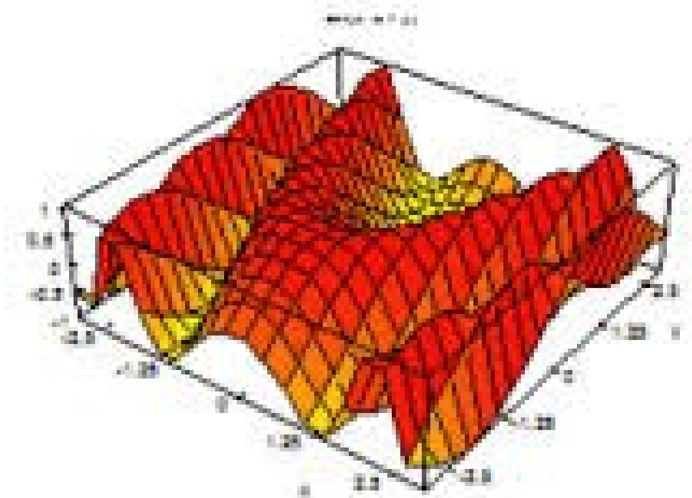
Funções de Várias Variáveis

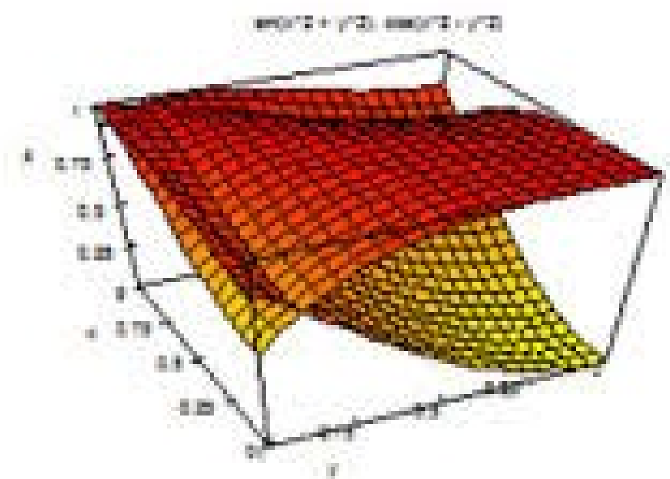
Universidade Federal do ABC

4. Limites II e Continuidade

Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/FVV.html

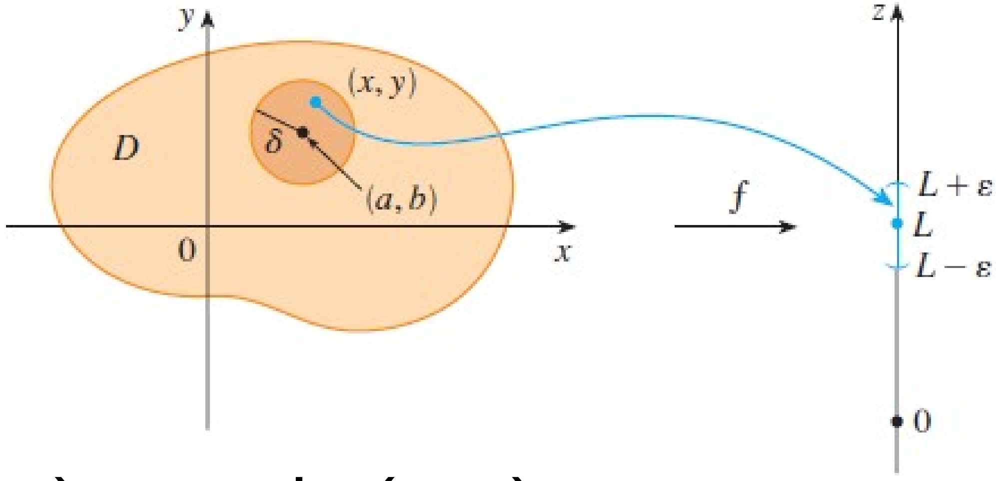




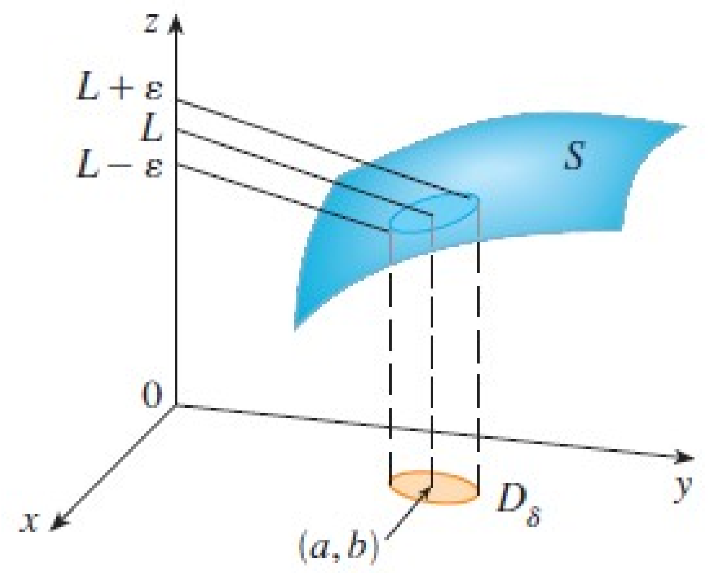
Limites

Definição:

Seja f uma função cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b).



Dizemos que o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (a, b) é L, se para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que



se $(x, y) \in D$

e $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$

então $|f(x, y) - L| < \varepsilon$

Limites

Propriedades:

$\lim_{(x,\, y) \to (a,\, b)} x = a$

$\lim_{(x,\, y) \to (a,\, b)} y = b$

$\lim_{(x,\, y) \to (a,\, b)} c = c$

Teorema do confronto:
Se $f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$ quando (x, y) está próximo de (a, b) (exceto posivelmente em (a, b)) e

$\lim_{(x,\, y) \to (a,\, b)} f(x, y) = \lim_{(x,\, y) \to (a,\, b)} h(x, y) = L$

então

$\lim_{(x,\, y) \to (a,\, b)} g(x, y) = L$

Limites

Exemplo: Determine, se existe $\lim_{(x,\, y) \to (a,\, b)} 3x^2y/(x^2+y^2)$

Limites

Exemplo: Determine, se existe $\lim_{(x,\,y)\to(a,\,b)} 3x^2y/(x^2+y^2)$

Vindo de qualquer direção ao longo de uma reta e das parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ (quadro), o limite é 0.
=> Se o limite existir, ele é 0.

Pela definição, o limite existe (e é 0) se para qualquer $\varepsilon > 0$ achamos um δ tal que:

se $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, então $|3x^2y/(x^2+y^2)| < \varepsilon$

Limites

Exemplo: Determine, se existe $\lim_{(x,\, y) \to (a,\, b)} 3x^2y/(x^2+y^2)$

Vindo de qualquer direção ao longo de uma reta e das parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ (quadro), o limite é 0.
=> Se o limite existir, ele é 0.

Pela definição, o limite existe (e é 0) se para qualquer $\varepsilon > 0$ achamos um δ tal que:

se $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, então $|3x^2y/(x^2+y^2)| < \varepsilon$

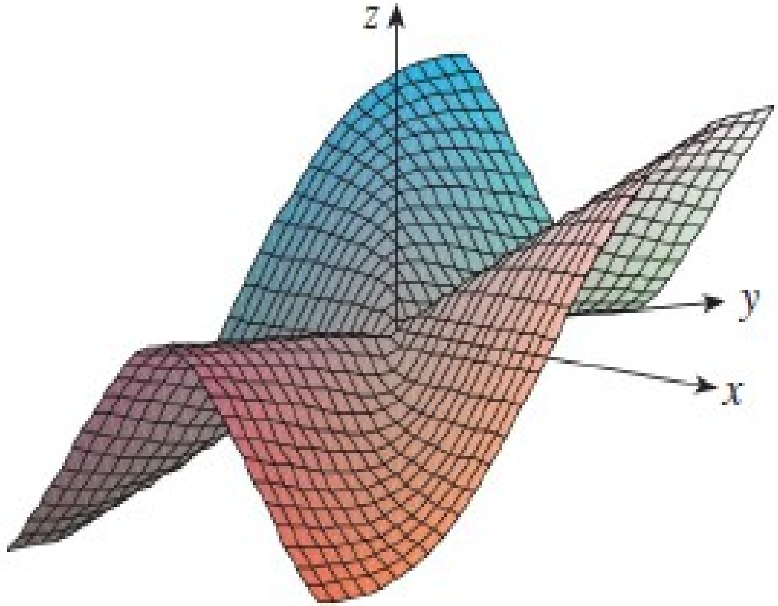
$|3x^2y/(x^2+y^2)| = 3x^2|y|/(x^2+y^2) \leq 3(x^2+y^2)|y|/(x^2+y^2)$
$= 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta$
=> $\varepsilon = 3\delta$ satisfaz a condição

O limite existe, $\lim_{(x,\, y) \to (a,\, b)} 3x^2y/(x^2+y^2) = 0$

Limites

Exemplo: Determine, se existe $\lim_{(x,\, y) \to (a,\, b)} 3x^2y/(x^2+y^2)$

O limite existe, $\lim_{(x,\, y) \to (a,\, b)} 3x^2y/(x^2+y^2) = 0$



Continuidade

A definição de limite nos ajuda o definir continuidade de uma função de 2 variáveis:

Uma função f de duas variáveis é dita contínua em (a, b) se

$$\lim_{(x,\, y) \to (a,\, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Dizemos que f é contínua em D se for contínua em todo ponto (a, b) de D.

Significa basicamente, que (o gráfico d)a função não tem buracos ou rupturas.

Continuidade

Usando as propriedades de limites, podemos ver que soma, diferença, produto, quociente*, e combinação (°) de funções contínuas são contínuas em seus domínios.
*Menos nos pontos zero da função no denominador.

Por exemplo,
polinômios em duas variáveis
e
funções racionais (quocientes de dois polinômios)
são contínuas em $\mathbb{R}^2$.

Continuidade

Exemplos:

- Calcule $\lim_{(x,\, y)\to(1\,,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$

Continuidade

Exemplos:

- Calcule $\lim_{(x,\,y)\to(1\,,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$

Dá para fazer por substituição direta:

$\lim_{(x,\,y)\to(1\,,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$

$= 1^2\cdot 2^3 - 1^3\cdot 2^2 + 3\cdot 1 + 2\cdot 2 = 11$

Continuidade

Exemplos:

- Onde a função $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ é contínua?

Continuidade

Exemplos:

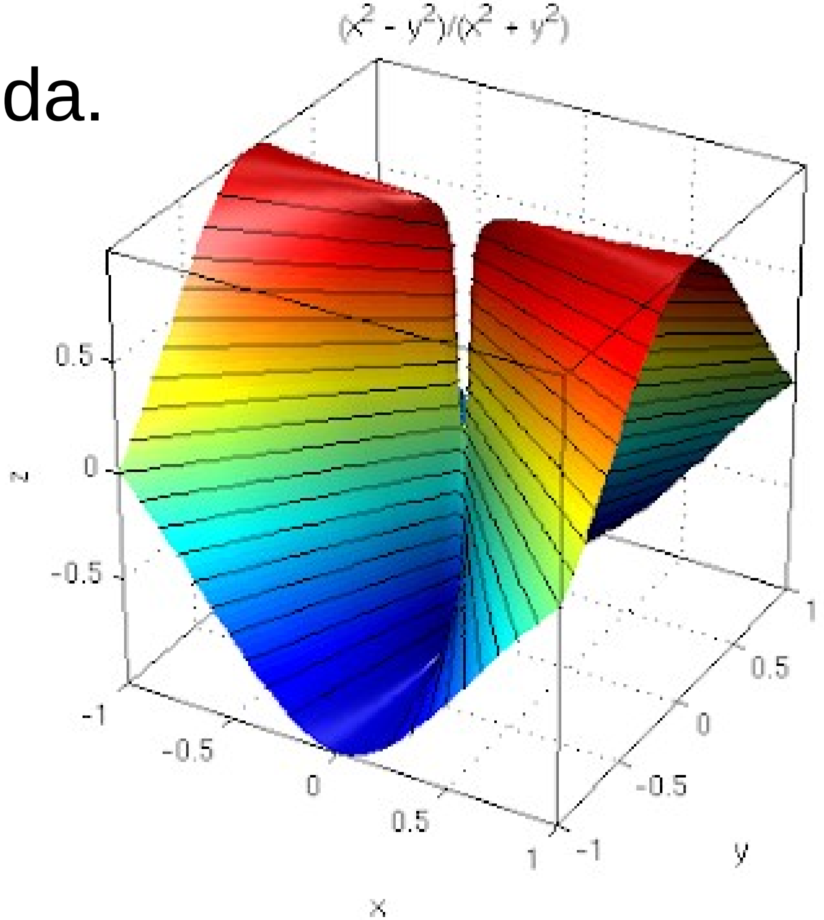
- Onde a função $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ é contínua?

Na origem, á função não é definida.

Se definimos o domínio como

$D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$

a função é contínua em todo o domínio, por ser uma função racional.



Continuidade

Exemplos:

- E se definimos a função assim?

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Continuidade

Exemplos:

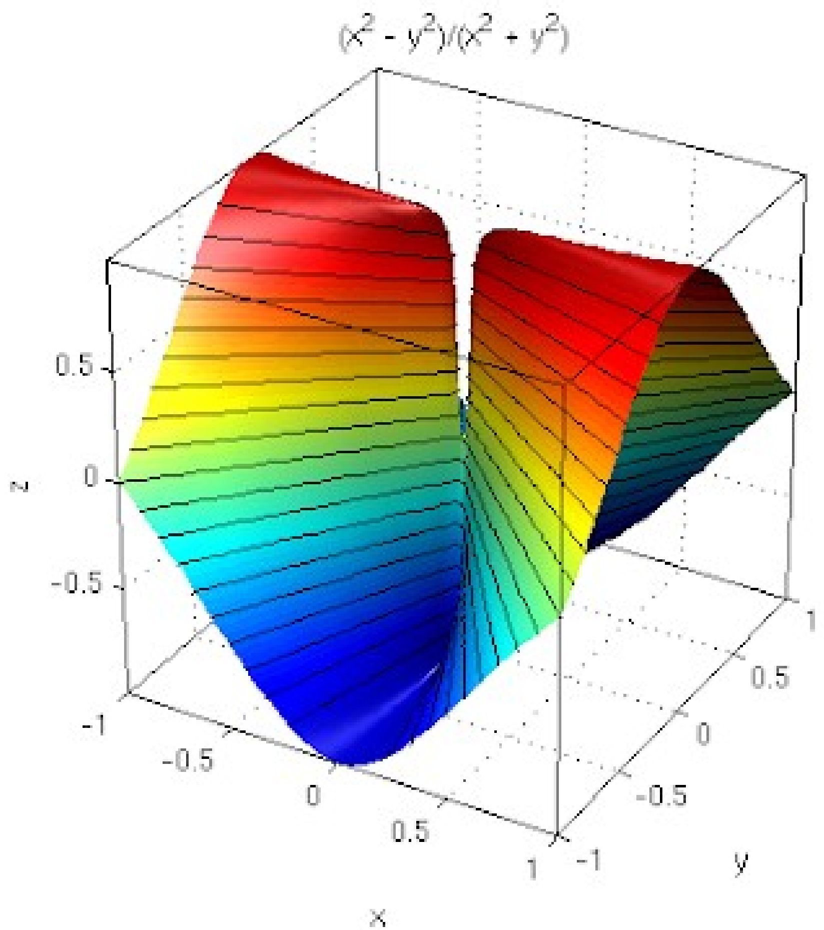
Agora ela é definida em todo $\mathbb{R}^2$,

Mas é descontínua em (0, 0), porque

$\lim_{(x,\, y) \to (0\ ,0)} f(x, y)$

não existe.

(vide aula anterior)



Continuidade

Exemplos:

- Seja

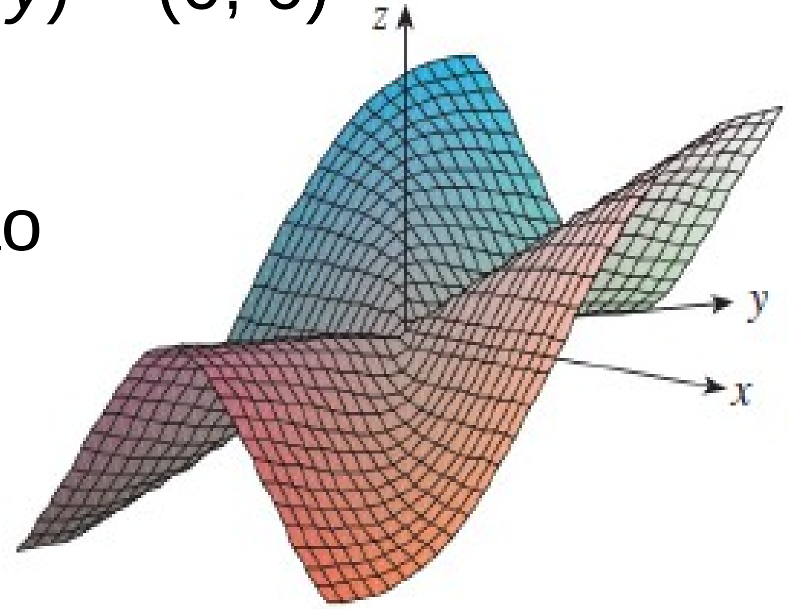
$$f(x, y) = \begin{cases} (3x^2y)/(x^2 + y^2) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Continuidade

Exemplos:

- Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} (3x^2y)/(x^2 + y^2) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



Sabemos que f é contínua para $(x, y) \neq (0, 0)$ por ser uma função racional, e que

$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x) = 0 = f(0, 0)$

(=> mais cedo na aula)

=> f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Continuidade

Exemplos:

- Onde a função arctg(y/x) é contínua?

Continuidade

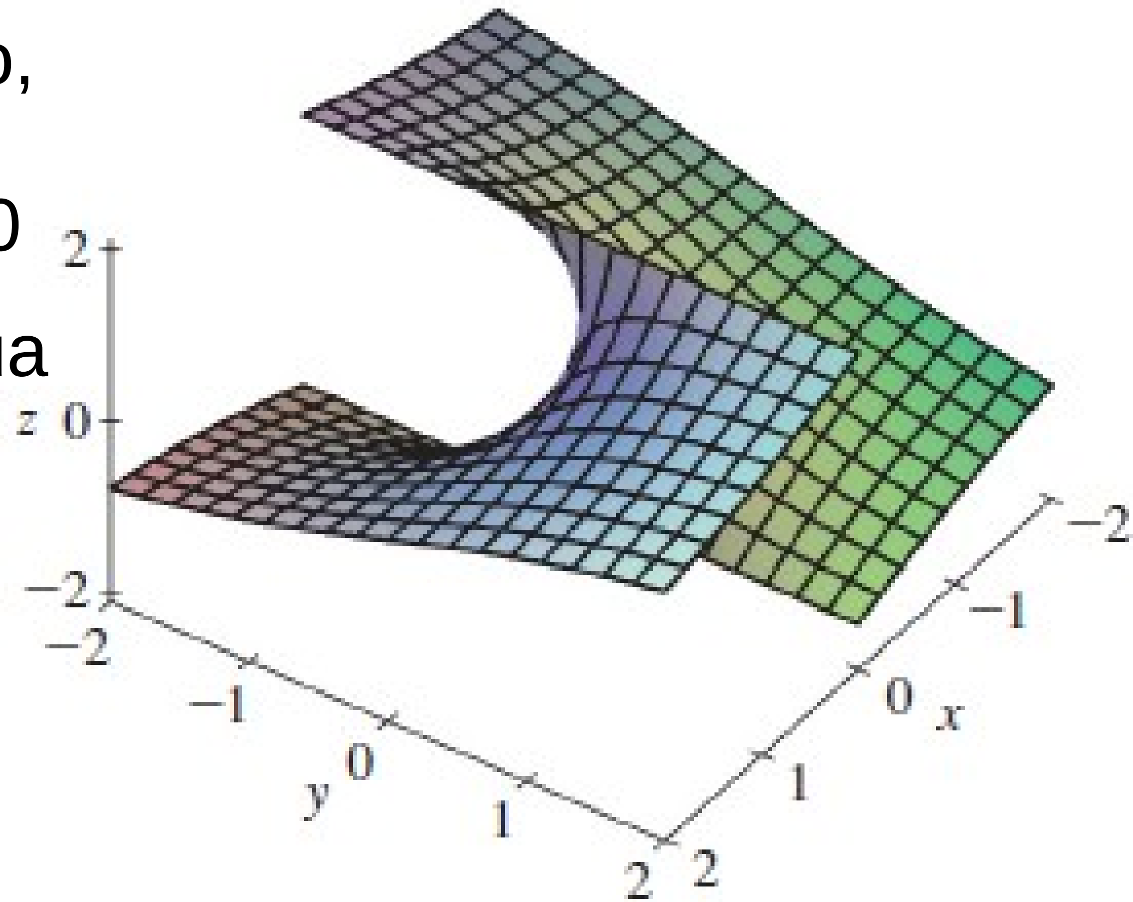
Exemplos:

- Onde a função arctg(y/x) é contínua?

x/y é racional e, portanto, contínua em todo lugar exceto sobre a reta $x = 0$

Já que arctg(t) é contínua em qualquer lugar t, segue:

arctg(y/x) é contínua, exceto onde $x = 0$.



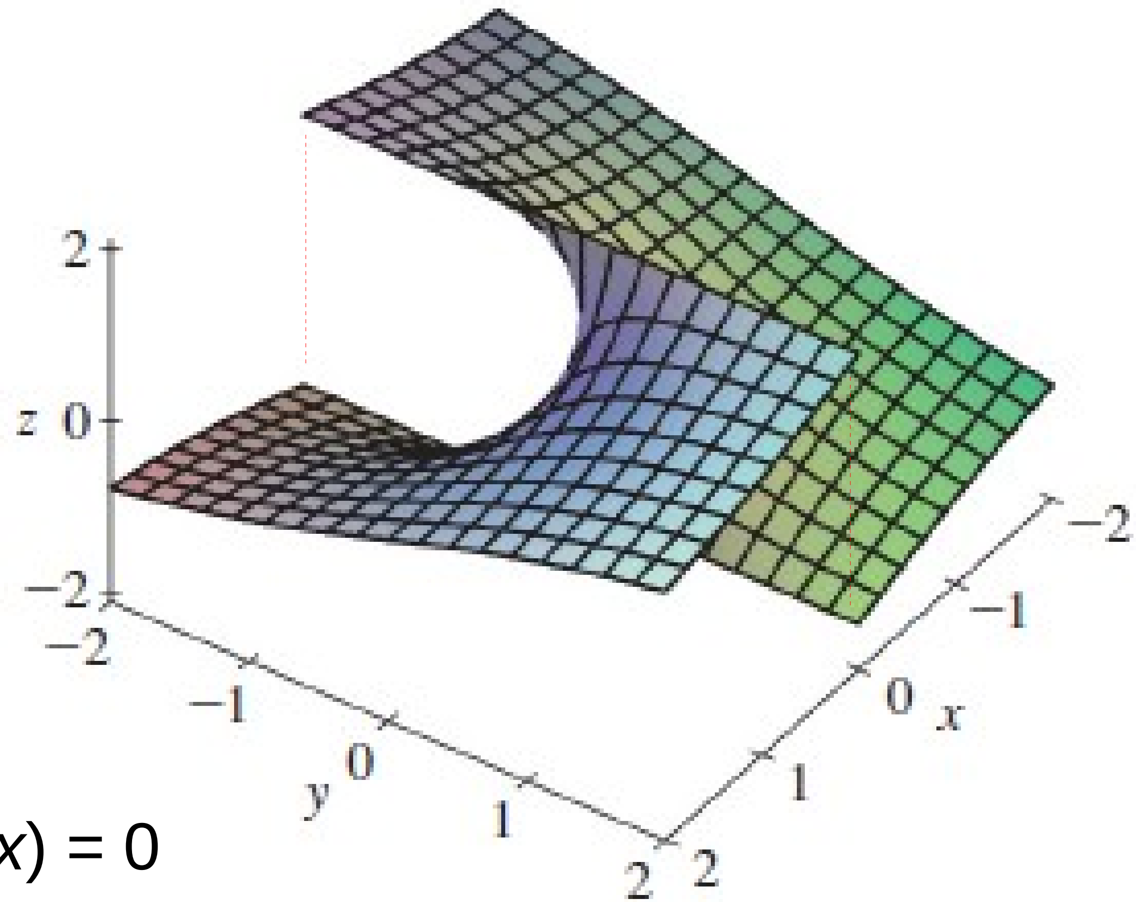
Continuidade

Exemplos:

- Onde a função arctg(y/x) é contínua?

Para $y > 0$ vale:

$\lim_{x\to 0-} \text{arctg}(y/x)$
$= \lim_{t\to -\infty} \text{arctg}(t) = -\pi/2$,
$\lim_{x\to 0+} \text{arctg}(y/x)$
$= \lim_{t\to \infty} \text{arctg}(t) = \pi/2$



para $y < 0$:

$\lim_{x\to 0-} \text{arctg}(y/x) = \pi/2$,
$\lim_{x\to 0+} \text{arctg}(y/x) = -\pi/2$

e para $y = 0$: $\lim_{x\to 0} \text{arctg}(y/x) = 0$

Funções com três ou mais Variáveis

Estas definições são facilmente estendidas a funções de três variaveis ...:

Seja f uma função cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b, c).
Dizemos que o limite de $f(x, y, z)$ quando (x, y, z) tende a (a, b, c) é L, se para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

se $(x, y, z) \in D$ e $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \delta$
então $|f(x, y, z) - L| < \varepsilon$

Uma função f de três variáveis é dita contínua em (a, b) se $\lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$
Dizemos que f é contínua em D se for contínua em todo ponto (a, b, c) de D.

Funções com três ou mais Variáveis

... e a funções de *n* variaveis (usando notação vetorial):

Se f é definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, então $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

se $(\mathbf{x}) \in D$ e $0 < |\mathbf{x}-\mathbf{a}| < \delta$ então $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$

$(\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), = \sqrt{\sum_{i=1,n}(x_i-a_i)^2},$

e a definição de continuidade pode ser escrita como

$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$

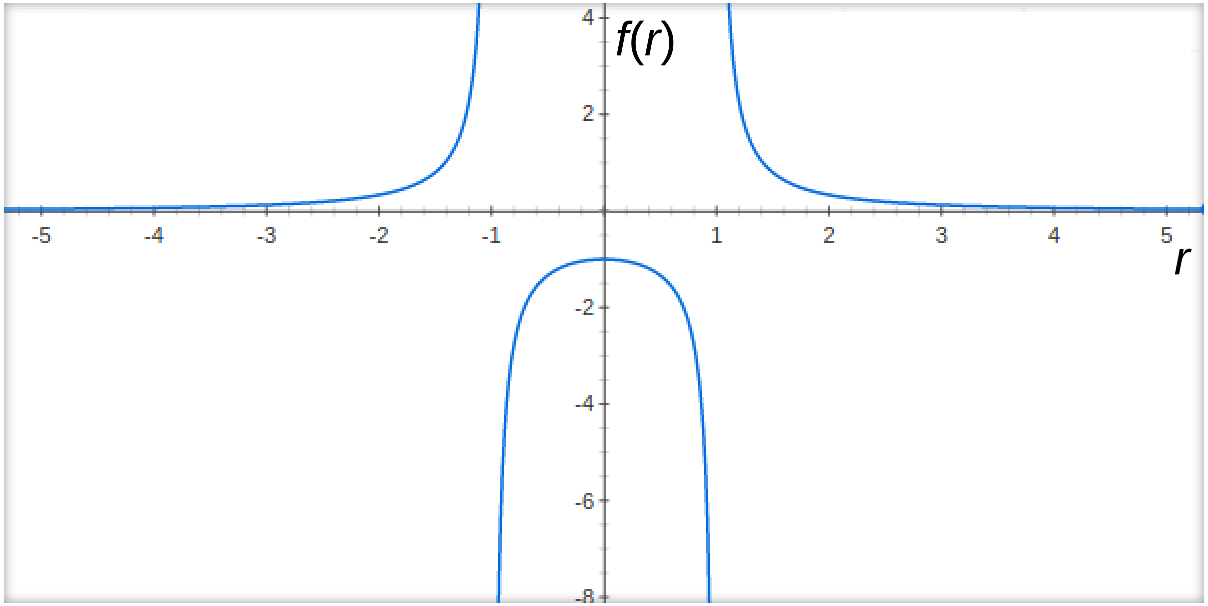
Funções com três ou mais Variáveis

Exemplo de uma função de três variáveis:

$f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

é uma função racional em x, y e z, portanto contínua em todo ponto de $\mathbb{R}^3$, exceto onde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ou seja é descontínua na esfera de centro na origem e raio 1.

Ela é esfericamente simétrica, e dá para visualizá-la como $f(r) = 1/(r^2 - 1)$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



Funções de Várias Variáveis

FIM PRA HOJE