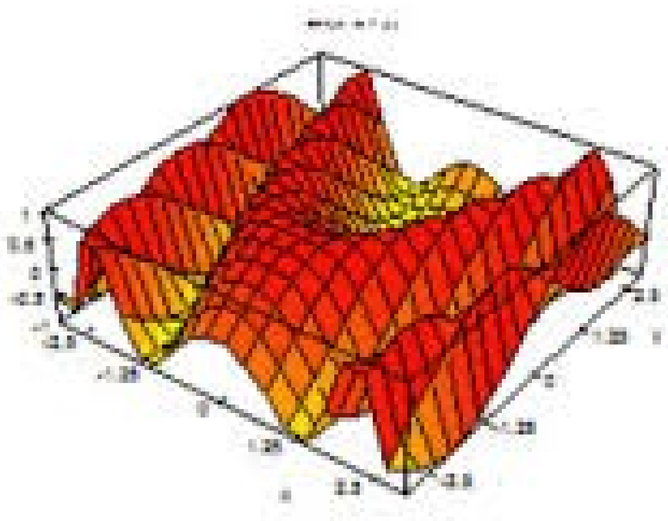
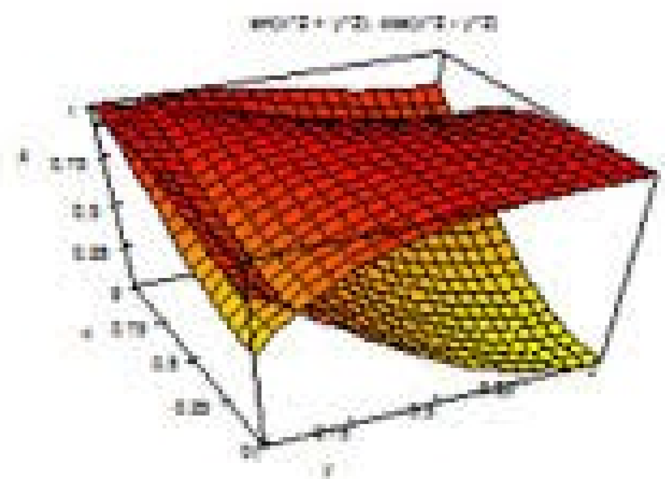
Funções de Várias Variáveis

5. Derivadas Parciais e de Ordem Superior

Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/FVV.html





Derivadas Parciais

Esta tabela mostra o *humidex I*, ou índice de temperatura-umidade, uma grandeza que quantifica a sençação térmica, isto é, a temperatura que uma pessoa sente (em °C), em função da verdadeira temperatura *T* e da umidade relativa do ar *H*,

Umidade relativa

Temperatura real (°C) T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Fonte: Serviço Meteorológico do Canadá

$I(T, H)$

Derivadas Parciais

Vemos:

- Para um dado valor da umidade relativa: quanto maior é a verdadeira temperatura, tanto mais alto é o *humidex* (óbvio)

Umidade relativa

Temperatura real (°C)

T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

- Para uma dada temperatura, quanto mais alta é a umidade relativa, tanto mais alto é o *humidex* (pelo menos para a faixa de temperaturas e umidades relativas representada na tabela).

Derivadas Parciais

Estamos interessados nas taxas de aumento do *humidex* com relação as temperatura verdadeira e umidade relativa, i. e. em torno do ponto (T, H) = (30 °C, 60 %):

Umidade relativa

Temperatura real (°C) T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

taxa de aumento com a temperatura:

$\Delta I/\Delta T = [I(30\ °C, 60\ \%) - I(28\ °C, 60\ \%)] / (30\ °C-28\ °C)$

$= (38\ °C – 35\ °C)/2\ °C\ = 1.5,$ ou

$\Delta I/\Delta T = [I(32\ °C, 60\ \%) - I(30\ °C, 60\ \%)] / (32\ °C-30\ °C)$

$= (42\ °C – 38\ °C)/2\ °C\ = 2$

(analogicamente para $\Delta I/\Delta H$)

Derivadas Parciais

Estes valores 1.5 e 2 são as taxas médias de aumento nas faixas T = 28 °C a 30 °C e T = 30 °C a 32 °C.

Para saber a taxa exata em (T, H) = (30 °C, 60 %) precisamos conhecer $I(T, H)$ na vizinhança deste ponto (não apenas em pontos discretos) e calcular o limite:

$\lim_{\Delta T \to 0+} [I(T+\Delta T, H) - I(T, H)] / \Delta T$

(ou $\lim_{\Delta T \to 0-} [I(T, H) - I(T-\Delta T, H)] / \Delta T$, o que tende ao mesmo valor, se $I(T, H)$ é “bem-comportado” (liso) em torno de (T, H))

Derivadas Parciais

Mas $\lim_{\Delta T \to 0} [I(T+\Delta T, H) - I(T, H)] / \Delta T$
é justamente a derivada em T (=> FUV) da função
$f(T) = I(T, H = \text{const.} = 60\ \%)$
Podemos interpretar H como um parâmetro da função $f(T)$.

Analogicamente, a taxa de aumento de I em relação a H é $\lim_{\Delta H \to 0}[I(T, H+\Delta H) - I(T, H)] / \Delta H$, a derivada da função $g(H) = I(T = 30\ °\text{C}, H)$, agora interpretando T como parâmetro da função.

Derivadas Parciais

Os dois são chamados
derivada parcial de I em relação
a T em (30 °C, 60 %), denotado $\dfrac{\partial I}{\partial T}(30\ °C,\ 60\ \%)$ e
derivada parcial de I em relação
a H em (30 °C, 60 %), denotado $\dfrac{\partial I}{\partial H}(30\ °C,\ 60\ \%)$.

O livro usa com mais frequência as denotações
$I_T(30\ °C,\ 60\ \%)$ e
$I_H(30\ °C,\ 60\ \%)$.

Derivadas Parciais

Em geral, se f é uma função de duas variáveis x e y, e deixamos somente x variar enquanto mantemos fixo o valor de $y = b$, criamos a função de uma variável $g(x) = f(x, b)$. Se g tem derivada em a, nós a chamamos derivada parcial de f em relação a x em (a, b),

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\ g'(a) \quad \text{onde} \quad g(x) = f(x, b)$$

Pela definição de derivada temos $g'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(a+h) - g(a)}{h}$

Assim, fica

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \text{ ou } f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

analogicamente: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ ou $f_y(a, b) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$

Derivadas Parciais

Definição: Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais são as funções f_x e f_y definidas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ ou } f_x(x, y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\text{e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ ou } f_y(x, y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Notações diferentes: Se $z = f(a, b)$, podemos escrever

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Derivadas Parciais

Regra para determinar a derivada parcial de $z = f(x, y)$

1. Para encontrar f_x, trate y como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a x.

2. Para encontrar f_y, trate x como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a y.

Derivadas Parciais

Exemplo:

Se $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, determine $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

Derivadas Parciais

Exemplo:

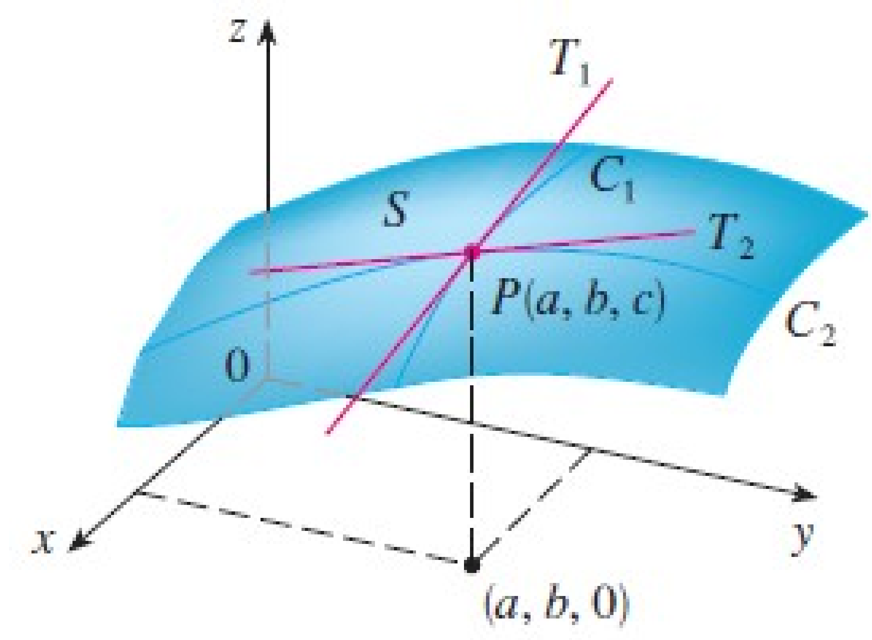
Se $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 -2y^2$, determine $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

Quadro:

$f_x(2, 1) = 16$

$f_y(2, 1) = 8$

Derivadas Parciais



Tomando $z = f(x, y)$ e olhando pro gráfico de f, a superfície S e o ponto $P(a, b, c = f(a, b))$.

Chamando a interseção de S com o plano vertical $y = b$ de C_1, a curva C_1 é justamente o gráfico de $g(x) = f(x, b)$ e $f_x(a, b) = g'(a)$, a inclinação da tangente a C_1 que passa por P e assim, uma tangente a S em P (a no plano paralelo ao plano xz, $y = b$).

Analogicamente, $f_x(a, b)$ é a tangente a S no plano paralelo ao plano yz, $x = a$.

Derivadas Parciais

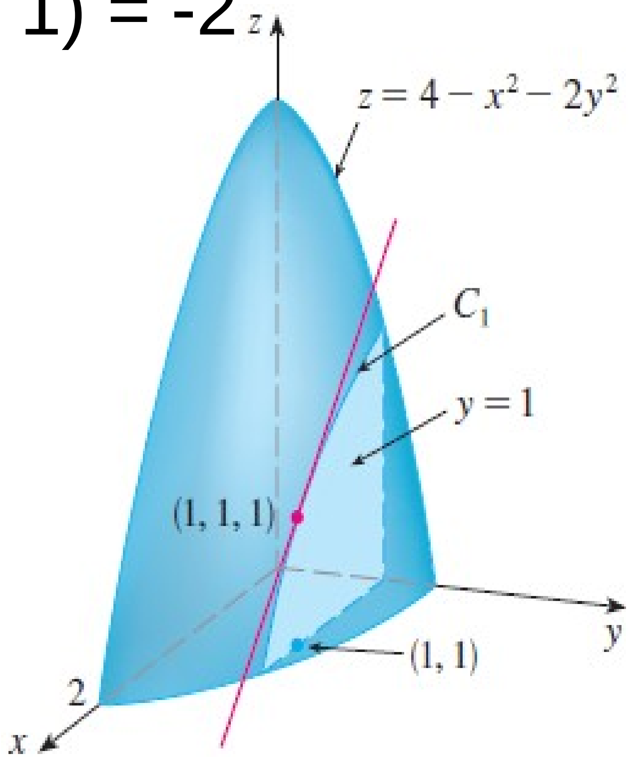
Exemplo: Se $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, encontre $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$ e interprete este números como inclinações.

Derivadas Parciais

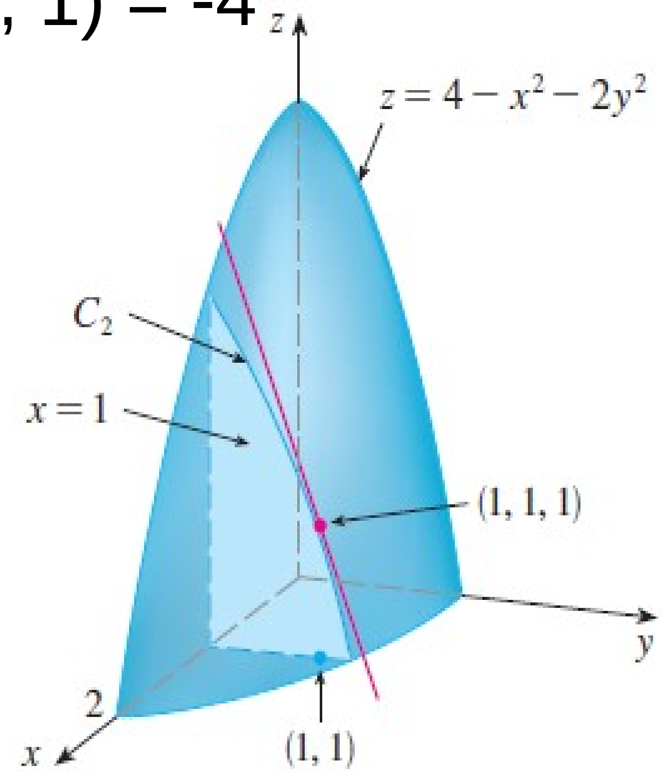
Exemplo: Se $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, encontre $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$ e interprete este números como inclinações.

Quadro:

$f_x(1, 1) = -2$



$f_y(1, 1) = -4$

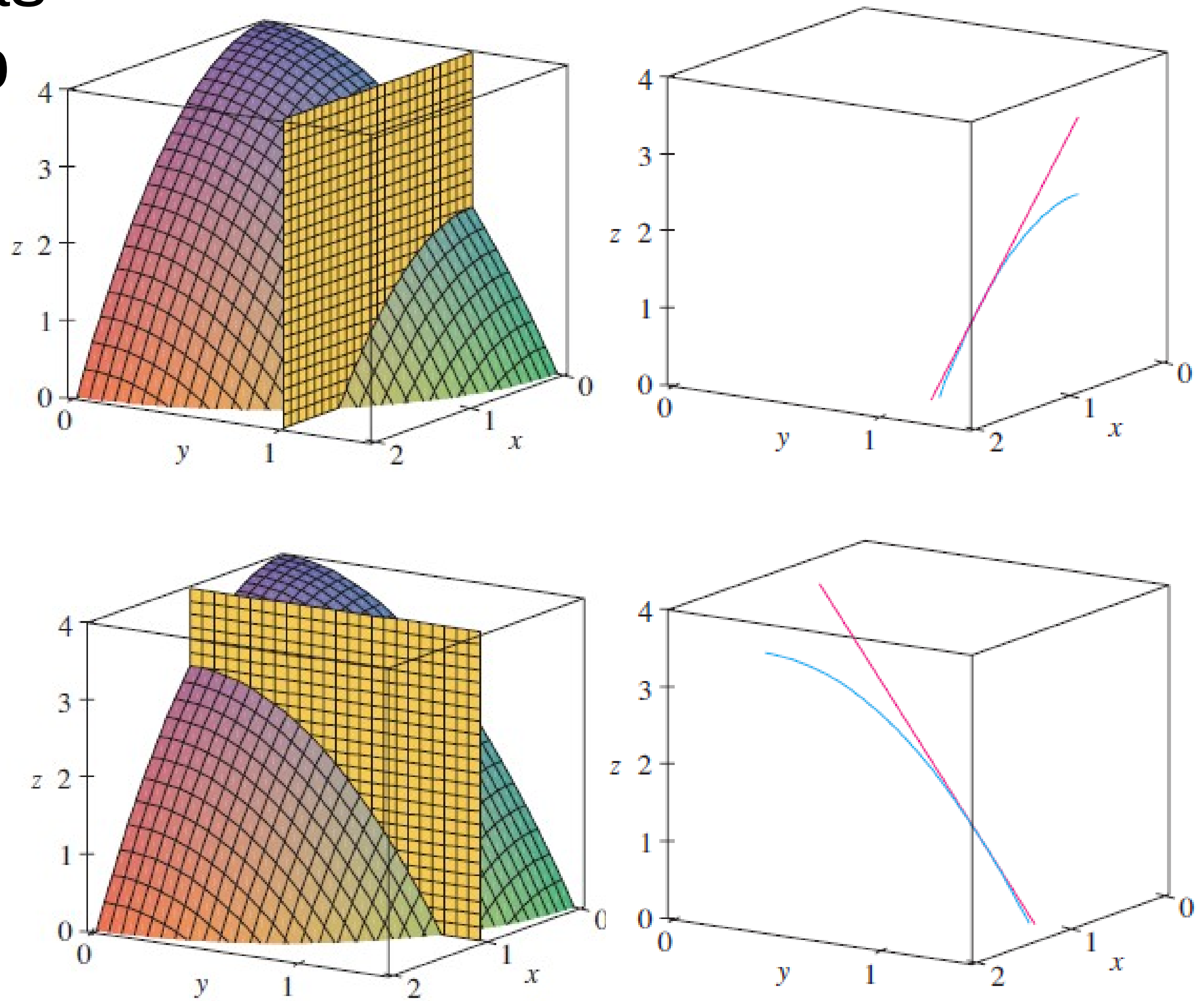


Derivadas Parciais

Interpretando as derivadas parciais de $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$ como inclinações das tangentes ao gráfico

nos planos $y = 1$

e $x = 1$



Derivadas Parciais

Exemplo:

Se $f(x, y) = \text{sen}(x/(1+y))$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Derivadas Parciais

Exemplo:

Se $f(x, y) = \text{sen}(x/(1+y))$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Quadro:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x/(1+y)) \cdot 1/(1+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos(x/(1+y)) \cdot x/(1+y)^2$$

Derivadas Parciais

Exemplo: Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se z é definido implicitamente como um função de x e y pela equação

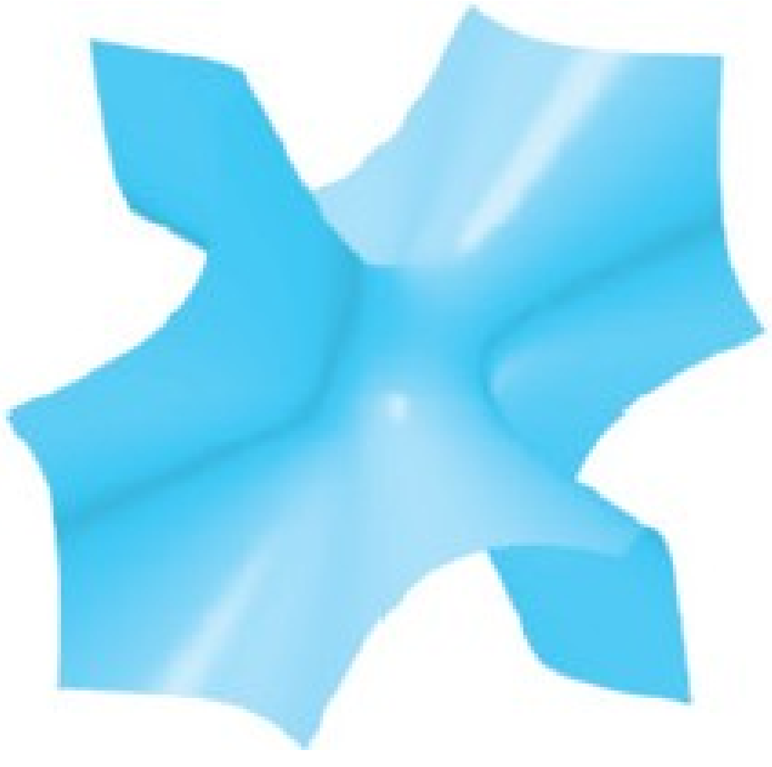
$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

Derivadas Parciais

Exemplo: Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se z é definido implicitamente como um função de x e y pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

gráfico da função



Quadro:

$$\partial z/\partial x = -(x^2+2yz)/(z^2+2xy)$$

$$\partial z/\partial y = -(y^2+2xz)/(z^2+2xy)$$

Derivadas Parciais

Função de mais de duas Variáveis

Por exemplo de três variáveis x, y e z:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = f_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

A derivada parcial em relação a x é obtida derivando a função mantendo ambas as demais variáveis, y e z, constantes.

Em geral, a derivada parcial de uma função de n variá-veis, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em relação à i-esima variável x_i é

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i+h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

Derivadas Parciais

Exemplo: Determine f_x, f_y e f_z se $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

Derivadas Parciais

Exemplo: Determine f_x, f_y e f_z se $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

Quadro:

$f_x = ye^{xy} \ln z$

$f_y = xe^{xy} \ln z$

$f_z = e^{xy}/z$

Derivadas Parciais

Derivadas de Ordem Superior

Já que f_x e f_y são novas funções de x e y, podemos derivá-las de novo, obtendo derivadas parciais de segunda ordem de f, $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ e $(f_y)_y$. Escrevemos:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$ derivar duas vezes em x

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$ derivar primeiro em x, depois em y

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$ derivar primeiro em y, depois em x

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$ derivar duas vezes em y

! Atenção na ordem dos índices e termos no denominador.

Derivadas Parciais

Exemplo: Determine as derivadas parciais de segunda ordem de $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

Quadro:

$$f_{xx} = 6x + 2y^3$$

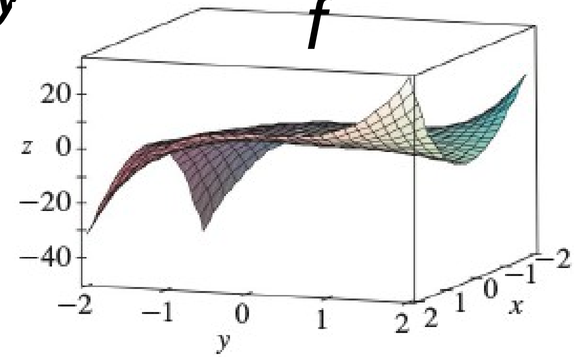
$$\left.\begin{array}{l} f_{xy} = 6xy^2 \\ \\ f_{yx} = 6xy^2 \end{array}\right\} \text{interessante !}$$

$$f_{yy} = 6x^2y - 4$$

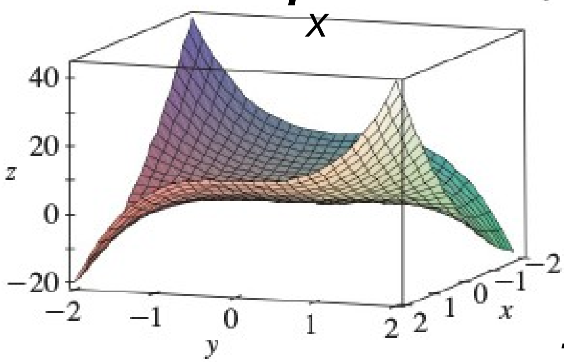
Derivadas Parciais

$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

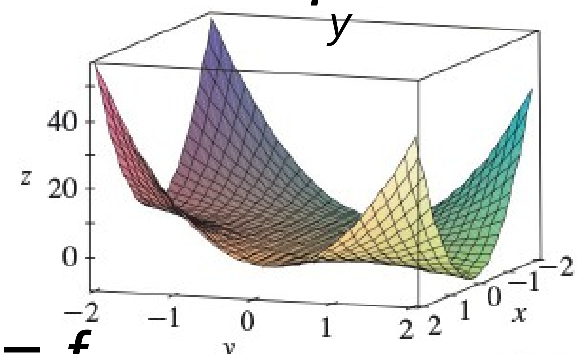
f



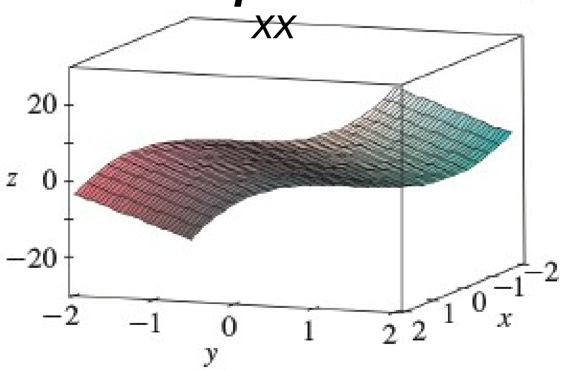
f_x



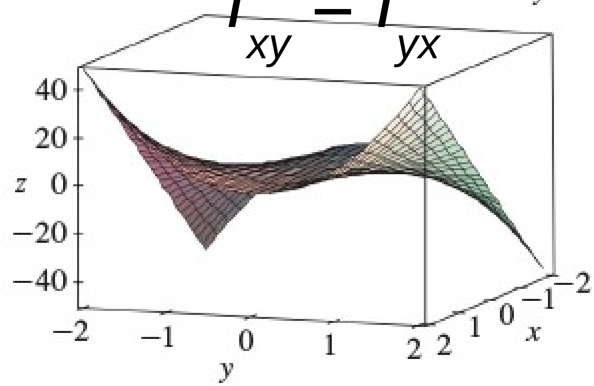
f_y



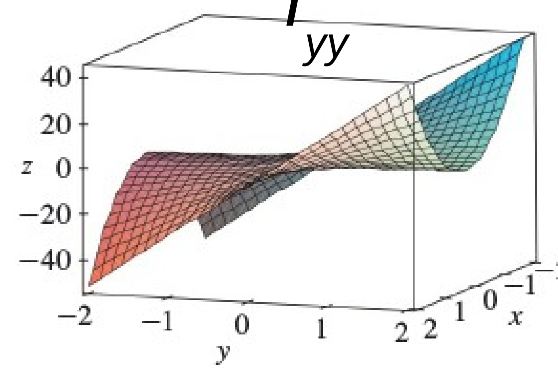
f_{xx}



$f_{xy} = f_{yx}$



f_{yy}



Derivadas Parciais

Derivadas de Ordem Superior

Não é um acaso, que no último exemplo, $f_{xy} = f_{yx}$.
Vale em geral para funções "bem comportadas".
Mais precisamente, vale o

Teorema de Clairaut:

Suponha que f seja definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a, b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D, então

$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

Derivadas Parciais

Derivadas de Ordem Superior

Derivadas parciais de ordem 3 ou maior também podem ser definidas. Por exemplo:

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x}$$

Usando o teorema de Clairaut várias vezes, podemos mostrar, que

$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ se essas funções forem contínuas.

Derivadas Parciais

Exemplo: Calcule f_{xxyz} se $f(x, y, z) = \text{sen}(3x + yz)$.

Quadro:

$f_{xxyz} = -9\cos(3x + yz) + 9yz\,\text{sen}(3x + yz)$

Derivadas Parciais

Equações Diferenciais Parciais

Relacionam derivadas parciais (de primeira ordem ou de ordem mais alta) de funções de várias variáveis.
Com sorte, elas ajudam a achar a função, ou conjuntos de funções que satisfazem a equação ou as equações.

Derivadas Parciais

Equações Diferenciais Parciais

Exemplo: A equação de Laplace

Pierre-Simon Laplace
(1749-1827)

Seja $u(x, y)$ uma grandeza que varia com a posição (i. e. temperatura, densidade, concentração de alguma componente química), uma condição para equilíbrio é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

O lado esquerdo é o operador laplaciano 2D aplicado na função u. O valor num ponto (a, b) quantifica, se u é maior ou menor na vizinha imediata de (a, b) que no próprio ponto (mediado sobre um anel infinitesimalmente pequeno em torno de (a, b)).

Derivadas Parciais

Equações Diferenciais Parciais

Exemplo: A equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

As soluções dessa equação são chamadas funções harmônicas e são importantes no estudo de condução de calor, escoamento de fluidos e potencial elétrico.

Quadro: Mostre, que $u(x, y) = e^x \text{ sen } y$ é solução da equação de Laplace.

Derivadas Parciais

Equações Diferenciais Parciais

Exemplo: A equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

descreve a propagação de alguma grandeza física *u* pelo espaço (na direção dos *x*)
Exemplos: Ondas sonoras: variações na pressão do ar,
Ondas eletromagnéticas: campos elétrico e magnético, etc.

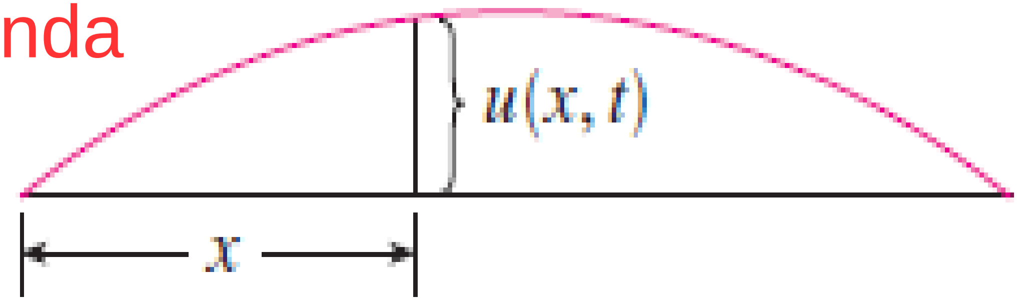
A Equação de Onda é derivada dos processos que causam a propagação (para ondas sonoras, as interações entre as partículas do ar, para ondas eletromagnéticas, uma combinação das Leis de Maxwell, etc.).

Derivadas Parciais

Equações Diferenciais Parciais

Exemplo: A equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



No caso de uma corda vibrante, a grandeza que se propaga é o deslocamento transversal $u(x, t)$. A constante a depende da densidade da corda e da tensão aplicada nela.

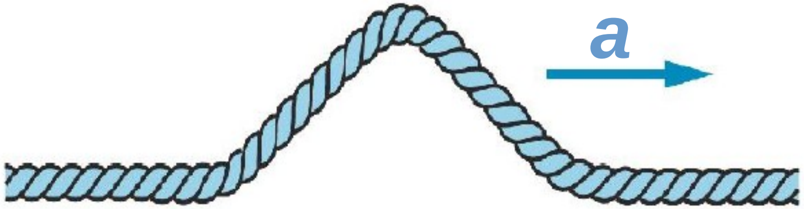
Quadro: Verifique que a função $u(x, t) = \text{sen}(x - at)$ satisfaz a equação de onda.

Derivadas Parciais

Equações Diferenciais Parciais

Exemplo: A equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



Na verdade, qualquer função da forma $f(x - at)$ ou $f(x + at)$ satisfaz a equação, onde f é uma função de uma variável duplamente derivável.

$f(x - at)$ descreve uma onda de forma $f(x)$ propagando-se com velocidade a na direção $+x$, e
$f(x + at)$, uma que se propaga com velocidade a na direção $-x$.

Funções de Várias Variáveis

FIM PRA HOJE