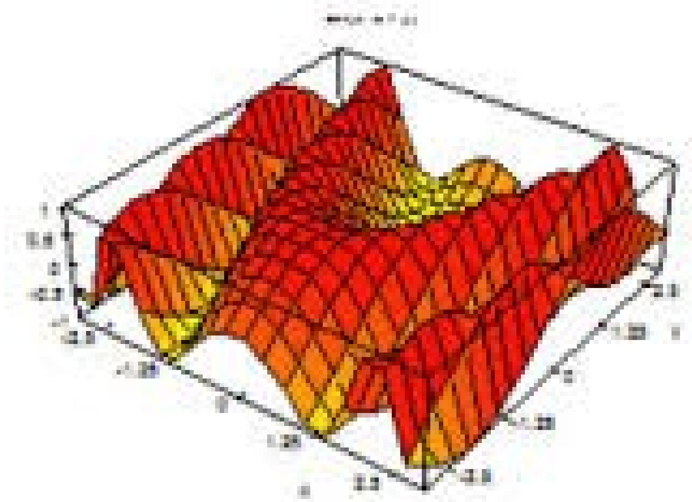
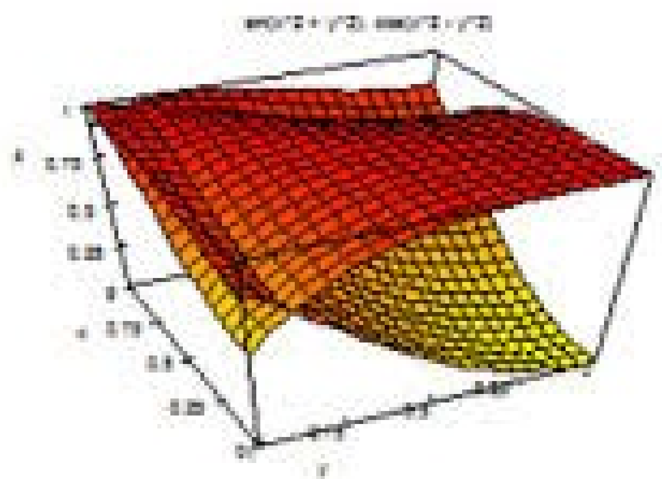
# Funções de Várias Variáveis

3. Noções topológicas, Limites

Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/FVV.html





# Conjuntos Abertos e Fechados

Igual como em FUV foi útil definir os conceitos de intervalo aberto e fechado (algumas propriedades e teoremas valiam para os abertos, mas não para os fechados, e vice-versa), temos que fazer a mesma coisa aqui, para conjuntos no espaço 2 (ou *n*)- dimensional.

intervalo aberto ($a$, $b$) (ou ]$a$, $b$[)
(não contém $a$ ou $b$)


intervalo fechado [$a$, $b$]
(contém $a$ e $b$)

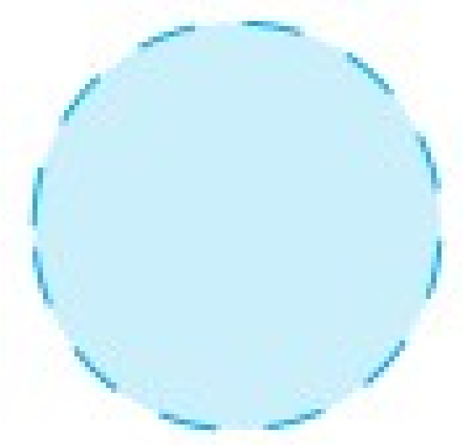
# Conjuntos Abertos e Fechados

Def. Uma bola aberta de centro ($a$, $b$) e raio $r$, $D_r(a, b)$, em $\mathbb{R}^2$ é definida por:

$D_r(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |(x, y)-(a, b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\}$

Neste caso (2D), a bola também é chamada disco aberto.

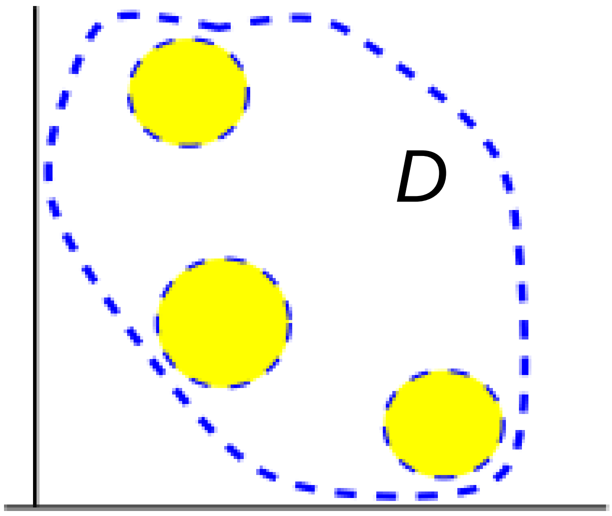
Se trata do interior do disco (sem a borda).



# Conjuntos Abertos e Fechados

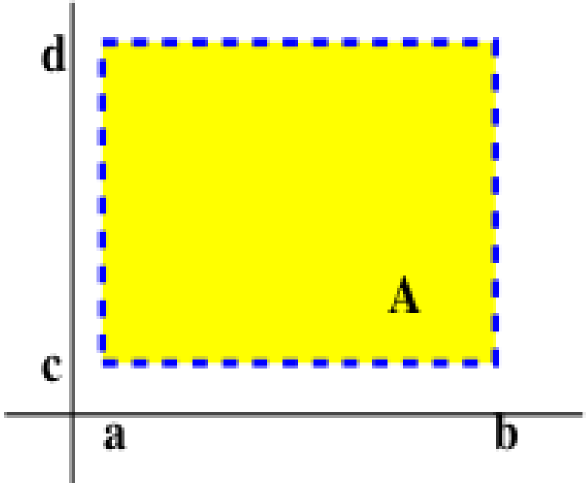
Def. conjunto aberto:

$D \subset \mathbb{R}^2$ é dito aberto em $\mathbb{R}^2$ se para todo ponto $(a, b) \in D$, existe uma bola aberta $D_r(a, b)$, tal que $D_r(a, b) \subset D$.




Exemplos:

- $A = (a, b) \times (c, d)$ (ou $]a, b[ \times ]c, d[$) é aberto em $\mathbb{R}^2$.



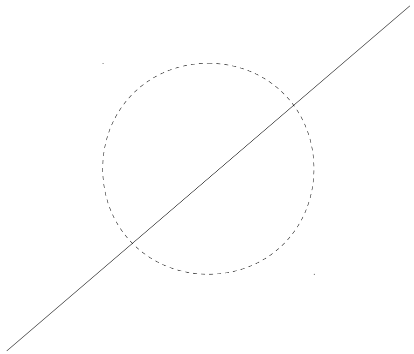

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ é aberto (mas $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$, não)

# Conjuntos Abertos e Fechados

Mais exemplos:

- O conjunto consistindo de um ponto, $\{(a, b)\}$, não é aberto em $\mathbb{R}^2$, pois toda bola ou disco aberto de centro $(a, b)$ não está contido em $\{(a, b)\}$.

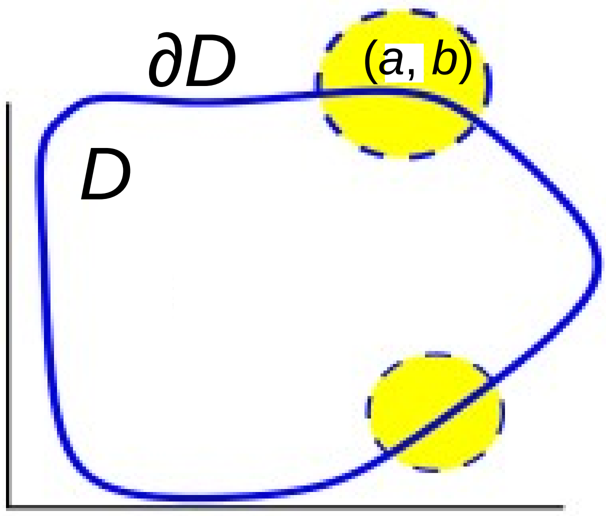
- Uma reta não é aberta em $\mathbb{R}^2$, pois qualquer disco aberto centrado num ponto da reta não está contido nela.



Para conjuntos abertos contendo um ponto $(a, b)$ demos o nome vizinhança do ponto $(a, b)$.

# Conjuntos Abertos e Fechados

Def. Um ponto de fronteira de um conjunto *D* em $\mathbb{R}^2$ é um ponto (*a*, *b*) tal que qualquer bola aberta com centro em (*a*, *b*) contém pontos de *D* e pontos não pertencentes a *D*. Denotamos o conjunto dos pontos da fronteira do conjunto *D* por $\partial D$.



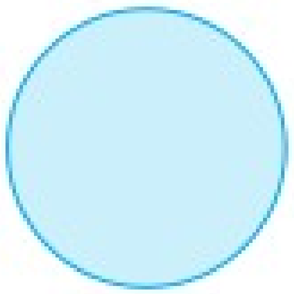

Isto leva a outra maneira de definir conjunto aberto:
Um conjunto aberto *D* de $\mathbb{R}^2$ contém nenhum dos seus pontos de fronteira,
já que para estes não existe nenhuma bola aberta $D_r(a, b)$, tal que $D_r(a, b) \subset D$.

# Conjuntos Abertos e Fechados

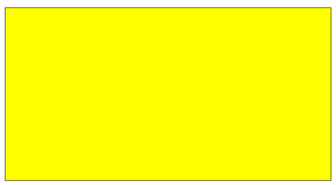
Um conjunto fechado de $\mathbb{R}^2$ contém todos os seus pontos de fronteira, $\partial D \subset D$.

Exemplos:

- A bola fechada de centro ($a$, $b$) e raio $r$,
$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |(x, y)-(a, b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \le r\}$

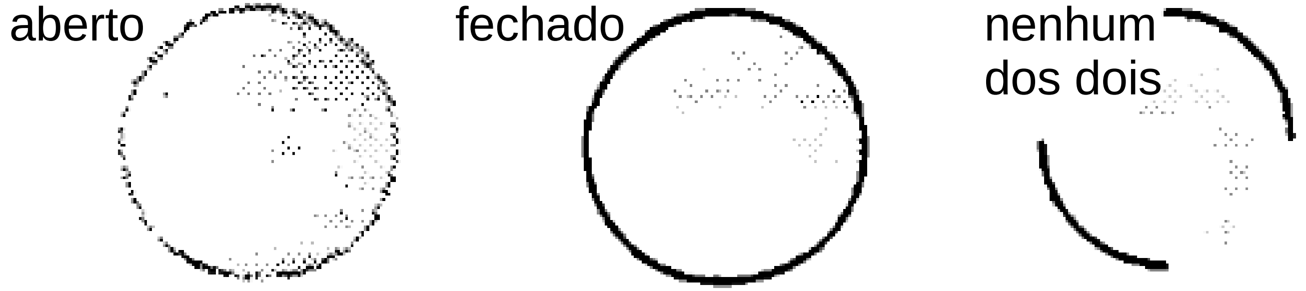


- O retangulo $[a, b] \times [c, d]$



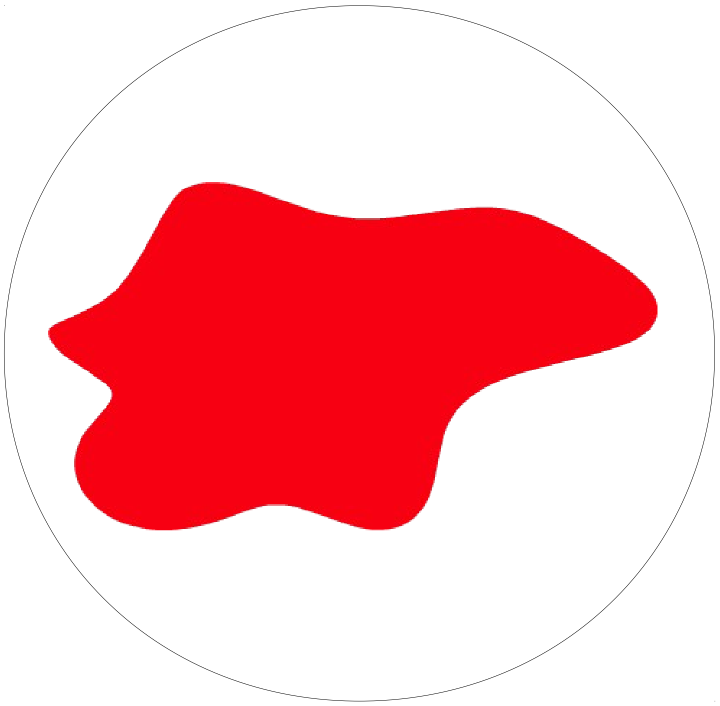
- O espaço inteiro, $\mathbb{R}^2$, é ao mesmo tempo aberto e fechado.

Resumo:



# Conjuntos Abertos e Fechados

Um conjunto limitado em $\mathbb{R}^2$ é aquele que está contido em algum disco. Em palavras, ele é finito em extensão.



Todas as definições dos últimos slides são fáceis de estender para $\mathbb{R}^n$.

# Limites

Dando uma olhada no função $f(x, y) = \text{sen}(x^2+y^2)/(x^2+y^2)$

Aqui uma tabela de valores:

| $x$ \ $y$ | −1.0 | −0.5 | −0.2 | 0 | 0.2 | 0.5 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −1.0 | 0.455 | 0.759 | 0.829 | 0.841 | 0.829 | 0.759 | 0.455 |
| −0.5 | 0.759 | 0.959 | 0.986 | 0.990 | 0.986 | 0.959 | 0.759 |
| −0.2 | 0.829 | 0.986 | 0.999 | 1.000 | 0.999 | 0.986 | 0.829 |
| 0 | 0.841 | 0.990 | 1.000 | | 1.000 | 0.990 | 0.841 |
| 0.2 | 0.829 | 0.986 | 0.999 | 1.000 | 0.999 | 0.986 | 0.829 |
| 0.5 | 0.759 | 0.959 | 0.986 | 0.990 | 0.986 | 0.959 | 0.759 |
| 1.0 | 0.455 | 0.759 | 0.829 | 0.841 | 0.829 | 0.759 | 0.455 |

Em (0, 0) temos
$f(0, 0) = \text{sen } 0 / 0 = 0/0$
Indefinido.

Porém, olhando pra tabela, parece que aproximando-se a (0, 0) por qualquer caminho, $f$ tende a 1.

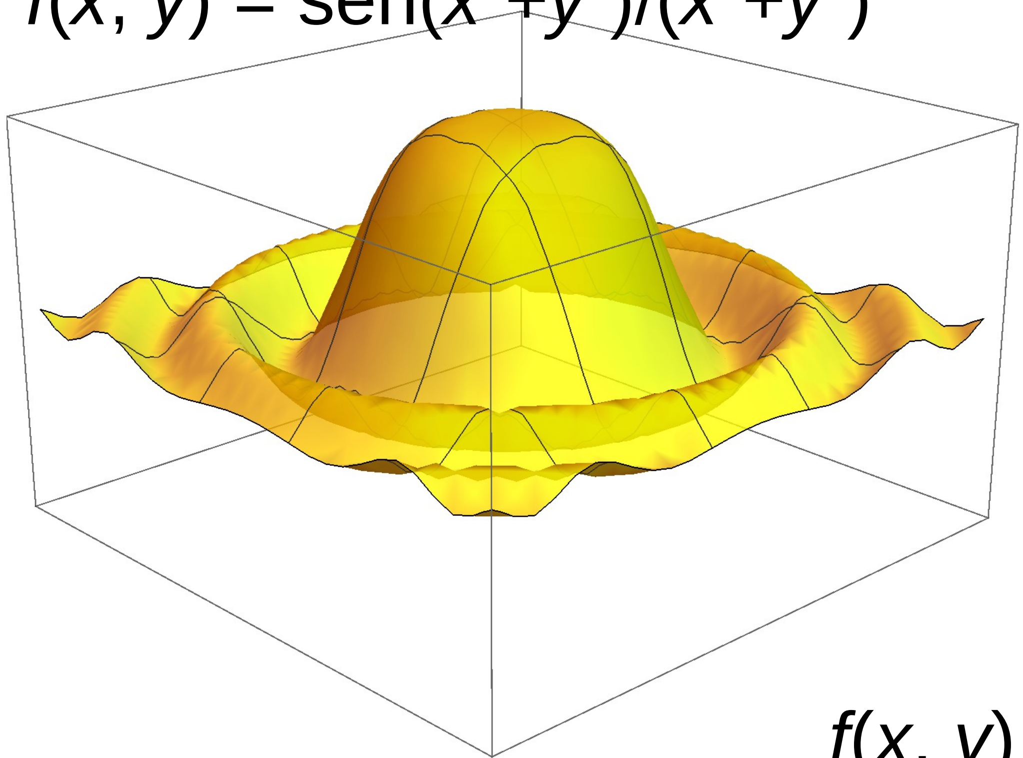
# Limites

Definindo $t = (x^2+y^2)$ vemos: $\lim_{x2+y2 \to 0} f(x, y) = \lim_{t \to 0} \text{sen } t/t = 1$

Podemos escrever $\lim_{(x, y) \to (0,0)} \text{sen}(x^2+y^2)/(x^2+y^2) = 1$

por qualquer caminho,
já que $x^2+y^2$ tendo a 0
para $(x, y) \to (0,0)$
por qualquer caminho

$f(x, y) = \text{sen}(x^2+y^2)/(x^2+y^2)$



notação:

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$$

ou

$$\lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f(x, y) = L$$

ou

$f(x, y) \to L$ quando $(x, y) \to (a, b)$

# Limites

2º exemplo: $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ em (0, 0)

Tabela de valores:

| $x \backslash y$ | −1.0 | −0.5 | −0.2 | 0 | 0.2 | 0.5 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −1.0 | 0.000 | 0.600 | 0.923 | 1.000 | 0.923 | 0.600 | 0.000 |
| −0.5 | −0.600 | 0.000 | 0.724 | 1.000 | 0.724 | 0.000 | −0.600 |
| −0.2 | −0.923 | −0.724 | 0.000 | 1.000 | 0.000 | −0.724 | −0.923 |
| 0 | −1.000 | −1.000 | −1.000 | | −1.000 | −1.000 | −1.000 |
| 0.2 | −0.923 | −0.724 | 0.000 | 1.000 | 0.000 | −0.724 | −0.923 |
| 0.5 | −0.600 | 0.000 | 0.724 | 1.000 | 0.724 | 0.000 | −0.600 |
| 1.0 | 0.000 | 0.600 | 0.923 | 1.000 | 0.923 | 0.600 | 0.000 |

De novo, $f(0, 0) = 0/0$ é indefinido, e desta vez, $f$ parece não convergir, isto é, convergir para valores diferentes dependendo do caminho, por aquele nos aproximamos de (0, 0).

# Limites

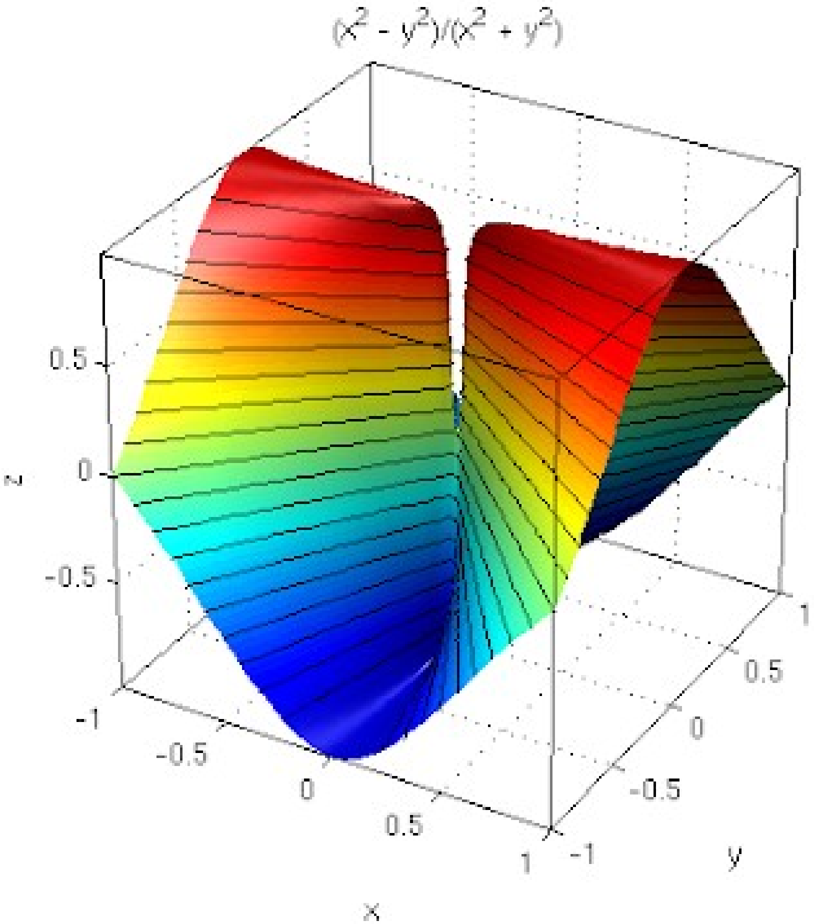
2º exemplo: $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ em (0, 0)

Cálculos dos limites vindo da direção dos *x* e dos *y*

(=> quadro)

e o gráfico da função

confirmam isto:

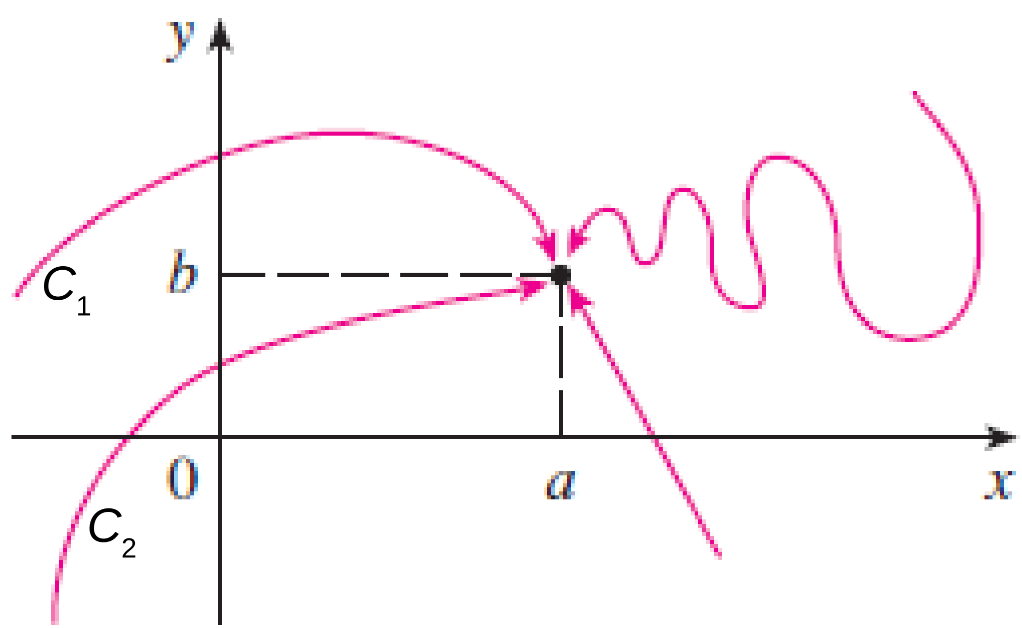



$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ não existe

# Limites

Assim podemos formular uma critério pra não-existência do limite:
Se $f(x, y) \to L_1$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho $C_1$ e $f(x, y) \to L_2$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho $C_2$, com $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ não existe.

Será, que podemos usar a condição oposta para definir a existência do limite?



# Limites

Hipótese:
Precisamos apenas conferir, se os limites aproximando-se na direção dos $x$ e na direção dos $y$ são iguais.

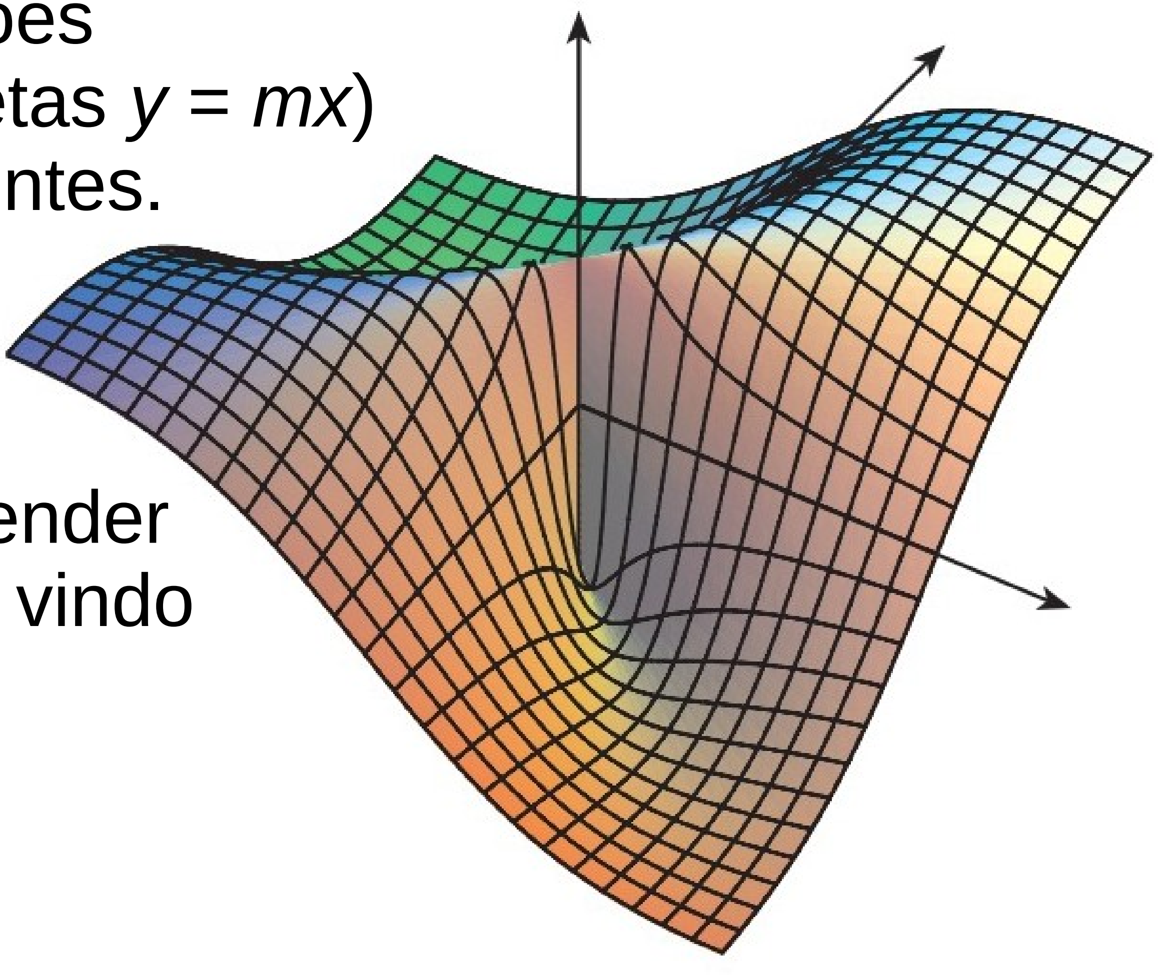
Exemplo: $f(x) = xy/(x^2 + y^2)$ em (0, 0)

Quadro:
Os limites vindo da direção dos $x$,
$\lim_{x \to 0, y=0} f(x, y) = \lim_{x \to 0} f(x, 0)$ e
vindo da direção dos $y$,
$\lim_{x=0, y \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} f(0, y)$
são iguais!

# Limites

Exemplo: $f(x) = xy/(x^2 + y^2)$ em (0, 0)

Mas, em outras direções (linhas seguindo as retas $y = mx$) obtemos limites diferentes. O gráfico da função mostra isto.



Talvez temos que estender a condição para retas vindo de todas as direções.

# Limites

Nova hipótese: Temos que conferir, se os limites aproximando-se de todas as direções $y = mx$ são iguais.

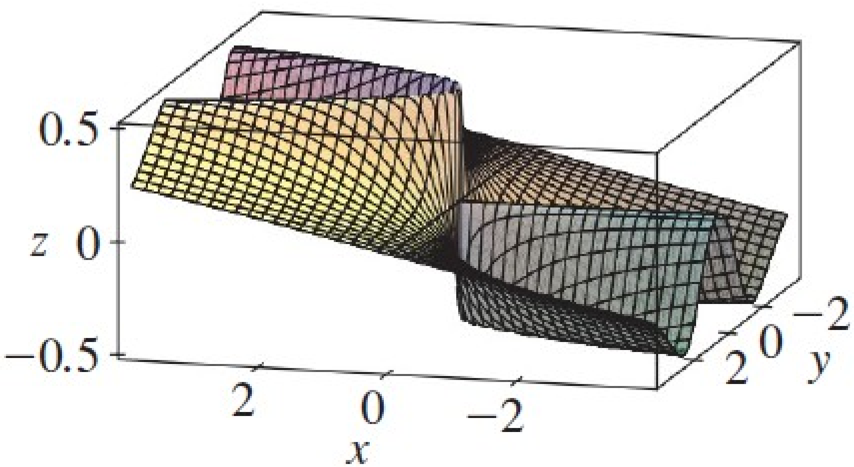
Exemplo: $f(x, y) = xy^2/(x^2 + y^4)$ em (0, 0)

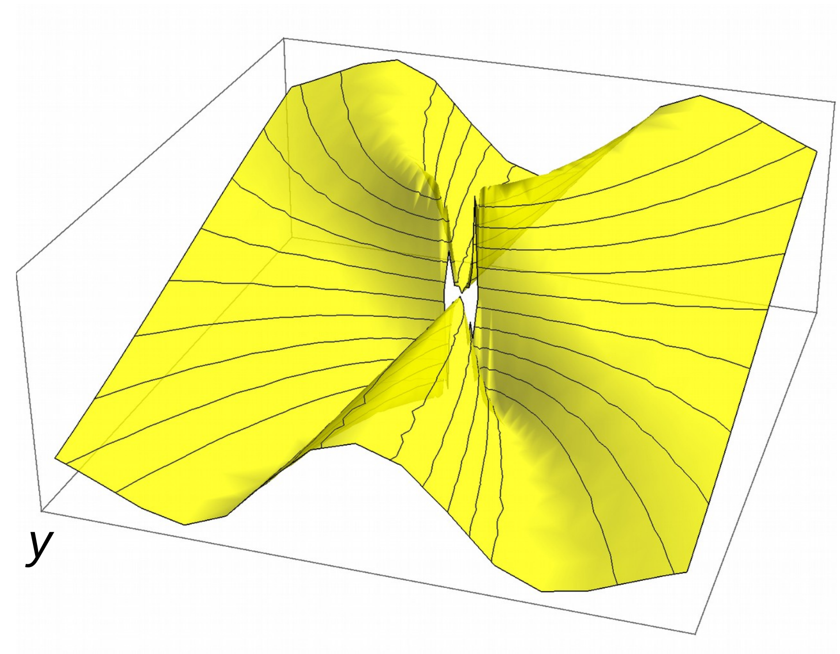
Quadro:
Os limites vindo de todas as direções,
$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = 0$
são iguais!

# Limites

Exemplo: $f(x, y) = xy^2/(x^2 + y^4)$ em $(0, 0)$

... mas (quadro) da direção $x = y^2$, $\lim_{y \to 0} f(y^2, y)$, não.



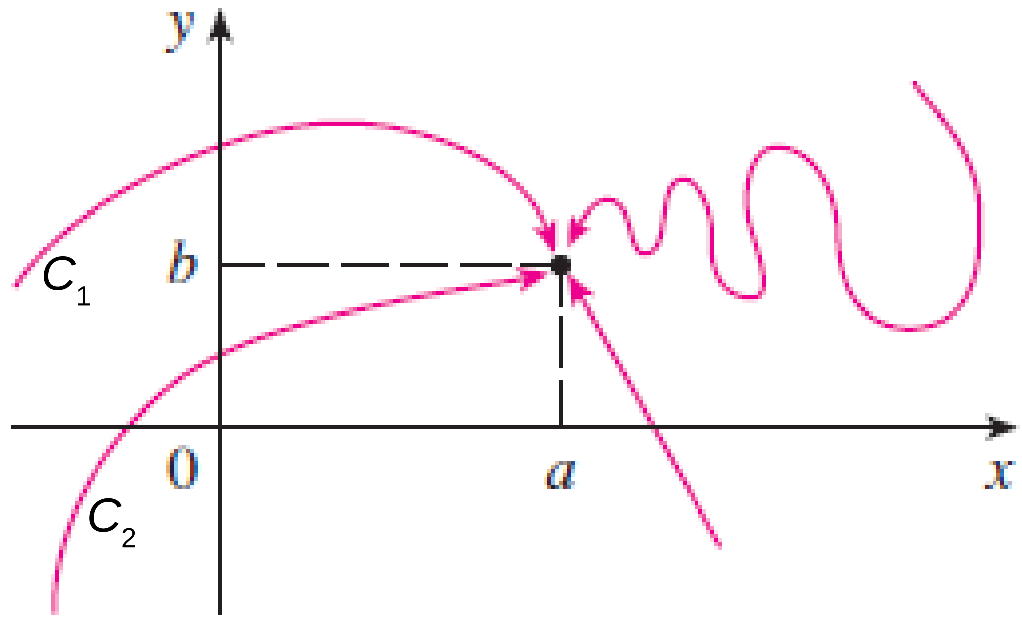

Aparentemente temos que checar qualquer caminho!

# Limites

O critério seria algo como:

Se $f(x, y) \to L$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo de todos os caminhos $C_i$, então $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ existe e á igual a $L$.

Pode até ser, mas não é uma condição muito prática para verificar.



Universidade Federal do ABC

# Funções de Várias Variáveis

## FIM PRA HOJE