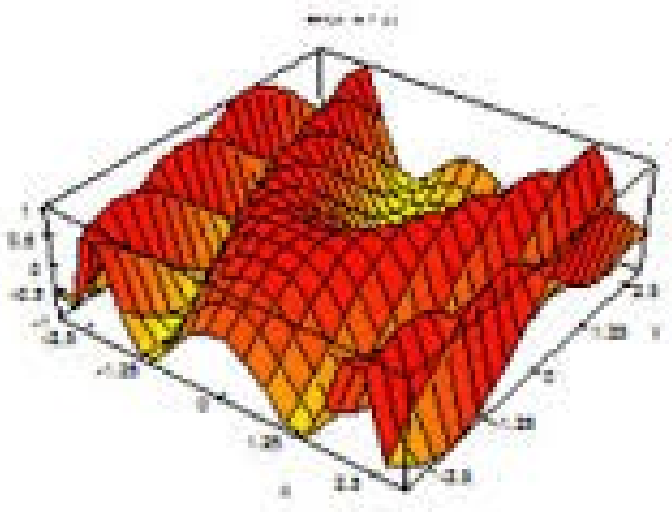
# Funções de Várias Variáveis

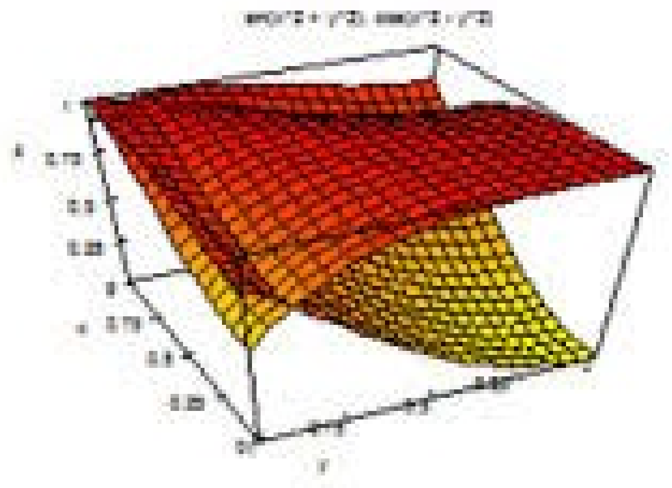
Universidade Federal do ABC

## 6. Aproximação Linear, Diferenciabilidade

Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/FVV.html





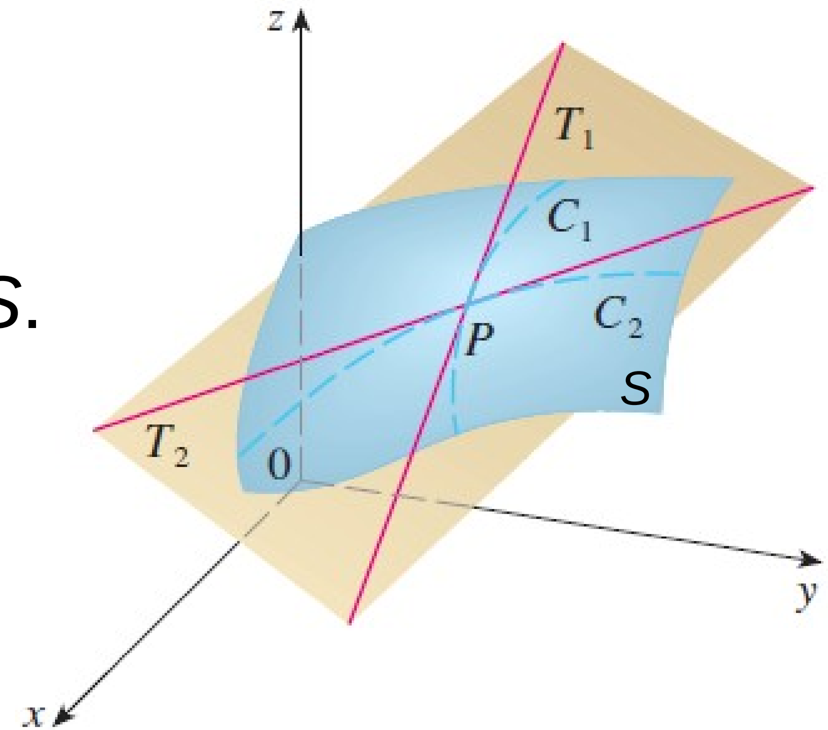
# Planos Tangentes e Aproximações Lineares

Em FUV aprendimos, que a reta que passa pelo ponto ($x_0$, $f(x_0)$) com inclinação $f'(x_0)$ é uma aproximação a $f$ perto de $x_0$.
Quanto mais próximo a $x_0$, tanto melhor é a aproximação, i. e., a função se parece cada vez mais com a reta, enquanto fazemos um “zoom” centrado no ponto ($x_0$, $f(x_0)$).

De maneira análoga, o plano tangente à superfície descrita por uma função de duas variáveis $f$ no ponto ($x_0$, $y_0$, $f(x_0, b)$) é uma boa aproximação à função na vizinhança de ($x_0$, $y_0$).

# Planos Tangentes

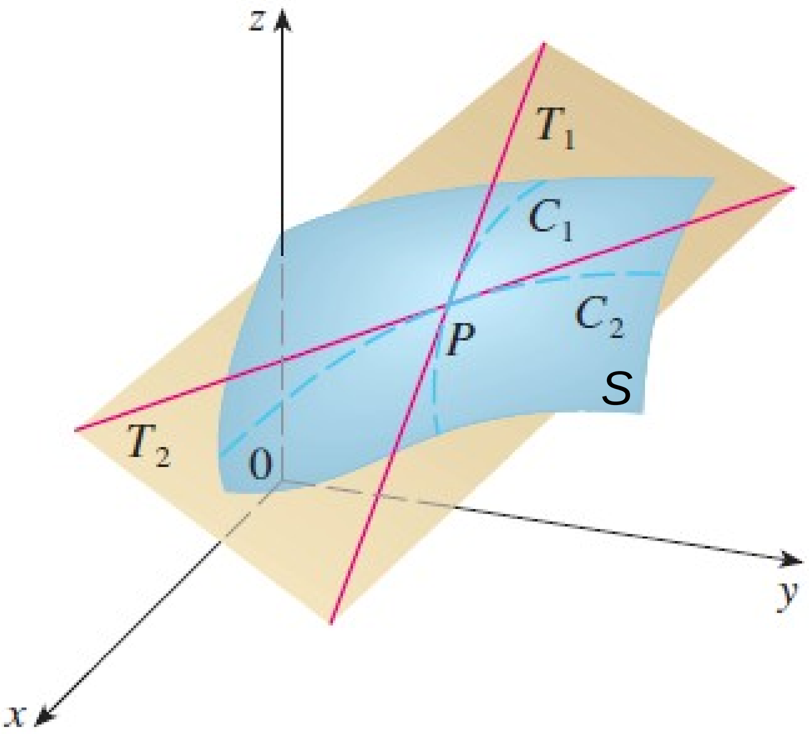
Seja a superfície $S$ dada pela equação $z = f(x, y)$, onde $f$ tem derivadas parciais contínuas, e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto em $S$.




Sejam $C_1$ e $C_2$ as interseções de $S$ com os planos verticais $y = y_0$ e $x = x_0$, e $T_1$ e $T_2$, as retas tangentes passando por $P$ a estas curvas (também nos planos $y = y_0$ e $x = x_0$).

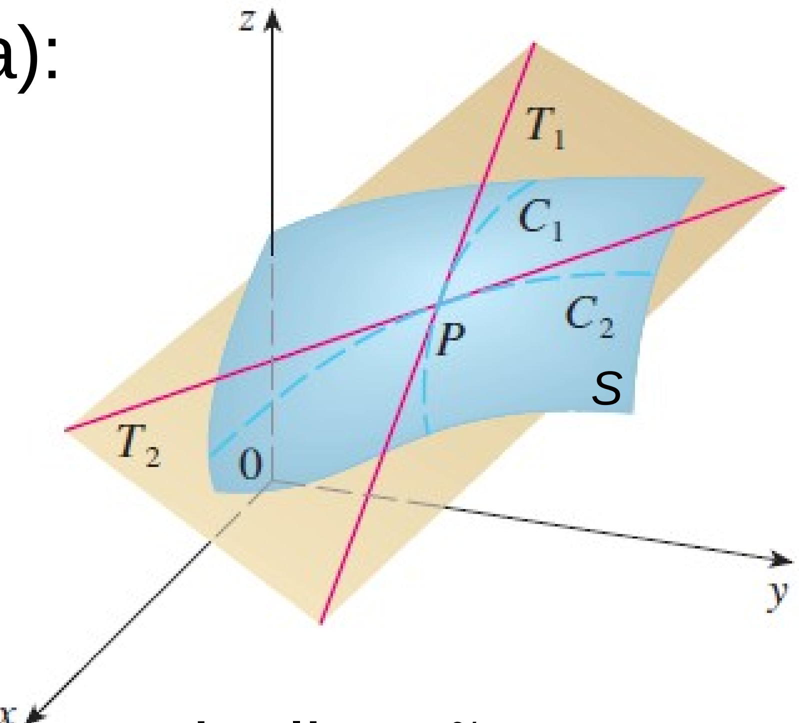
# Planos Tangentes

O plano tangente à superfície *S* no ponto *P* é definido como o plano que contém as duas retas tangentes $T_1$ e $T_2$.




Qualquer reta deste plano que passa por *P* também é tangente à superfície *S*,
e para qualquer curva em *S* que passa por *P* vale: A tangente à curva que passa por *P* faz parte do plano.

# Planos Tangentes




Equação escalar do plano (1ª aula):

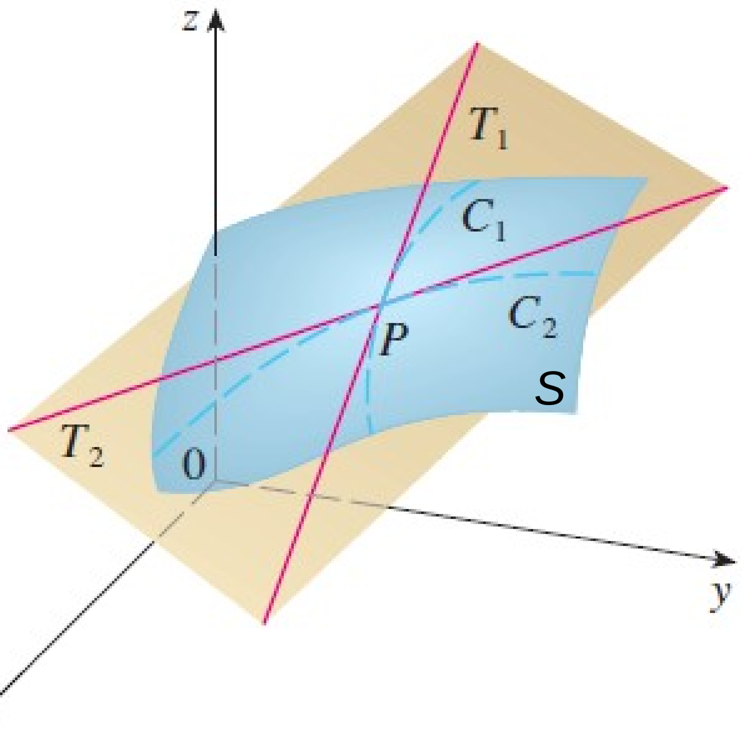
$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

ou $z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$,
onde $a = -A/C$ e $b = -B/C$.

A interseção com o plano $y = y_0$
(isto é, a reta $T_1$) é:
$z - z_0 = a(x - x_0)$, $\quad y = y_0$, uma reta com inclinação $a$.
Sabendo que a inclinação de $T_1$ é $f_x$ => $a = f_x(x_0, y_0)$
Analogicamente para $T_2$: $b = f_y(x_0, y_0)$

# Planos Tangentes

Levando à seguinte representação do plano tangente:




Suponha que *f* tem derivadas parciais contínuas. Uma equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ é dada por:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

# Planos Tangentes

Exemplo:

Determine o plano tangente ao paraboloide elíptico

$z = 2x^2 + y^2$

no ponto $(1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, 3)$

# Planos Tangentes

Exemplo:

Determine o plano tangente ao paraboloide elíptico

$z = 2x^2 + y^2$

no ponto $(1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, 3)$

Quadro:

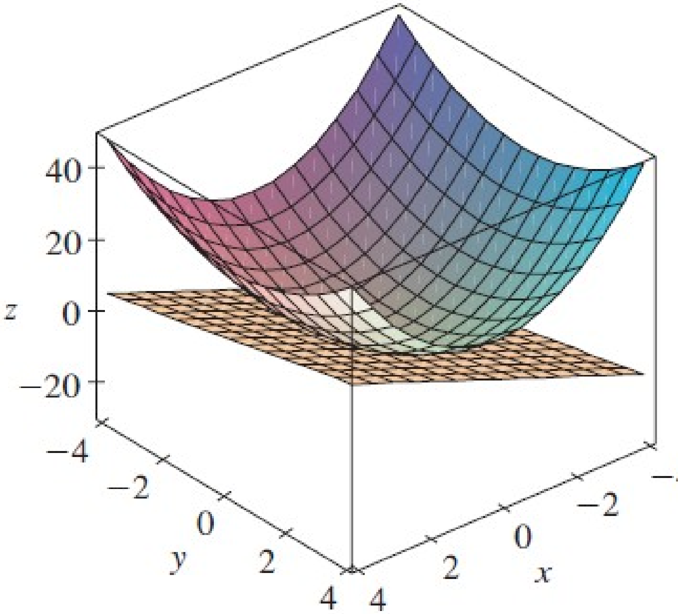
$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$

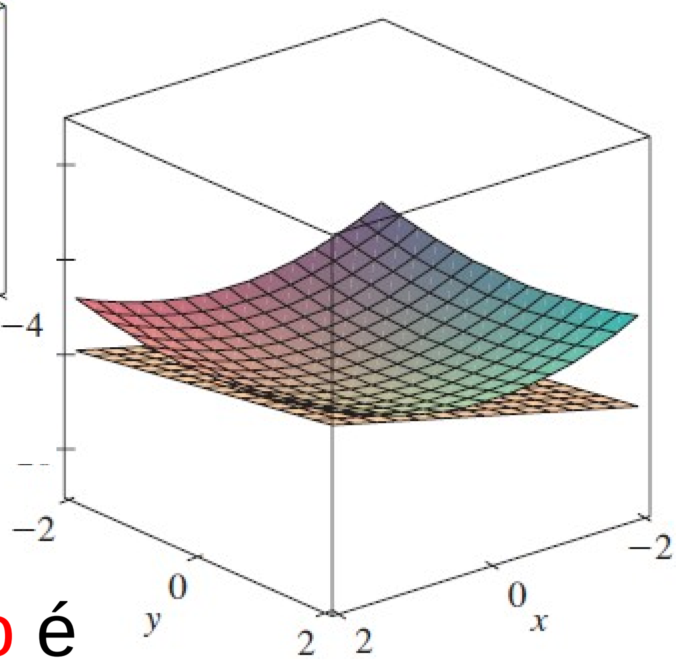
ou

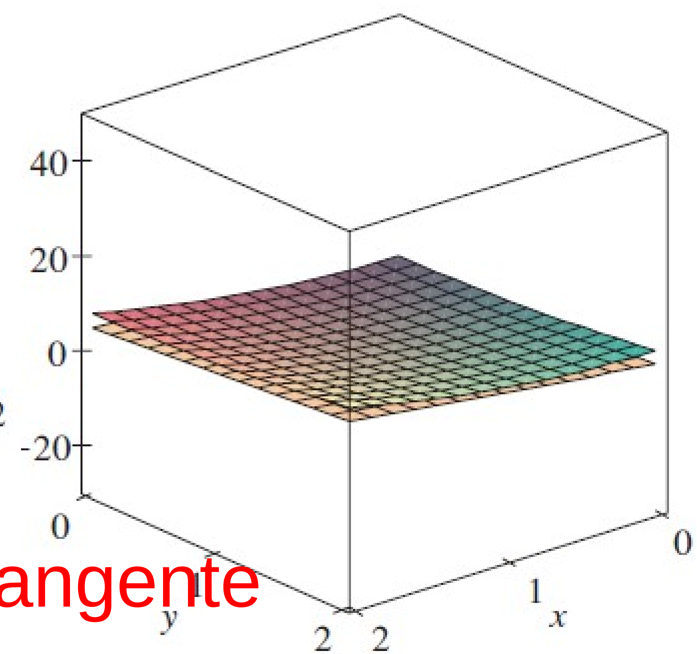
$z = 4x + 2y - 3$

# Aproximação Linear

Olhando para este exemplo, $z = 2x^2 + y^2$ com plano tangente $z = 4x + 2y - 3$ em torno de (1, 1, 3) cada vez mais de perto:



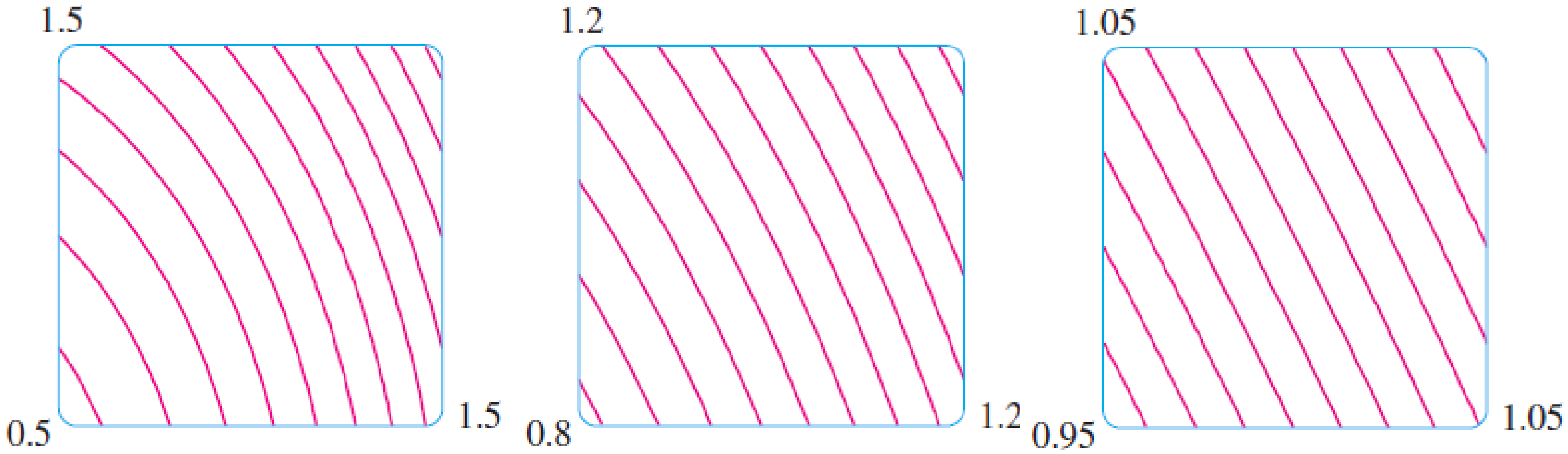




A parte da superfície em foco é cada vez mais parecida com o plano tangente

# Aproximação Linear

O mesmo se vê olhando para linhas de nível:




linhas cada vez mais retas e equidistantes, o que caracteriza um plano

# Aproximação Linear

Teste para ver, se o plano tangente é uma boa aproximação a $f$ perto de (1, 1) mesmo:

Chamando a função do plano $z = L(x, y) = 4x + 2y - 3$ e avaliando perto de (1, 1), em (1.1, 0.95):

$f(1.1, 0.95) = 2 \cdot 1.1^2 + 0.95^2 = 3.3225$

$L(1.1, 0.95) = 4 \cdot 1.1 + 2 \cdot 0.95 - 3 = 3.3$

Não podemos reclamar.

O plano tangente é chamada aproximação linear à superfície na vizinhança do ponto $(x_0, y_0, z_0)$, e a equação do plano, linearização de $f$ em $(x_0, y_0, z_0)$.

# Aproximação Linear

Às definições:

Seja $f(x, y)$ uma função de duas variáveis que tem derivadas parciais contínuas em um ponto $(a, b, f(a, b))$. Uma equação do plano tangente ao gráfico é:

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

A função linear cujo gráfico é esse plano tangente,

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

é denominado linearização de de $f$ em $(a, b)$,

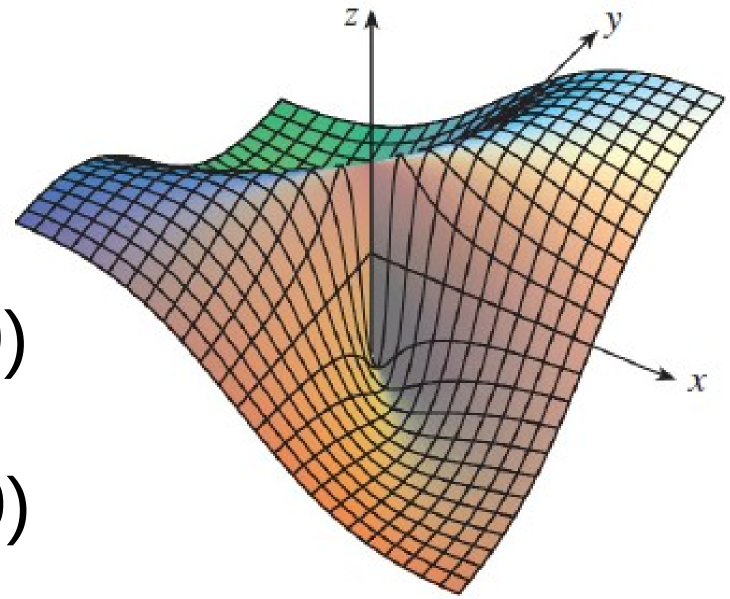
e a aproximação

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

é chamada aproximação linear ou aproximação pelo plano tangente de $f$ em $(a, b)$.

# Aproximação Linear

E se $f_x$ e $f_y$ não são contínuas?




Exemplo da terceira aula (limites):

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(Aula 3): As derivadas parciais existem,
i. e., na origem: $f_x(0, 0) = 0$ e $f_y(0, 0) = 0$,
mas obviamente, o plano $z = 0$ não é uma boa aproximação na origem (e nenhum outro plano).

=> Temos que achar um condição para uma função ser diferenciável em duas variávei.

# Diferenciabilidade

Em analogia ao caso 1D (=> FUV) podemos definir o incremento em $z$ devido a uma variação de $x$ de $a$ para $a+\Delta x$ e de $y$ de $b$ para $b+\Delta y$, como
$\Delta z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b)$,
e definir:

Se $z = f(x, y)$, então $f$ é diferenciável em $(a, b)$ se $\Delta z$ pode ser expresso da forma
$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$
onde $\varepsilon_1$ e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

"Quando $(x, y)$ tende a $(a, b)$, $f(x, y)$ tende ao seu plano tangente."

# Diferenciabilidade

Na prática, frequentemente esta condição é difícil de verificar.
O próximo teorema nos dá uma condição suficientemente conveniente para a diferenciabilidade:

Se as derivadas parciais $f_x$ e $f_y$ existirem perto do ponto $(a, b)$ e forem contínuas em $(a, b)$, então $f$ é diferenciável em $(a, b)$.

# Diferenciabilidade

Exemplo:

Mostre, que $f(x, y) = xe^{xy}$ é diferenciável em (1, 0) e determine sua linearização. Em seguida, use a linearização para aproximar $f(1.1, -0.1)$.

# Diferenciabilidade

Exemplo:

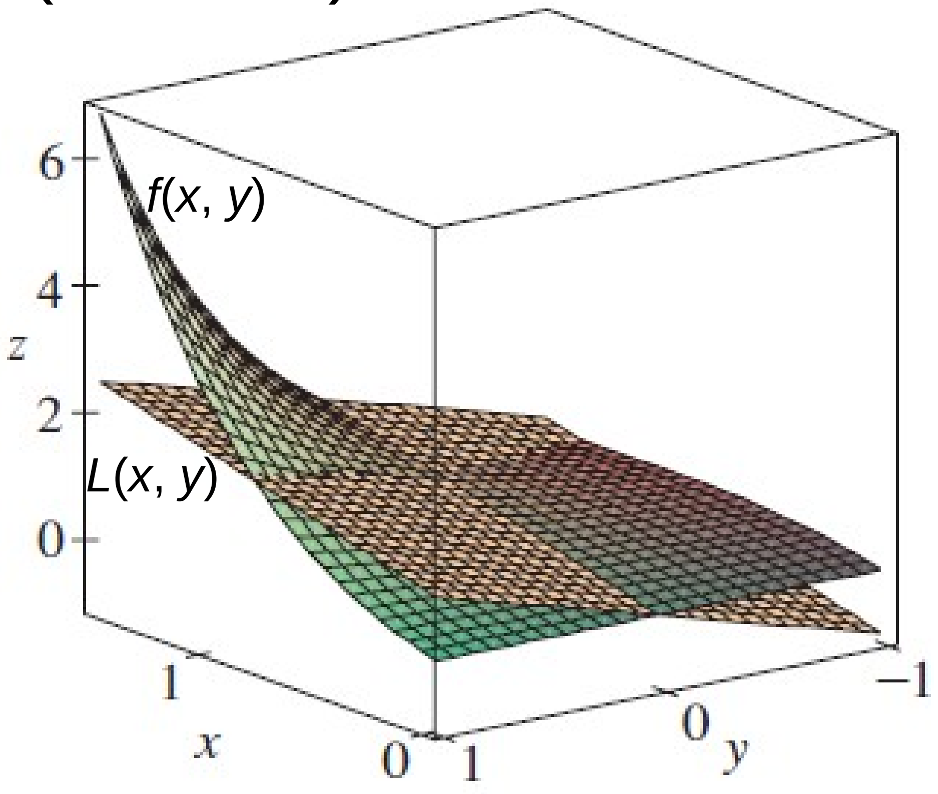
Mostre, que $f(x, y) = xe^{xy}$ é diferenciável em (1, 0) e determine sua linearização. Em seguida, use a linearização para aproximar $f(1.1, -0.1)$.

Quadro:

$L(x, y) = x + y$

=> $L(1.1, -0.1) = 1$

valor real: 0.98542



# Aproximação Linear

Exemplo:

Ache uma aproximação linear para o humidex (=> aula anterior)
$I[°C] = f(T[°C], H[\%])$
quando $T \approx 30$ °C
e $H \approx 60$ %.

Com esta aproximação, estime, $I(31, 62)$.

Umidade relativa

Temperatura real (°C)

| T \ H | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 28 | 28 | 29 | 31 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |
| 28 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 30 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 40 | 41 | 42 | 43 |
| 32 | 37 | 38 | 39 | 41 | 42 | 43 | 45 | 46 | 47 |
| 34 | 41 | 42 | 43 | 45 | 47 | 48 | 49 | 51 | 52 |
| 36 | 43 | 45 | 47 | 48 | 50 | 51 | 53 | 54 | 56 |

# Aproximação Linear

Exemplo:

Ache uma aproximação linear para o humidex (=> aula anterior)
$I$[°C] = $f$($T$[°C], $H$[%])
quando $T \approx 30$ °C
e $H \approx 60$ %.

Umidade relativa

| Temperatura real (°C) $T$ \ $H$ | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 28 | 28 | 29 | 31 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |
| 28 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 30 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 40 | 41 | 42 | 43 |
| 32 | 37 | 38 | 39 | 41 | 42 | 43 | 45 | 46 | 47 |
| 34 | 41 | 42 | 43 | 45 | 47 | 48 | 49 | 51 | 52 |
| 36 | 43 | 45 | 47 | 48 | 50 | 51 | 53 | 54 | 56 |

Com esta aproximação, estime, $I(31, 62)$.

Quadro: $I(T, H) \approx 38 + 1.75(T - 30) + 0.3(H - 60)$

para 31 °C, 62 %, $I \approx 40.4$ °C

# Diferenciais

A linearização pode ser usada para estimar variaçãoes em $z$ (ou $f$) ao fazer pequenas mudanças em $x$ e $y$, chamados diferenciais, em torno do ponto ($x$, $y$).

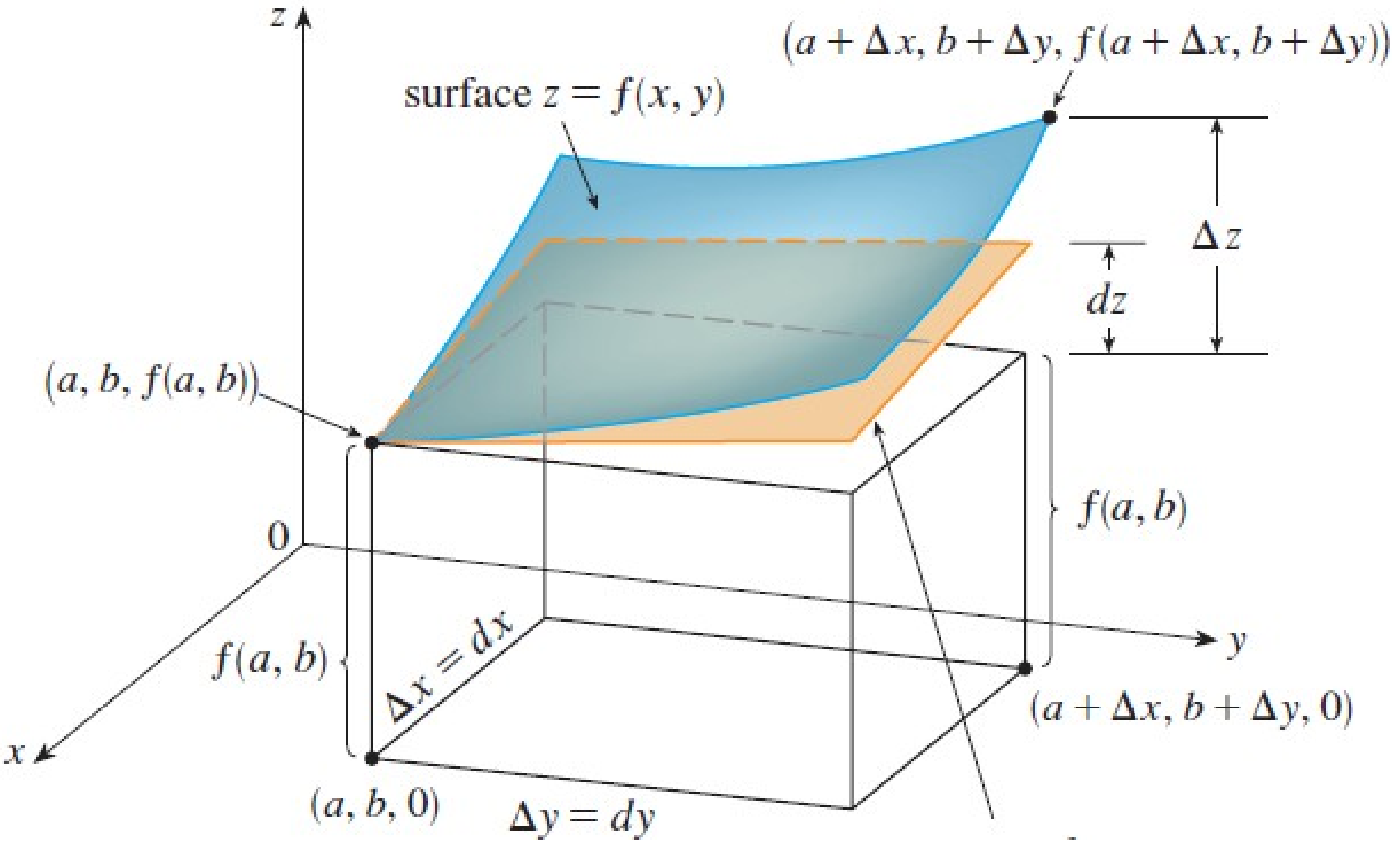
Para uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$, definimos as diferenciais $dx$ e $dy$ como variáveis independentes, ou seja, podem ter qualquer valor.
Então, a diferencial $dz$ (ou $df$), também chamada diferencial total, é definida por:

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

# Diferenciais

Se tomamos $dx = \Delta x = x - a$ e $dy = \Delta y = y - b$, então

$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$ e $f(x, y) \approx f(a, b) + dz$



# Diferenciais

Exemplo:

(a) Se $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, determine a diferencial $dz$.

(b) Se $x$ varia de 2 a 2.05 e $y$ varia de 3 a 2.96, compare os valores $\Delta z$ e $dz$.

# Diferenciais

Quadro:

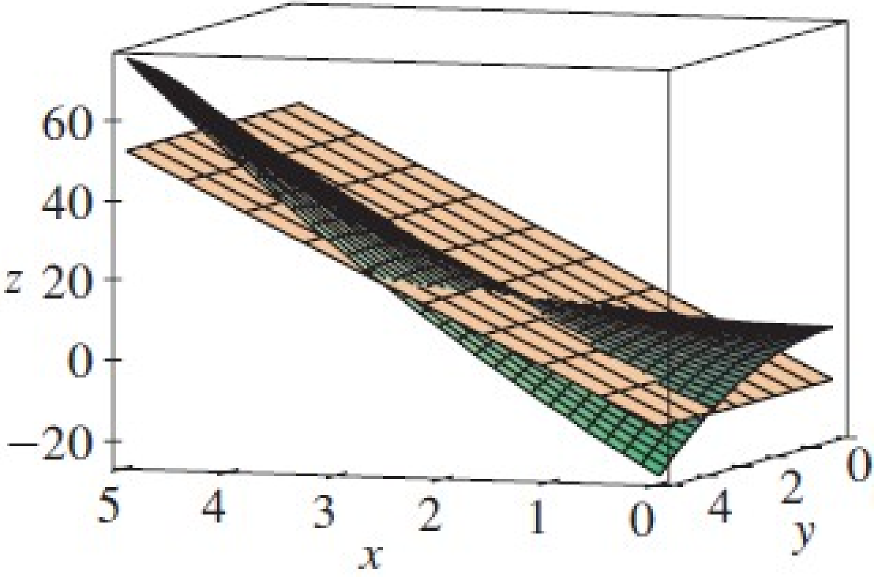
(a) $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy = (2x + 3y)dx + (3x - 2y)dy$

(b) Tomando-se $x = 2$, $y = 3$, $dx = \Delta x = 0.05$, $dy = \Delta y = -0.04$

$\Rightarrow dz = (2\cdot 2 + 3\cdot 3)\cdot 0.05 + (3\cdot 2 - 2\cdot 3)(-0.04) = 0.65$

$\Delta z = 2.05^2 + 3\cdot 2.05\cdot 2.96 - 2.96^2 - 2^2 - 3\cdot 2\cdot 3 + 3^2 = 0.6449$

Quase igual.



# Diferenciais

Diferenciais podem ser usados para estimar o erro máximo em uma grandeza que é função de grandezas que foram medidas, conhecendo os erros de medida nestas grandezas, mas é necessário usar os módulos das derivadas parciais, para nenhum erro contribuir com sinal negativo.

Seja $f(x, y)$ a grandeza de interesse, e sejam $\delta x$ e $\delta y$ os erros de medida em $x$ e $y$, então

$\delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\delta y$ é o erro máximo que pode resultar dos erros em $x$ e $y$.

# Diferenciais

Comentário:

$$\delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \delta y$$

calcula o erro em *f* supondo o pior caso, que os erros em *x* e *y* conspirem, isto é, ambos realizando seus valores máximos e implicando no mesmo sentido no valor de *f*.

Na prática, este pior caso é raro, e uma medida mais realista do erro em *f* seria:

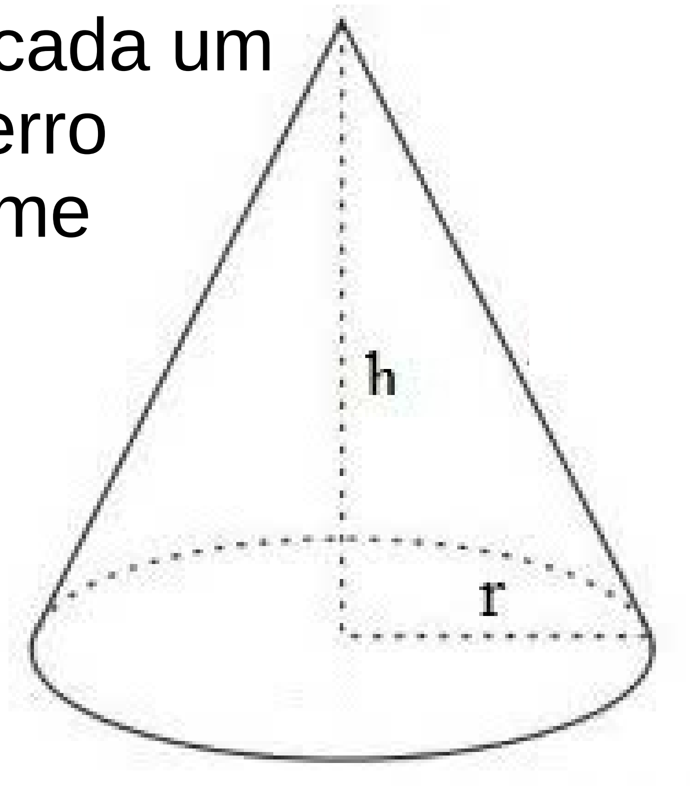
$$\delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\delta y)^2}$$

=> aulas de laboratório.

# Diferenciais

Exemplo:

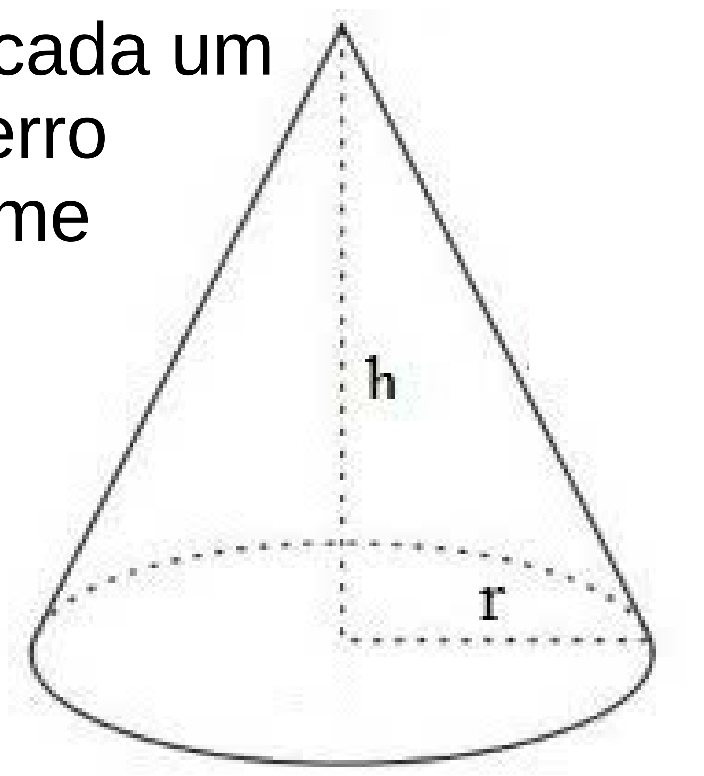
O volume $V$ do cone com raio da base $r$ e altura $h$ é
$V = \pi r^2 h/3$.
Se medimos $r$ = 10 cm e $h$ = 25 cm, cada um com erro máximo de 0.1 cm, qual o erro máximo cometido no cálculo do volume do cone?



# Diferenciais

Exemplo:

O volume $V$ do cone com raio da base $r$ e altura $h$ é
$V = \pi r^2 h/3$.
Se medimos $r$ = 10 cm e $h$ = 25 cm, cada um com erro máximo de 0.1 cm, qual o erro máximo cometido no cálculo do volume do cone?




Quadro: $\delta V = 20\pi$ cm$^3$,
da ordem de 2.5 %

# Funções de Três ou mais Variáveis

Os conceitos definidos nesta aula para funções de duas variáveis podem ser definidas de maneira análoga para as funções de mais de duas variáveis.

Por exemplo, para funções de três variáveis:

Se $w = f(x, y, z)$, então $f$ é diferenciável em $(a, b, c)$ se $\Delta w$ pode ser expresso da forma

$$\Delta w = f_x(a, b, c)\Delta x + f_y(a, b, c)\Delta y + f_z(a, b, c)\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z$$

onde $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ e $\varepsilon_3 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0, 0, 0)$.

Se as derivadas parciais $f_x$, $f_y$ e $f_z$ existirem perto do ponto $(a, b, c)$ e forem contínuas em $(a, b, c)$, então $f$ é diferenciável em $(a, b, c)$.

# Funções de Três ou mais Variáveis

Ainda para funções de três variáveis:

Seja $f(x, y, z)$ uma função de três variáveis que tem derivadas parciais contínuas em um ponto $(a, b, c, f(a, b, c))$. Uma equação do "plano" tangente ao gráfico é:

$$w = f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

A função linear cujo gráfico é esse plano tangente,

$$L(x, y, z) = f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

é denominado linearização de de $f$ em $(a, b, c)$,

e a aproximação

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

é chamada aproximação linear ou aproximação pelo plano tangente de $f$ em $(a, b, c)$.

# Funções de Três ou mais Variáveis

Ainda para funções de três variáveis:

A diferencial total é definida por:

$$dw = f_x(x, y, z)dx + f_y(x, y, z)dy + f_z(x, y, z)dz = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

$$dw = f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

e $f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + dw$

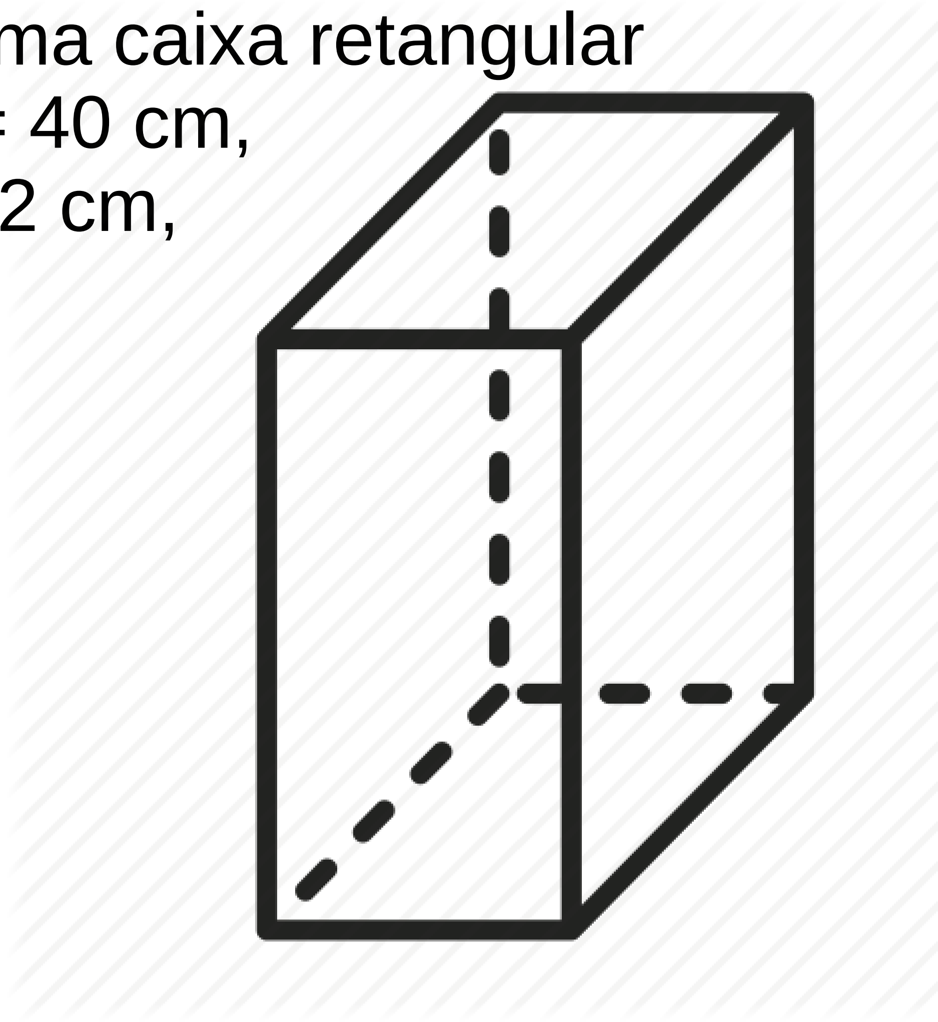
Seja $f(x, y, z)$ a grandeza de interesse, e sejam $\delta x$, $\delta y$ e $\delta z$ os erros de medida em $x$, $y$ e $z$, então

$\delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\delta z$ é o erro máximo que pode resultar dos erros em $x$, $y$ e $z$.

# Funções de Três ou mais Variáveis

Exemplo:

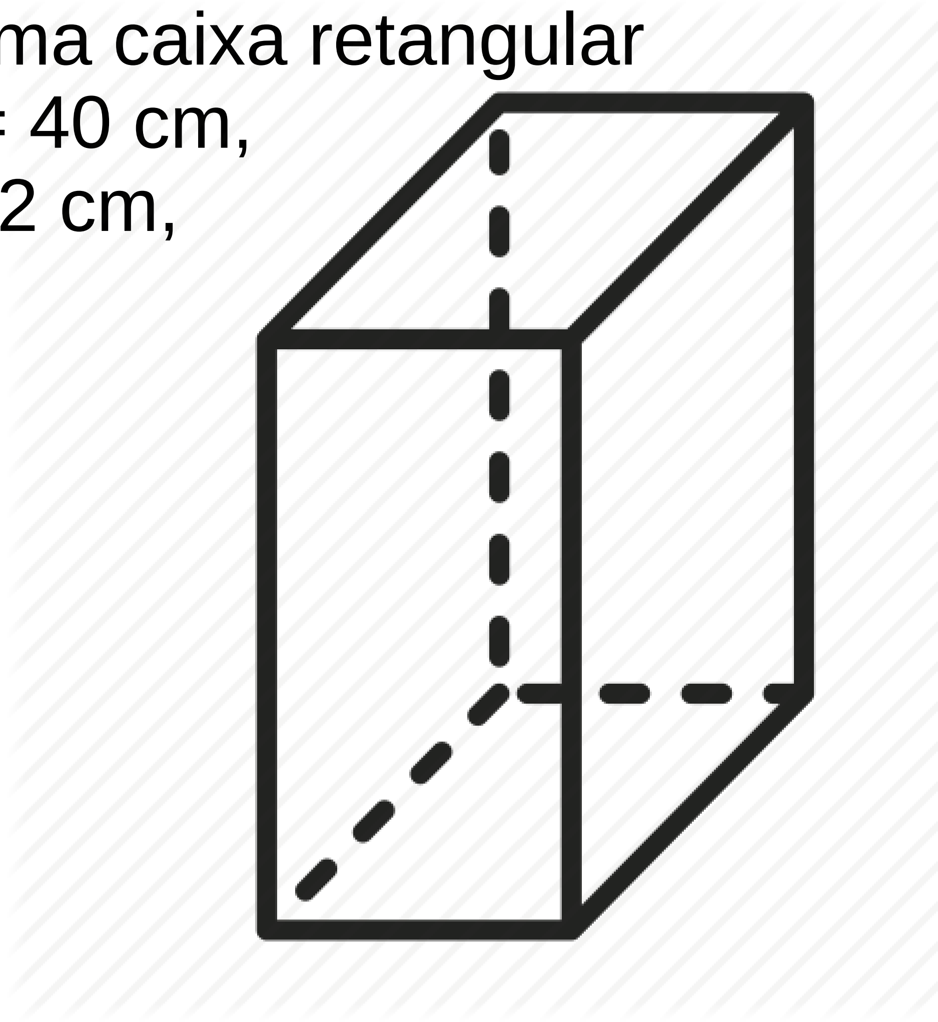
Se medimos as dimensões de uma caixa retangular como $x$ = 75 cm, $y$ = 60 cm e $z$ = 40 cm, cada um com erro máximo de 0.2 cm, qual o erro máximo cometido no cálculo do volume da caixa?



# Funções de Três ou mais Variáveis

Exemplo:

Se medimos as dimensões de uma caixa retangular como $x$ = 75 cm, $y$ = 60 cm e $z$ = 40 cm, cada um com erro máximo de 0.2 cm, qual o erro máximo cometido no cálculo do volume da caixa?



Quadro: $\delta V = 1980$ cm$^3$,
da ordem de 1 %

# Funções de Várias Variáveis

FIM PRA HOJE