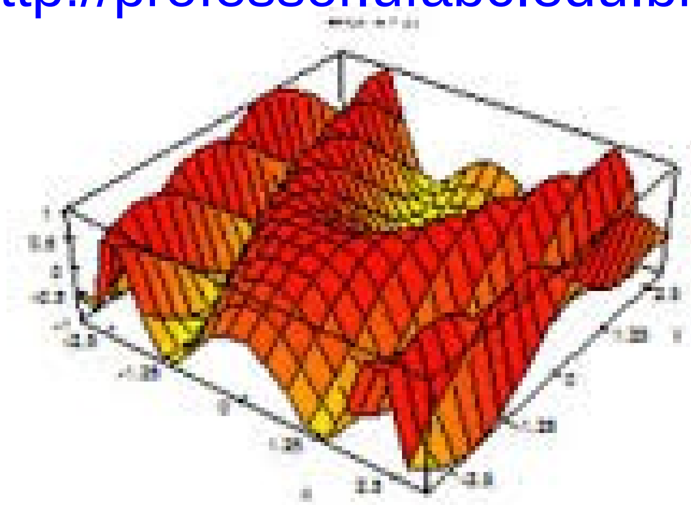
Funções de Várias Variáveis

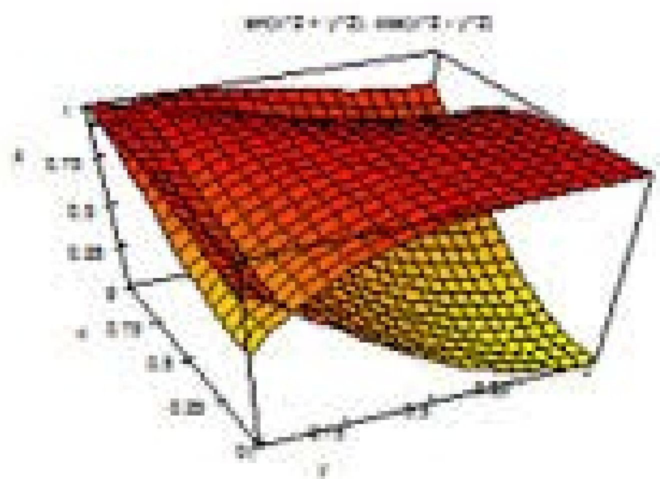
Universidade Federal do ABC

2. Funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, Gráfico, Conjunto de nível (curva e superfície)

Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

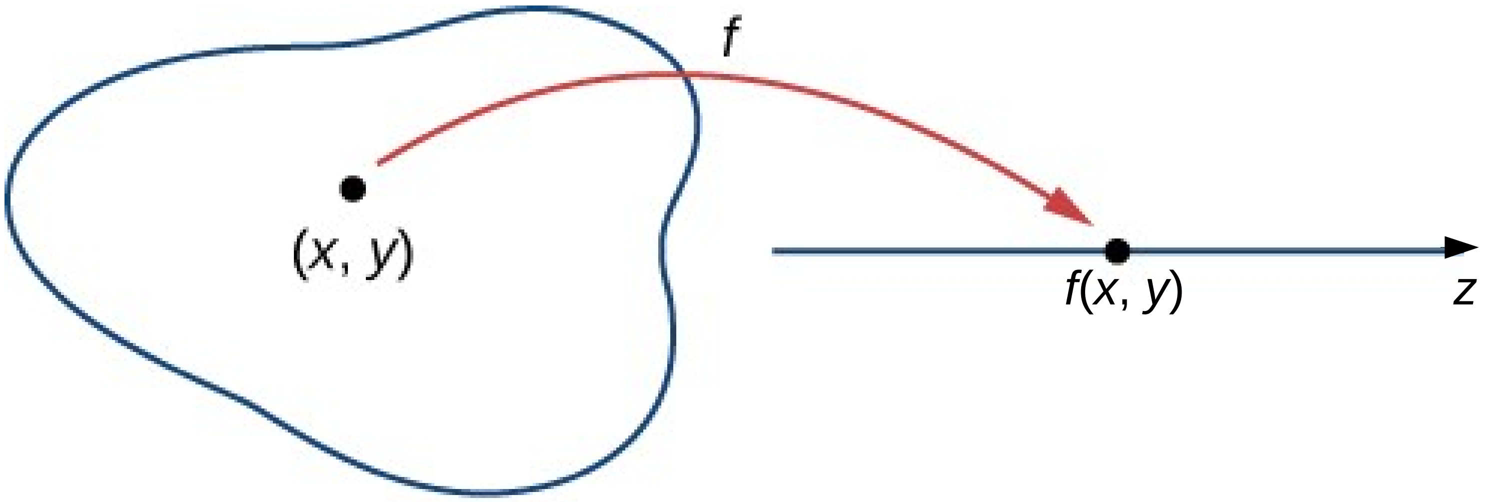
http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/FVV.html





Funções de Duas Variáveis

Uma função f de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ um único valor real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o domínio de f e sua imagem é o conjunto de valores possíveis de f, ou seja, $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.



Funções de Duas Variáveis

Exemplos (quadro):

Para cada uma das seguintes funções, calcule $f(3, 2)$ e encontre o domínio:

a) $f(x, y) = \sqrt{x+y+1}/(x-1)$

b) $f(x, y) = x \ln(y^2-x)$

Determine o domínio e a imagem de $g(x, y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$

Maneira de Representar uma Função de duas Variáveis: Numericamente

(Por uma tabela de valores)

Exemplo: Índice de sensação térmica *W* (em °C) em função da temperatura *T* (em °C) e da velocidade do vento, *v* (em km/h), *W*(*T*, *v*) (compilado pelo Serviço Nacional de Meteorologia dos EUA e pelo Serviço Meteorológica do Canadá)

Exemplo:
W(-5, 50) = -15

T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

Maneira de Representar uma Função de duas Variáveis: Explicitamente

Charles Cobb e Paul Douglas fizeram uma tabela similar (não mostrada aqui, vide o livro) para estudar, como a produção total da economia norte-americana, P, dependia da quantidade de trabalho, L, e da quantidade do capital investido, K, nos anos 1899 a 1922.

Para desenvolver um modelo para prever a produção para outros anos, fizeram um ajuste da forma $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ aos dados da tabela e chegaram na função de produção de Cobb-Douglas:

$$P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$$

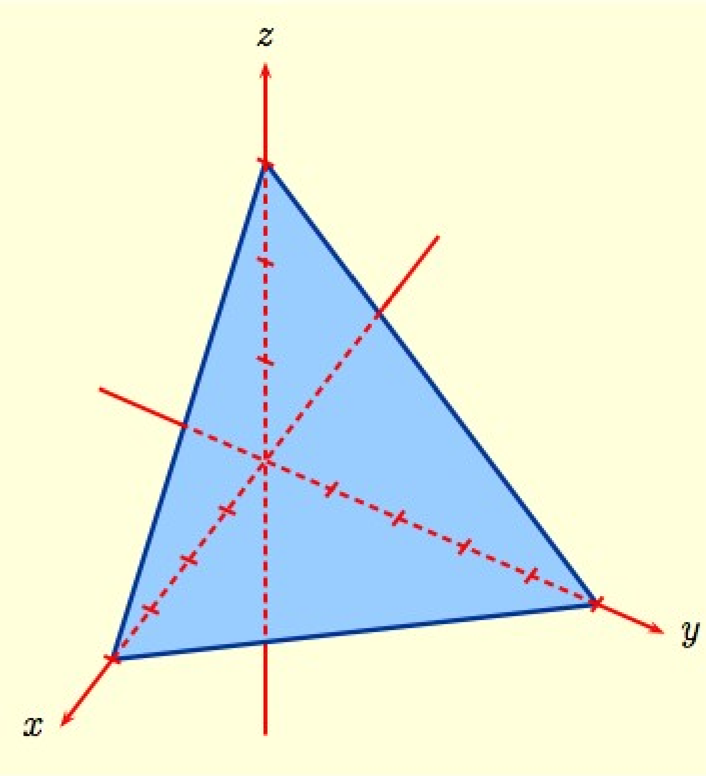
(P, L e K dadas em unidades de % dos valores em 1899)

Maneira de Representar uma Função de duas Variáveis: Explicitamente

Já encontramos várias funções que podem ser representadas explicitamente por fórmulas do tipo $z = f(x, y)$, i. e., os planos, cilindros e superfícies quádricos da aula anterior.
É só explicitar o z (ou o x ou o y) e chamá-lo de $f(x, y)$ (ou $f(y, z)$ ou $f(x, z)$).

Para planos obtemos funções lineares em x e y, $f = ax + by + c$.

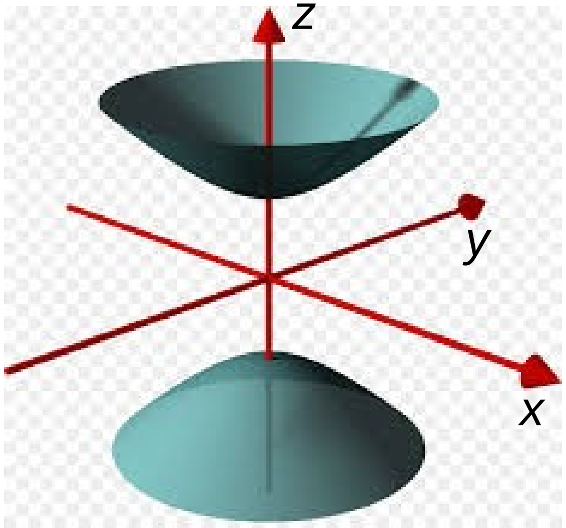
Exemplo: $f(x, y) = 3 - 0.75x - 0.6y$



Maneira de Representar uma Função de duas Variáveis: Explicitamente

Já encontramos várias funções que podem ser representadas explicitamente por fórmulas do tipo $z = f(x, y)$, i. e., os planos, cilindros e superfícies quádricos da aula anterior.

É só explicitar o z (ou o x ou o y) e chamá-lo de $f(x, y)$ (ou $f(y, z)$ ou $f(x, z)$).



! Alguns dos cilindros/superfícies quádricos não são funções, já que não têm valores unívocos.

Exemplo: hiperboloide de duas folhas

$-x^2/a^2 - y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$

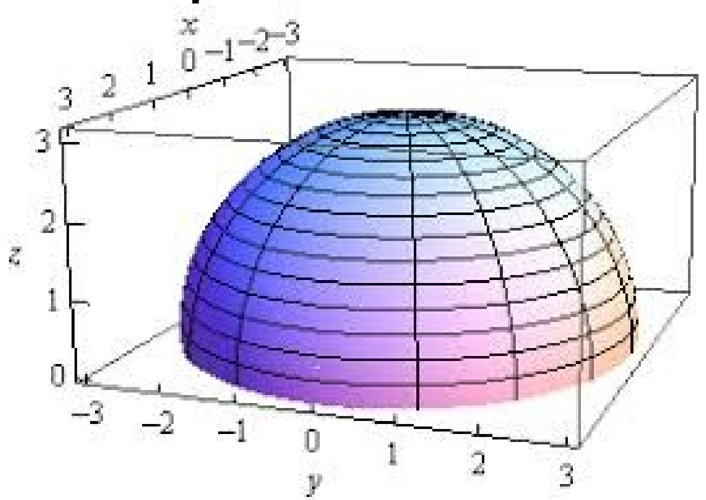
$\Rightarrow z = \pm\sqrt{1 + x^2/a^2 + y^2/b^2} \cdot c$

=> Dois valores de z para cada ponto (x, y) do domínio.

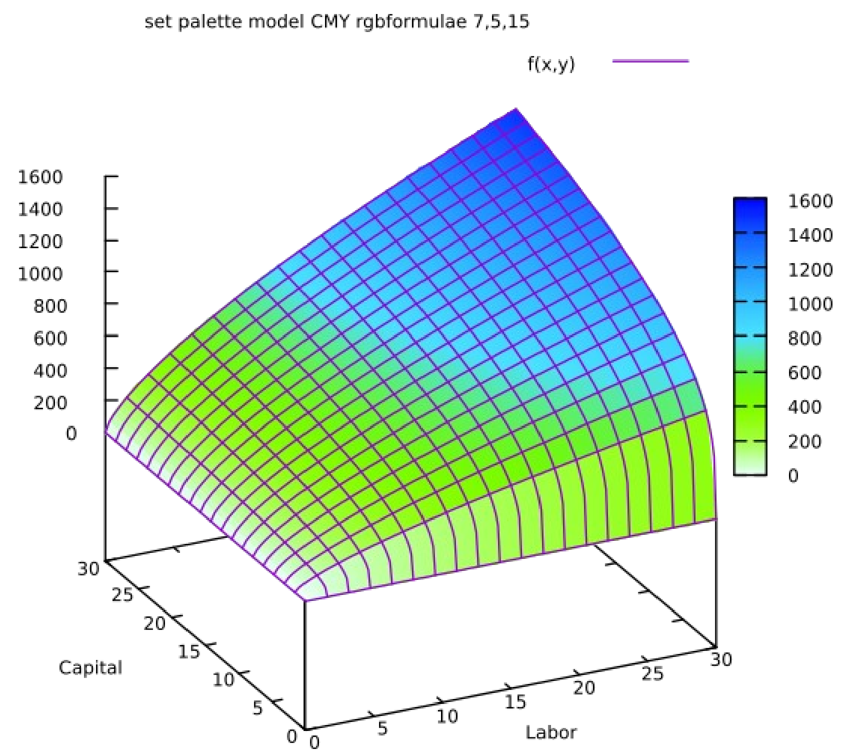
Maneira de Representar uma Função de duas Variáveis: Por Gráfico

O que nos leva a uma terceira representação: Uma função do tipo $z = f(x, y)$ pode ser representado por um desenho 3D da superfície composta dos pontos que satisfazem $z = f(x, y)$, similar ao desenho de uma curva representando $y = f(x)$.

Exemplos:



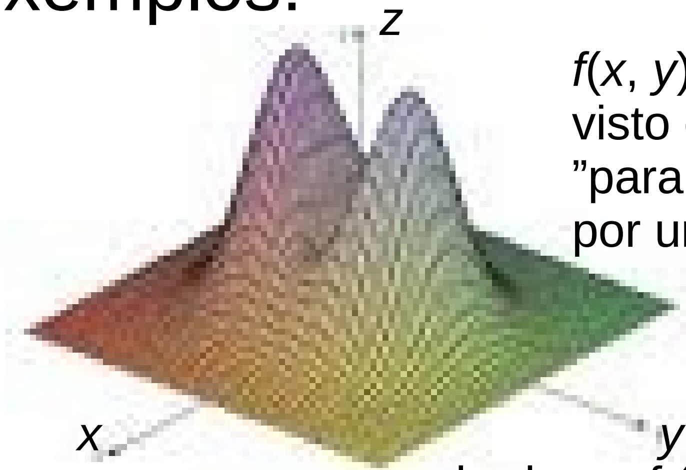
$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
parte superior da esfera
$x^2 + y^2 + z^2 = 9$



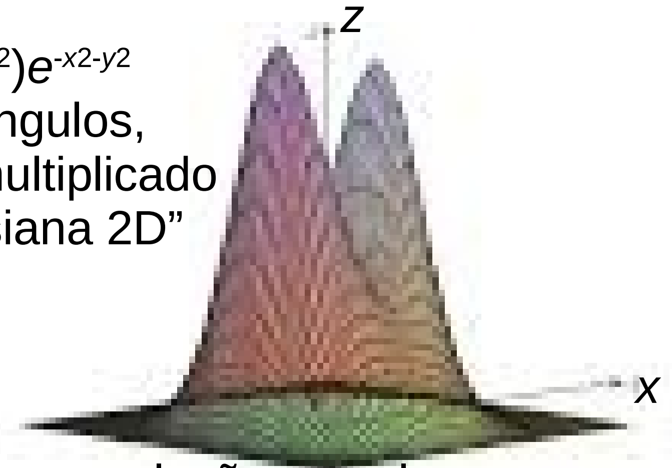
função de produção de Cobb-Douglas,
$P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$

Maneira de Representar uma Função de duas Variáveis: Por Gráfico

Mais exemplos:

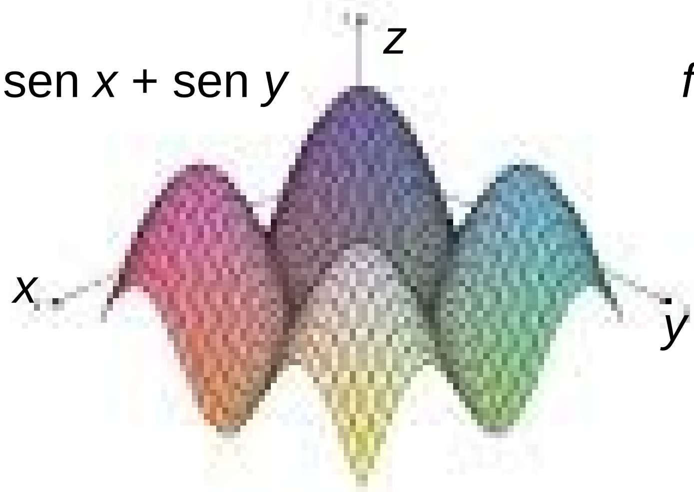


$f(x, y) = (x^2+3y^2)e^{-x2-y2}$
visto de dois ângulos,
"paraboloide multiplicado por uma gaussiana 2D"

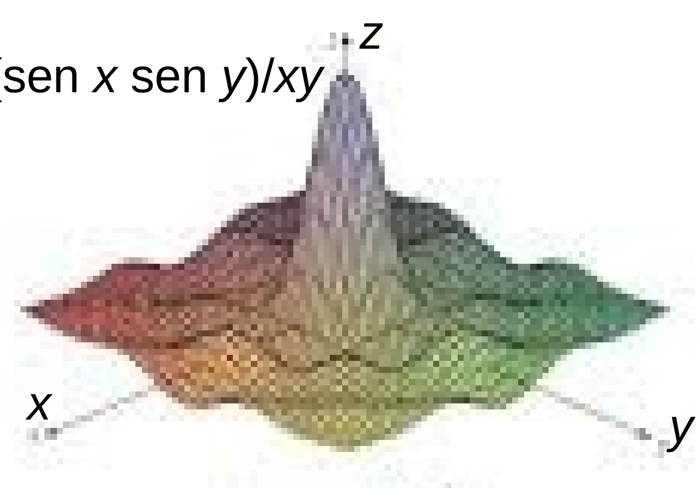


x e y aparecem apenas em quadrado => f é simétrica em relação aos planos yz e xz, e tende a zero longe da origem por causa do termo $\exp(-(x^2+y^2))$

$f(x, y) =$ sen x + sen y



$f(x, y) =$ (sen x sen y)/xy



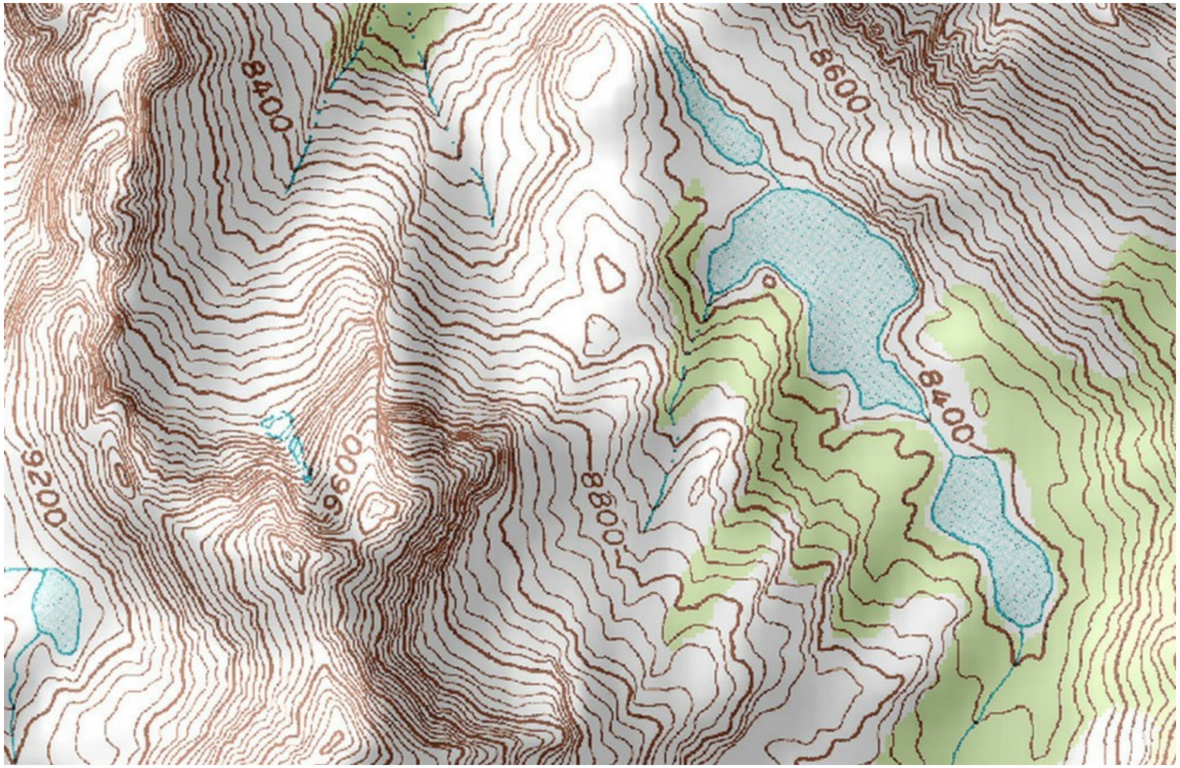
Maneira de Representar uma Função de duas Variáveis: Por Curvas de Nível

Definição: As curvas de nível ou de contorno de uma função f de duas variáveis são aquelas com equação $f(x, y) = k$, onde k é uma constante (na imagem de f).

Um desenho do domínio da função com curvas de nível é chamado mapa de contorno.

Maneira de Representar uma Função de duas Variáveis: Por Curvas de Nível

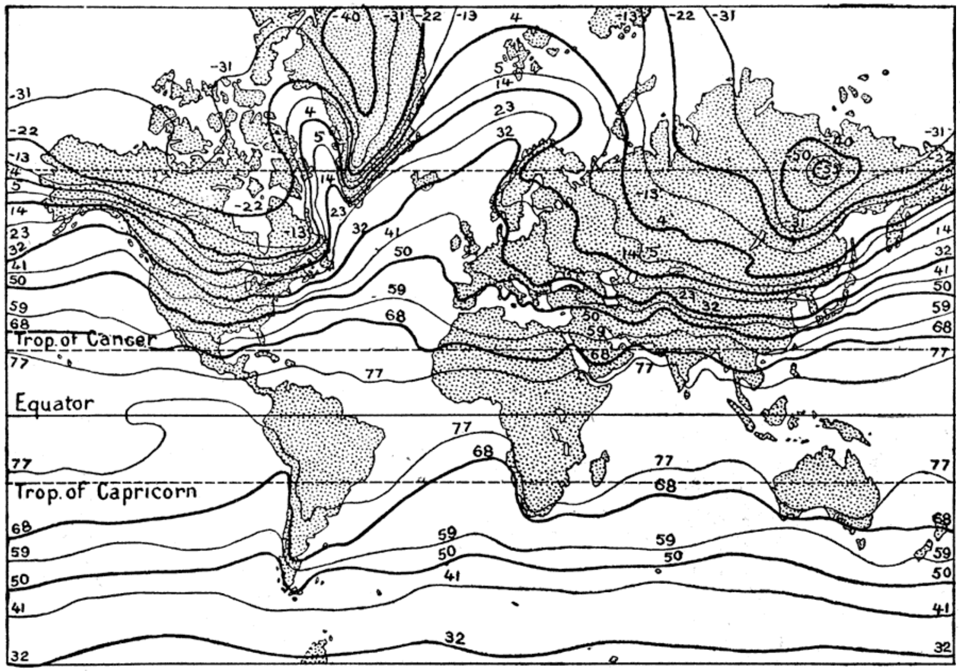
Bastante usada em mapas topográficas. x e y são as coordenadas horizontais, e a função, $h(x, y)$, a altitude do chão na posição (x, y), normalmente medida em metros acima do nível do mar.



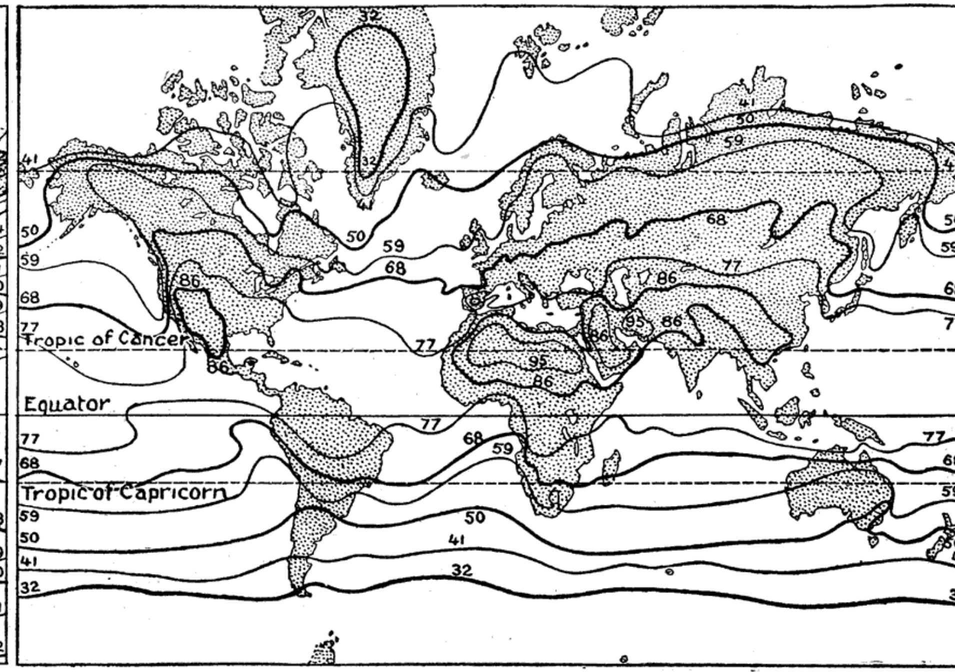
Onde as linhas de altitude estão próximas uma à outra, a inclinação da paisagem é grande.

Maneira de Representar uma Função de duas Variáveis: Por Curvas de Nível

Exemplo: Curvas isotérmicas em 1914 (°F).



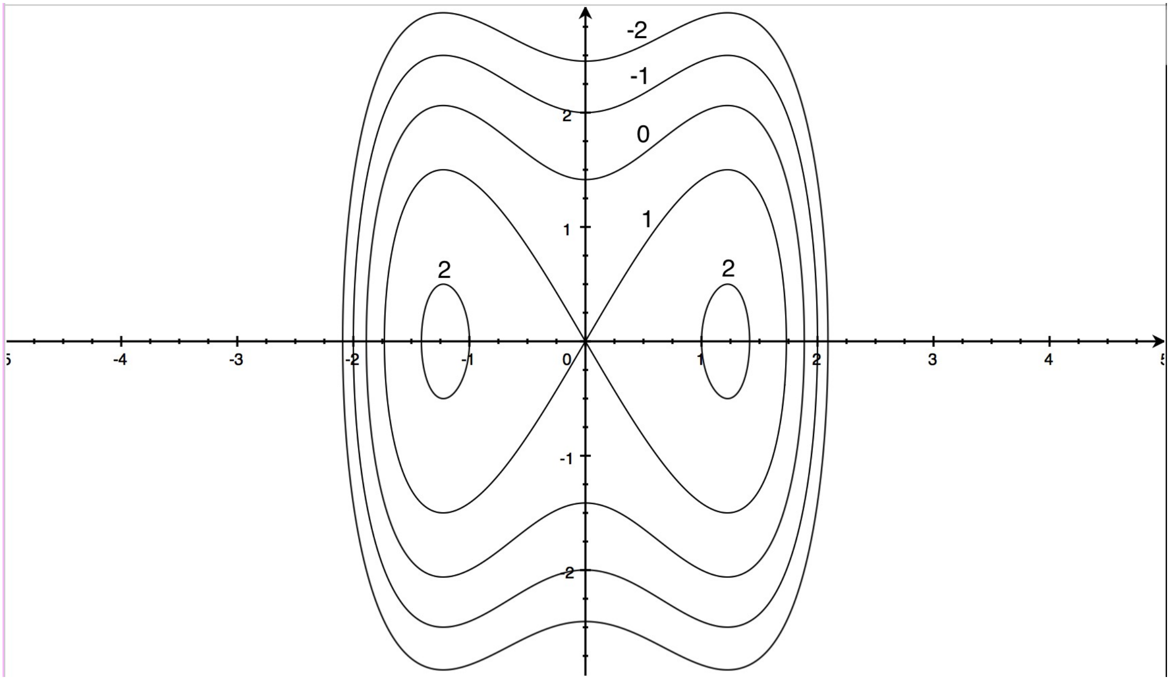
janeiro



julho

Maneira de Representar uma Função de duas Variáveis: Por Curvas de Nível

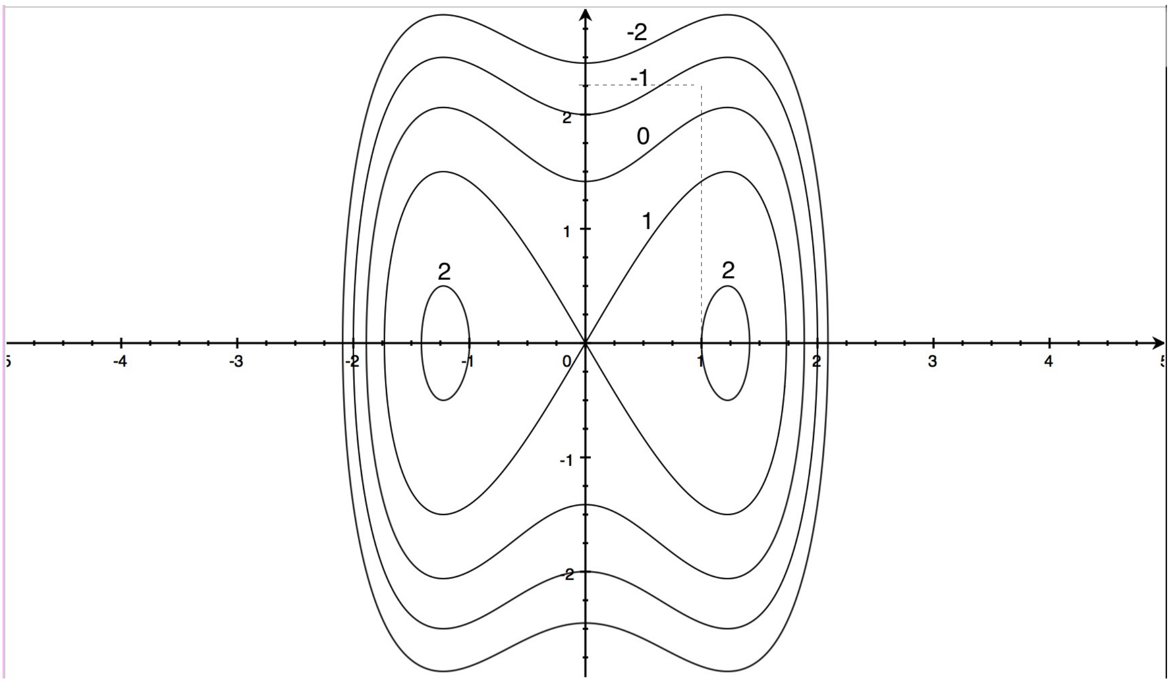
Exemplos: Estime o valor da função $f(x, y)$ representada por este mapa de contorno para $(x, y) = (1, 2.25)$.



Maneira de Representar uma Função de duas Variáveis: Por Curvas de Nível

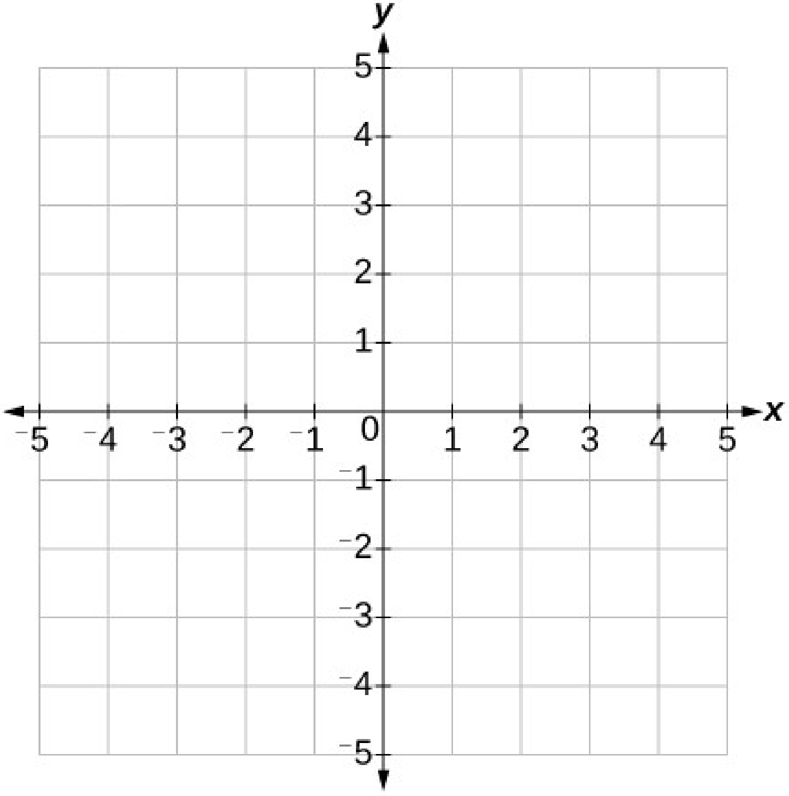
Estime o valor da função $f(x, y)$ representada por este mapa de contorno para $(x, y) = (1, 2.25)$.

$f(1, 2.25) \approx -0.7$



Maneira de Representar uma Função de duas Variáveis: Por Curvas de Nível

Esboce as curvas de nível
da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$
para os valores $k = -6, 0, 6, 12$

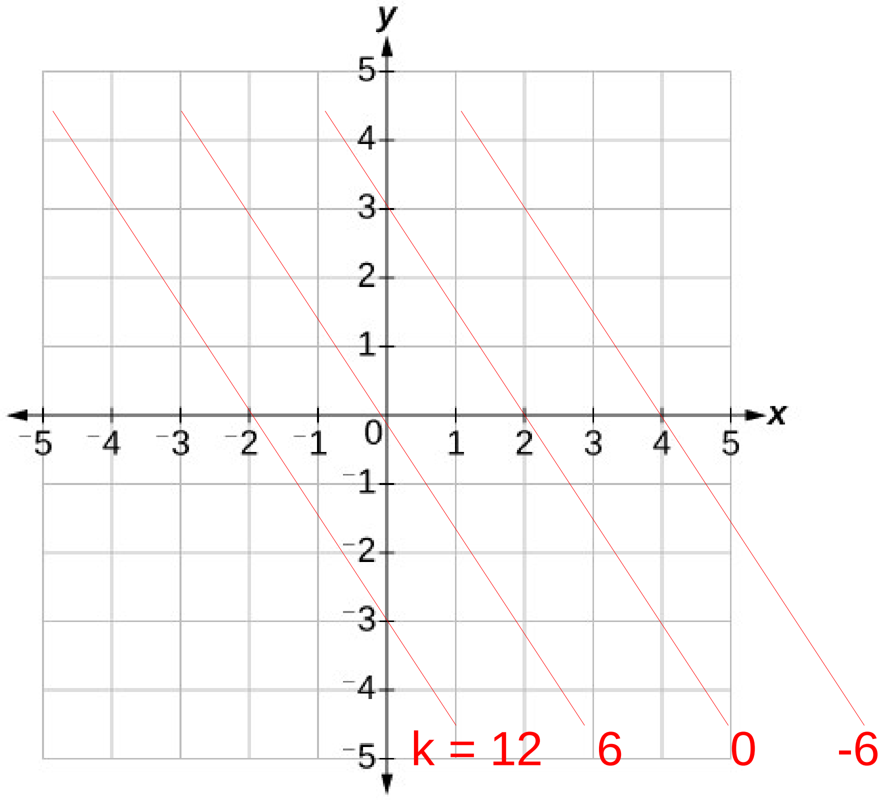


Maneira de Representar uma Função de duas Variáveis: Por Curvas de Nível

Esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para os valores $k = -6, 0, 6, 12$

$\Rightarrow y = -3x/2 + (6-k)/2$

As curvas de nível de um plano são retas paralelas e equidistantes (se os valores de k são equidistantes).

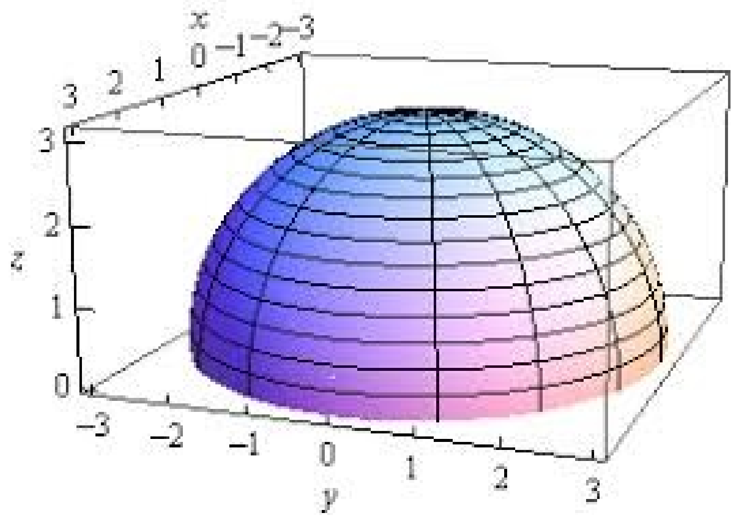


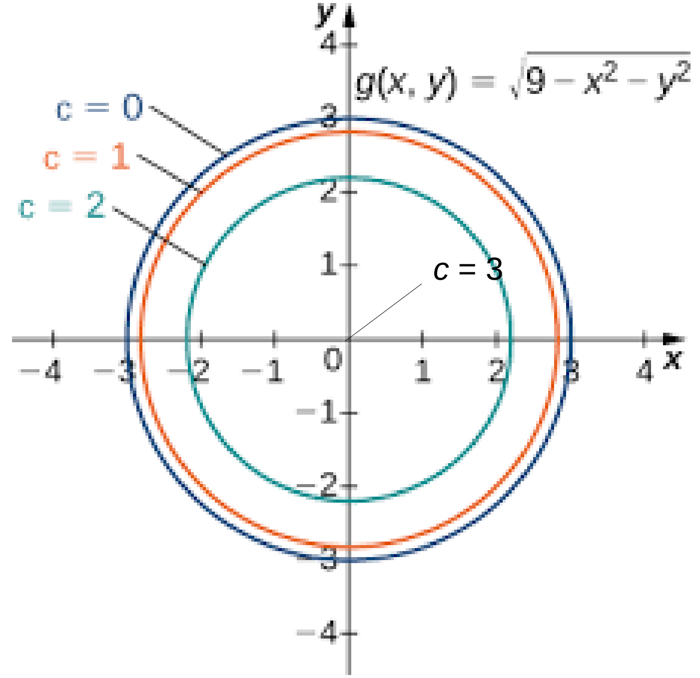
Maneira de Representar uma Função de duas Variáveis: Por Curvas de Nível

Esboce as curvas de nível
da função $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
para os valores $c = 0, 1, 2, 3$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 9 - c^2$

círculos concêntricos
com raios $\sqrt{9 - c^2}$

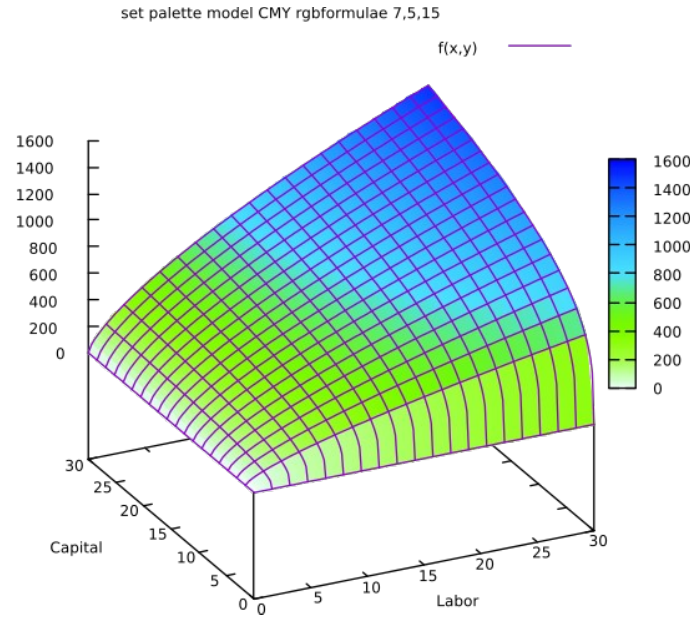


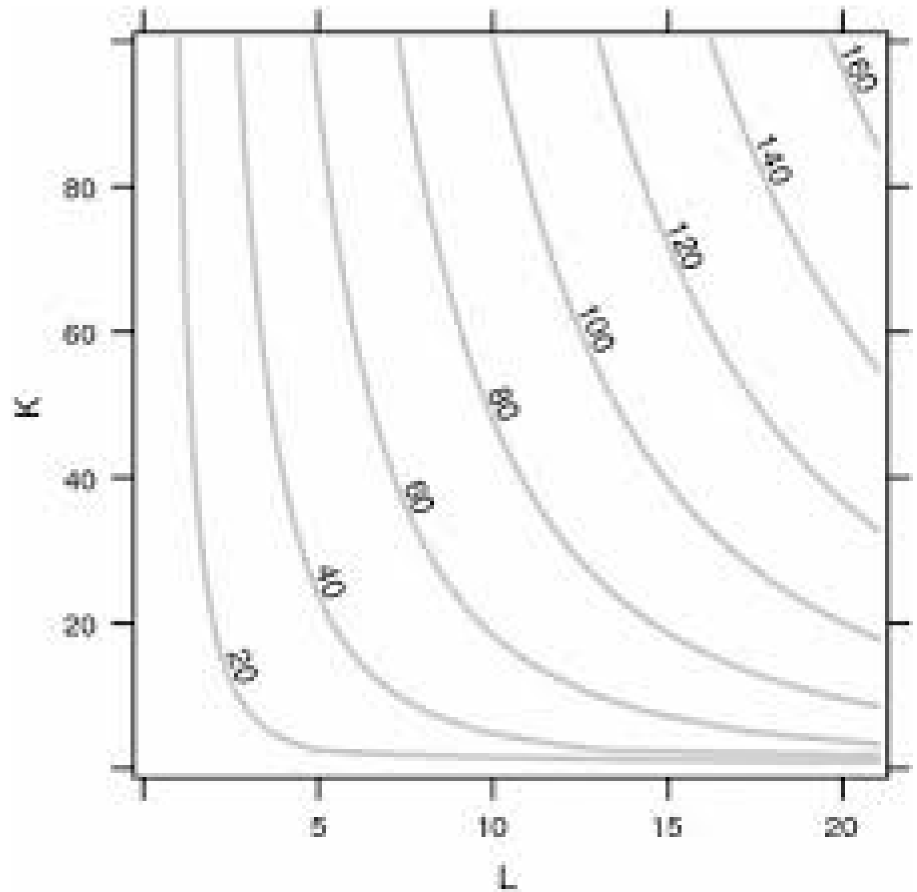


Maneira de Representar uma Função de duas Variáveis: Por Curvas de Nível

Esboce as curvas de nível
da função de produção
de Cobb-Douglas
para vários valores de *P*

$P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$
$\Rightarrow K = (P/1.01)^4L^{-3}$





Funções com 3 Variáveis

Uma função com três variáveis, f, é uma regra que associa a cada tripla ordenada de números reais (x, y, z) em um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ um único número real, denotado por $f(x, y, z)$.

Funções com 3 Variáveis

Exemplo: Determine o domínio de

$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \operatorname{sen} z$

Funções com 3 Variáveis

Exemplo: Determine o domínio de

$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \text{ sen } z$

Resolução:

Os fatores xy e sen z não causam restrições para o domínio (eles têm valores válidos para todos os possíveis valores de x, y e z)

O fator $\ln(z - y)$ limita o domínio à região

$z - y > 0 \Rightarrow z > y$,

que é o semiespaço acima do plano $z = y$.

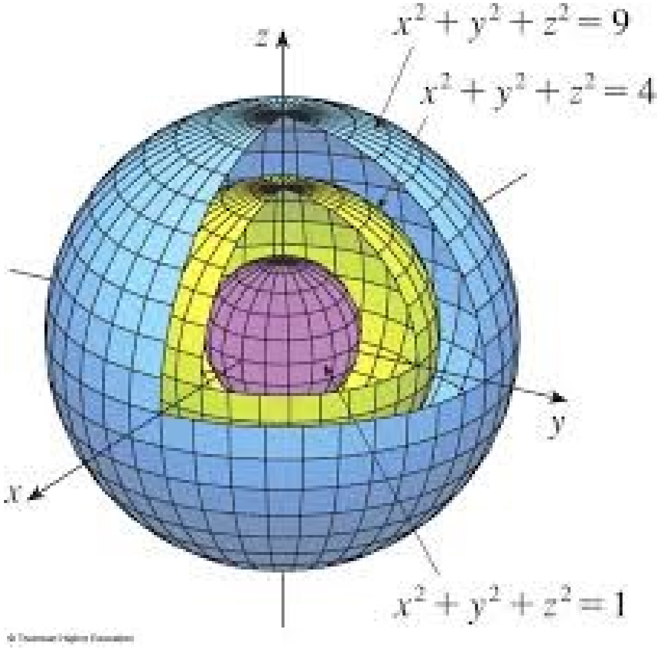
Funções com 3 Variáveis

Como representar uma função de 3 variáveis?

Uma tabela seria uma possibilidade, i.e. as primeiras três colunas contendo valores de x, y e z.

Um gráfico é difícil (seria uma “superfície” 3D no espaço 4D)

Às vezes funciona com superfícies de nível, o análogo às curvas de nível com uma dimensão a mais.



Exemplo: As superfícies de nível da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Funções com *n* Variáveis

Uma função com *n* variáveis é uma regra que associa um número real $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ à n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de números reais.
Denotamos por $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todas as n-uplas.

Às vezes, usamos a notação vetorial para tratar destas.

Exemplo: A função $f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ $(c_1, c_2, ..., c_n$ sendo constantes) pode ser escrita como
$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\cdot\mathbf{x}$,
onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$,
$\cdot$ = produto escalar em V_n.
Isto também pode-se fazer para funções de 2 ou 3 variáveis.

Universidade Federal do ABC

Funções de Várias Variáveis

FIM PRA HOJE