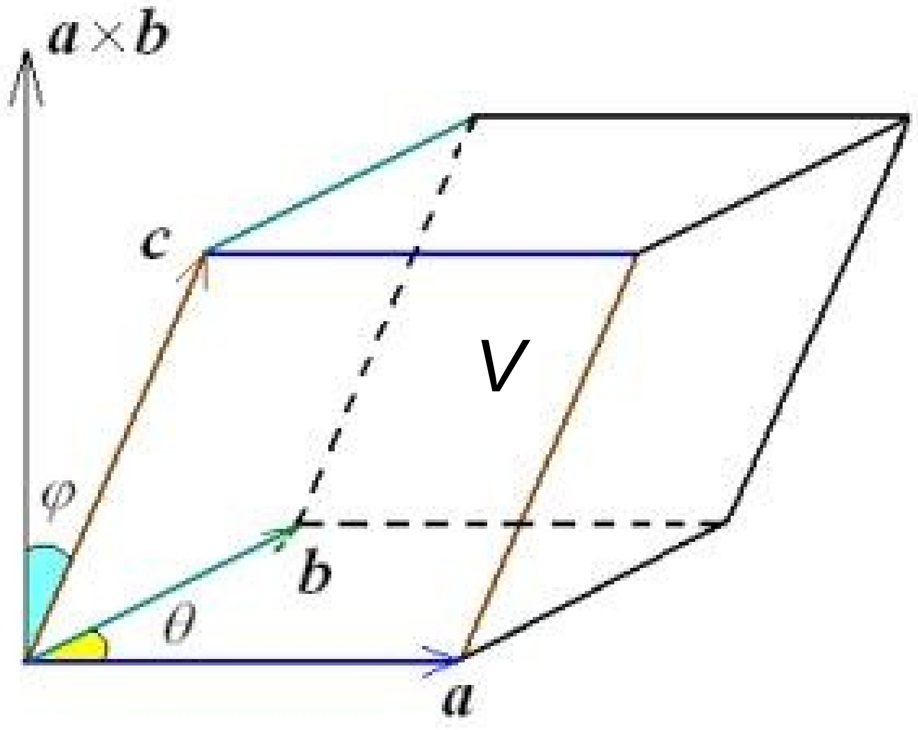
a×b = |*a*| |*b*| sen *θ*



O Produto Triplo Escalar **a**·(**b**×**c**)

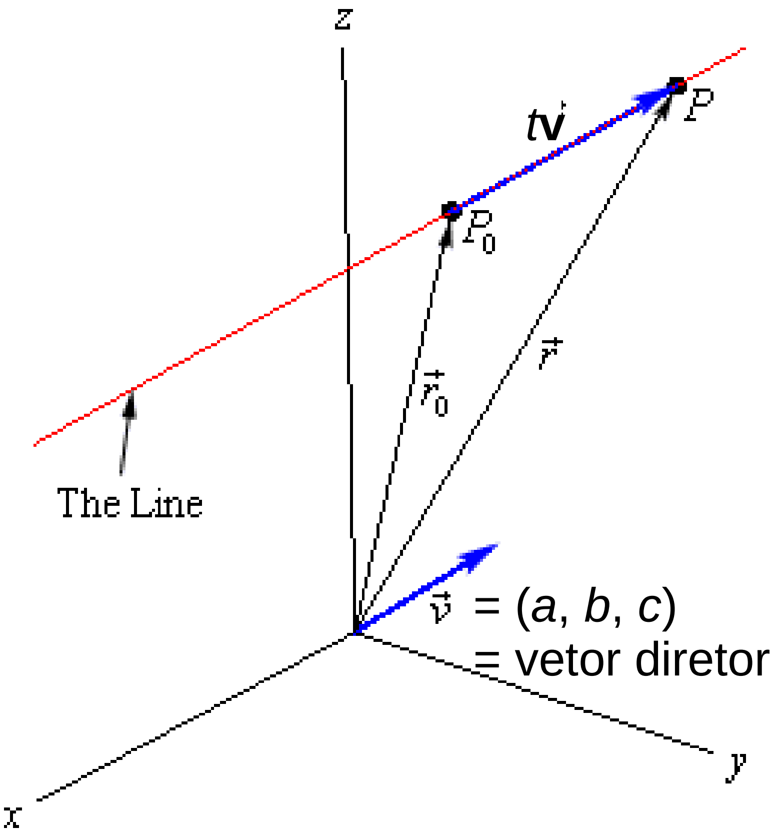
a·(**b**×**c**) = **b**·(**c**×**a**) = **c**·(**a**×**b**)

V = |**a**·(**b**×**c**)|
negativo, caso **a**, **b** e **c** não são orientados seguindo a regra da mão direita.



Equação parâmetrica da reta L

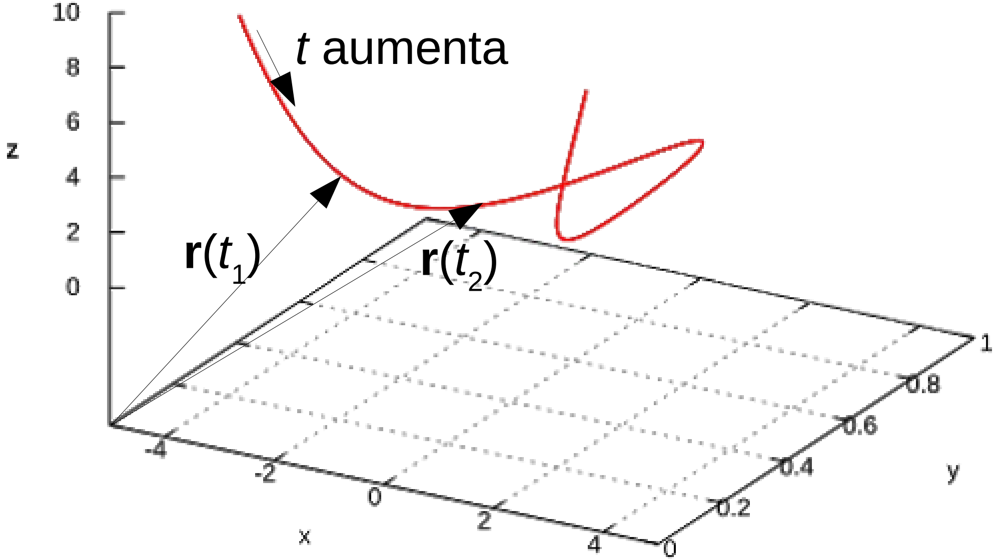
$\mathbf{r}(t) = (x, y, z) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} = (x_0+at, y_0+bt, z_0+ct)$



Equação parâmetrica da curva C

A reta é um caso especial de uma curva no espaço.
Em geral, podemos descrever curvas no espaço como funções (a valores) vetoriais:

$$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$$
$$= f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$



Analogicamente à reta chamamos as equações

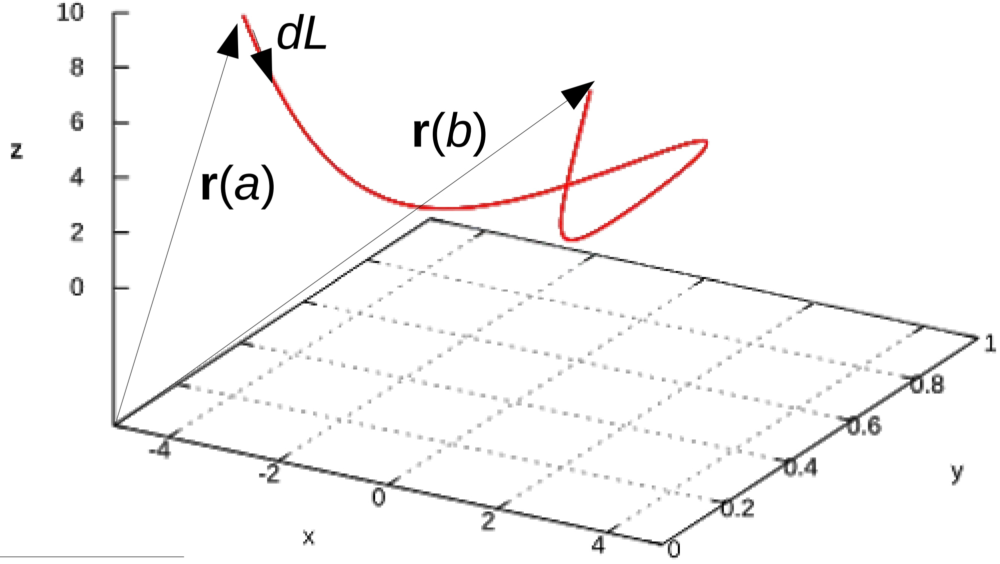
$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$$

de equações paramétricas da curva, sendo t o parâmetro.

! Aqui também existe mais que uma parametrização.
Ex.: $\mathbf{r}(t) = (f(2t), g(2t), h(2t))$, $\mathbf{r}(t) = (f(t^3), g(t^3,), h(t^3))$, ...
descrevem a mesma curva

Equação parâmetrica da curva C

O comprimento da curva entre **r**(a) e **r**(b) é



$$L = \int_a^b dL$$

$$= \int_a^b \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

$$= \int_a^b \sqrt{(dx/dt)^2+(dy/dt)^2+(dz/dt)^2}\, dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2+h'(t)^2}\, dt$$

Equação parâmetrica da curva *C*

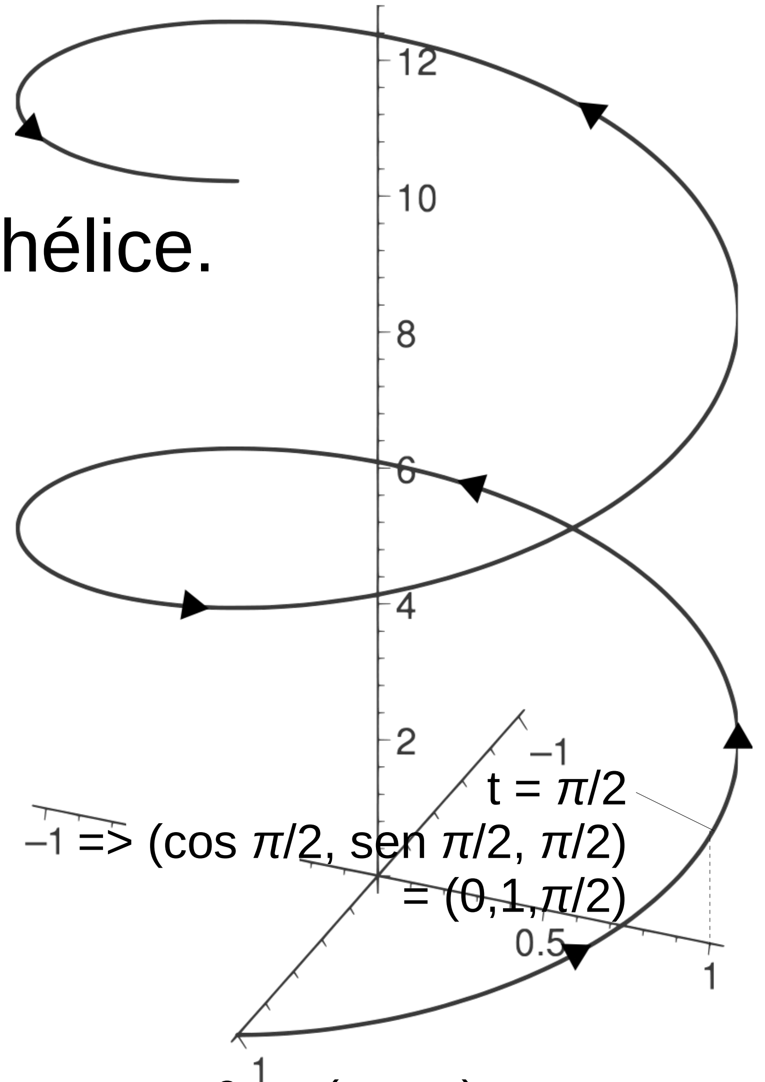
Exemplo:

$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$

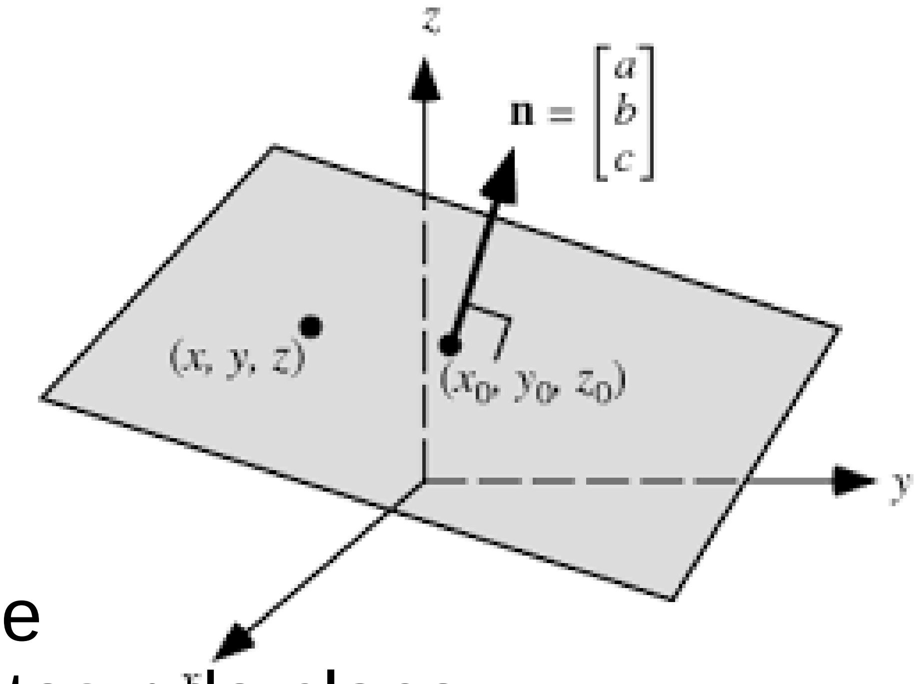
descreve uma curva helicoidal, ou hélice.

Comprimento:

$$L = \int_a^b \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 t + 1^2}\, dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}(b-a)$$



Planos



Um plano pode ser caracterizado por um ponto $\mathbf{r}_0$ e o vetor normal **n** a ele.

Já que **n** é perpendicular a todas as retas do plano, vale $\mathbf{n} \perp (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ para todos os pontos **r** do plano.

=> $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = 0$, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0$, chamadas equações vetoriais do plano.

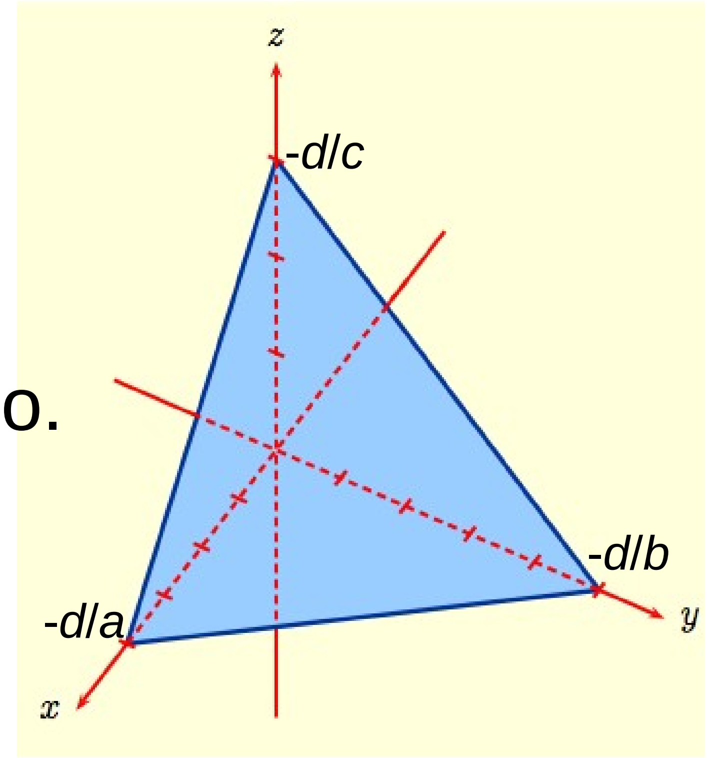
Com $\mathbf{n} = (a, b, c)$ podemos escrever este produto:
$(a, b, c)\cdot(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$ ou
$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, que é a equação escalar do plano.

Planos

Definindo $d := -(ax_0 + by_0 + cz_0)$ podemos reescrever esta última:

$ax + by + cz + d = 0,$

a equação linear em x, y e z do plano.



É fácil de ver, que o plano faz inter-seção com o eixo x em $x = -d/a$,
com o eixo y em $y = -d/b$
e com o eixo z em $z = -d/c$.

Além disso, a distância do plano até a origem é
$D = |d|/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$,
e até um ponto qualquer (x_1, y_1, z_1),
$D = |ax_1+by_1+cz_1-d|/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Cilindros

São superfícies constituídos de todas as retas (chamadas geratrizes) que são paralelas a uma reta dada e que passam por uma curva plana.

Se esta reta é (paralela a) um dos eixos x, y ou z, então, o fato de um ponto fazer parte do cilindro ou não não depende do valor daquela coordenada, e ela não aparece na equação que descreve o cilindro.

Cilindros

Exemplo: $z = x^2$

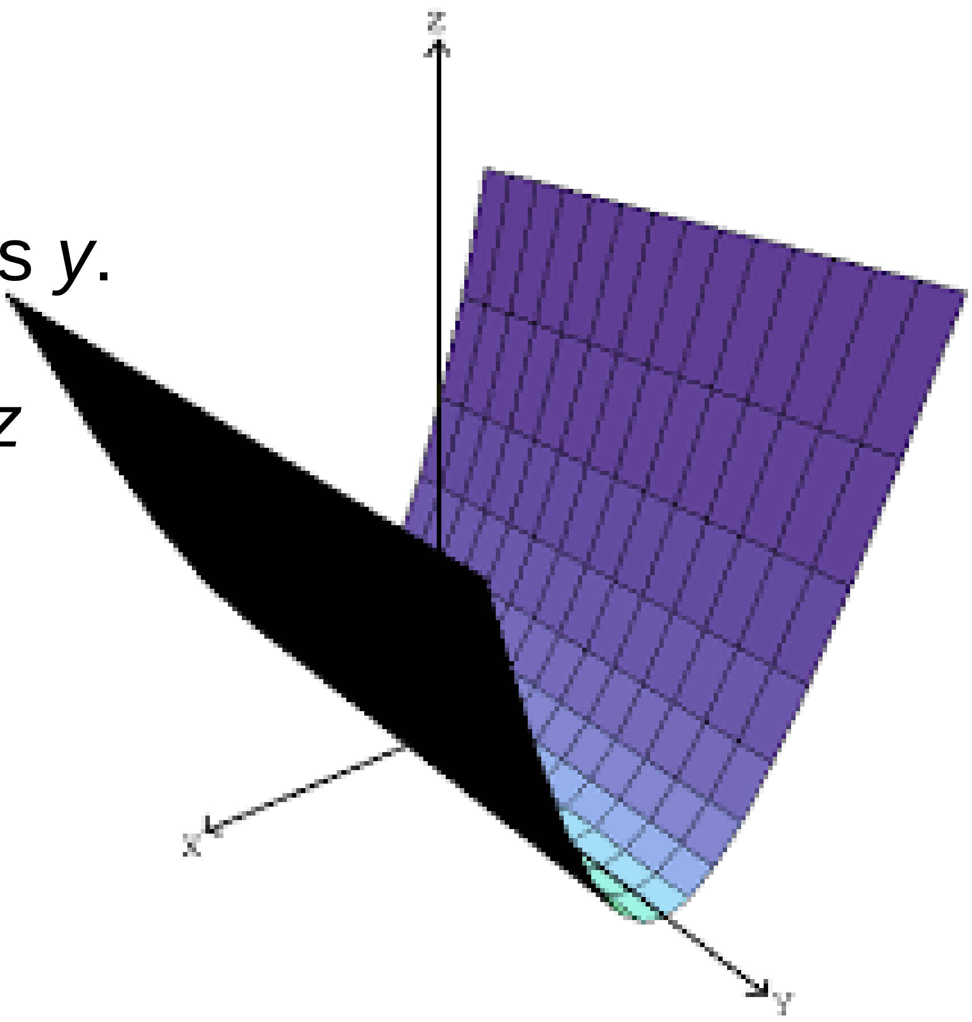
Cilindros

Exemplo: $z = x^2$

y não aparece na equação
=> geratrizes na direção dos *y*.

A interseção com o plano *xz*
é justamente a parábola
$z = x^2$.

=> cilindro parabólico



Cilindros

$x^2 + y^2 = 9$

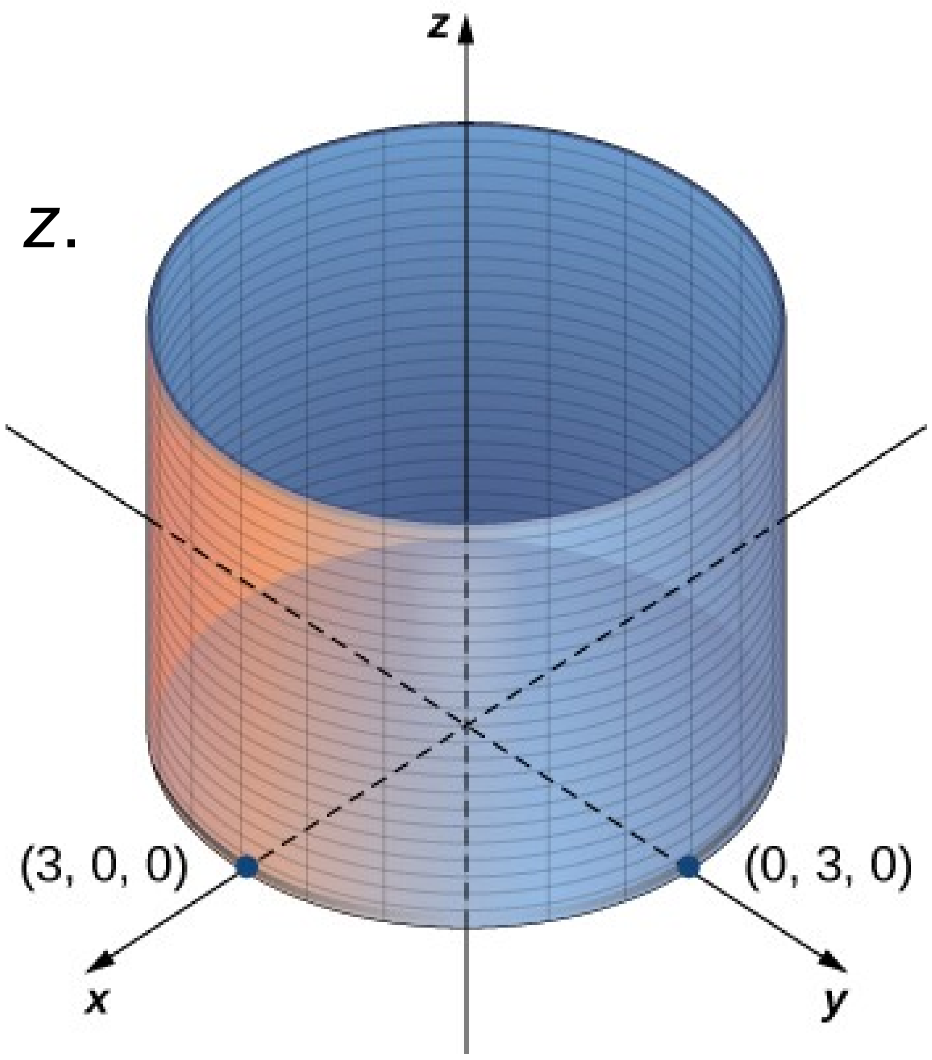
Cilindros

$x^2 + y^2 = 9$

z não aparece na equação
=> geratrizes na direção dos z.

Interseção com o plano xy
é o círculo $x^2 + y^2 = 9$.

=> cilindro circular.



Superfícies Quádricas

Gráficos de equações de 2º grau em x, y e z.

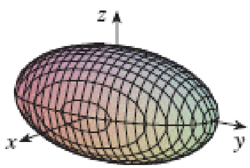
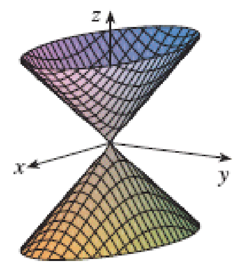
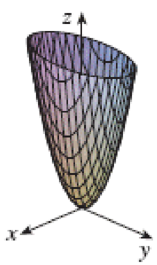
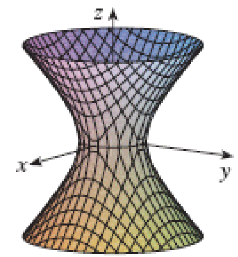
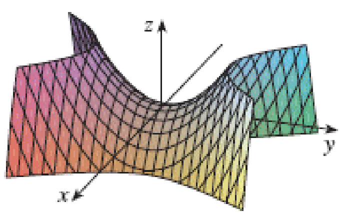
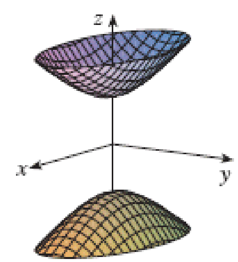
Forma mais geral:
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Por rotação e translação do sistema de coordenadas, dá para colocar uma equação deste tipo em uma das duas formas:
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0$$
ou
$$Ax^2 + By^2 + Iz = 0$$

Pare se ter uma idea da aparência de uma superfície destas, pode se olhar para interseções (curvas) com planos paralelos aos planos xy, yz e zx, tratando z, x ou y, respectivamente, como constante.

Superfícies Quádricas

Graphs of quadric surfaces

Surface	Equation	Surface	Equation
Ellipsoid 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ All traces are ellipses. If $a=b=c$, the ellipsoid is a sphere.	Cone 	$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces in the planes $x=k$ and $y=k$ are hyperbolas if $k\neq 0$ but are pairs of lines if $k=0$.
Elliptic Paraboloid 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces are parabolas. The variable raised to the first power indicates the axis of the paraboloid.	Hyperboloid of One Sheet 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces are hyperbolas. The axis of symmetry corresponds to the variable whose coefficient is negative.
Hyperbolic Paraboloid 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are hyperbolas. Vertical traces are parabolas. The case where $c<0$ is illustrated.	Hyperboloid of Two Sheets 	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Horizontal traces in $z=k$ are ellipses if $k>c$ or $k<-c$. Vertical traces are hyperbolas. The two minus signs indicate two sheets.

Funções de Várias Variáveis

FIM PRA HOJE