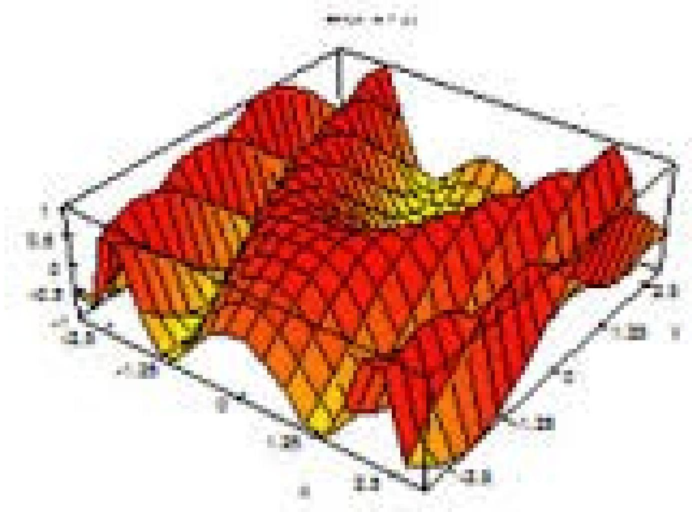
Funções de Várias Variáveis

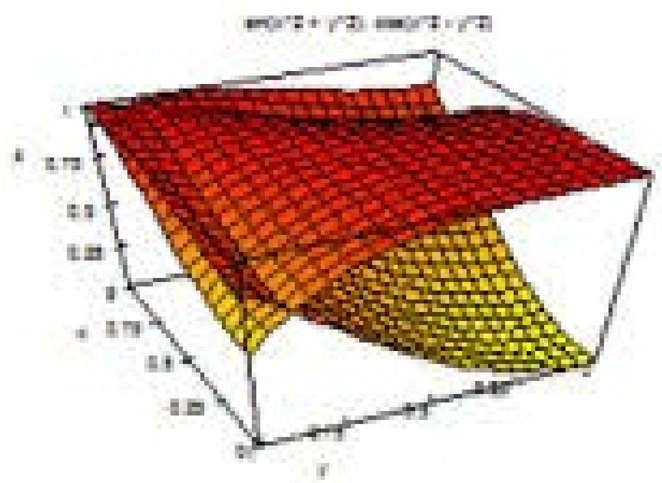
Universidade Federal do ABC

7. Regra da Cadeia

Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/FVV.html





Regra da Cadeia

Lembrete (FUV):

Para funções compostas de uma variável,

$y = f(g(x))$ ou $y = f \circ g(x)$,

a derivada em relação a x é

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = g'(x) \cdot f'(g(x)) = \frac{dy}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Exemplo:

$$\underbrace{d(\underbrace{\text{sen}}_{f}\ \underbrace{x^2}_{g(x)})}_{f(g(x))}/dx = \underbrace{2x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\underbrace{\cos}_{f'}\ \underbrace{x^2}_{g(x)}}_{f'(g(x))}$$

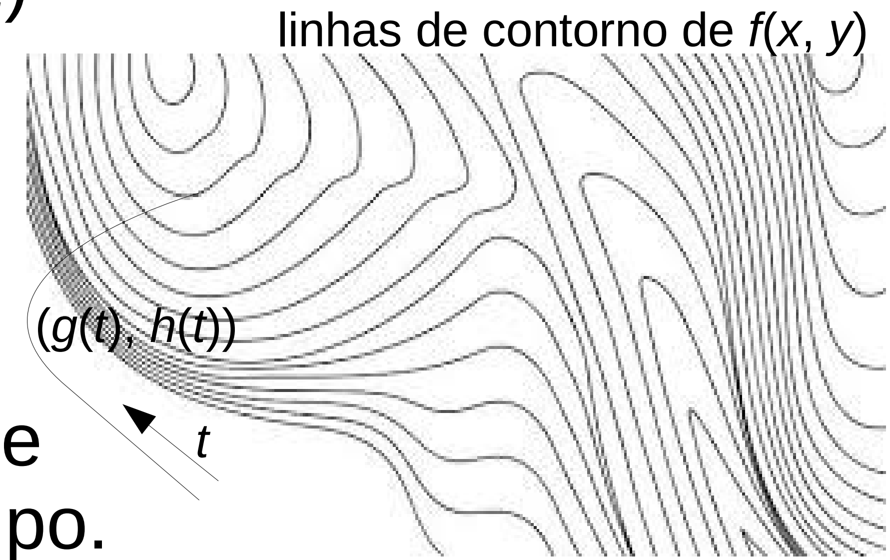
Regras similares valem para funções compostas de várias variáveis, como veremos nesta aula.

Regra da Cadeia

Função de duas funções de uma variável

$z = f(x, y)$, onde $x = g(t)$, $y = h(t)$
=> $z = f(g(t), h(t)) = z(t)$

Exemplo: f poderia ser a temperatura em função da posição no plano,e $(x(t), y(t))$, o trajetório que alguém percorre neste plano, em função do tempo.



=> $z(t) = f(g(t), h(t))$ é a temperatura que a pessoa sente em função do tempo (ao longo do caminho).

Queremos determinar dz/dt, a taxa de variação da temperatura que a pessoa sente.

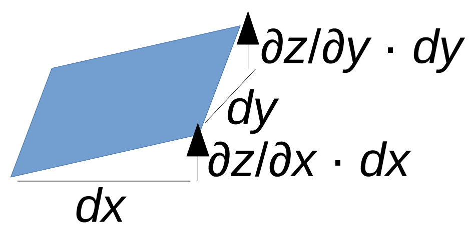
Regra da Cadeia

Função de duas funções de uma variável

$z = f(x, y)$, onde $x = g(t)$, $y = h(t)$
$\Rightarrow z = f(g(t), h(t)) = z(t)$

=> dz será a variação que z sofre devido ao movimento no plano xy, a soma da variação devido ao movimento na direção dos x e devido ao movimento na direção dos y:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$



$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Regra da Cadeia

Função de duas funções de uma variável

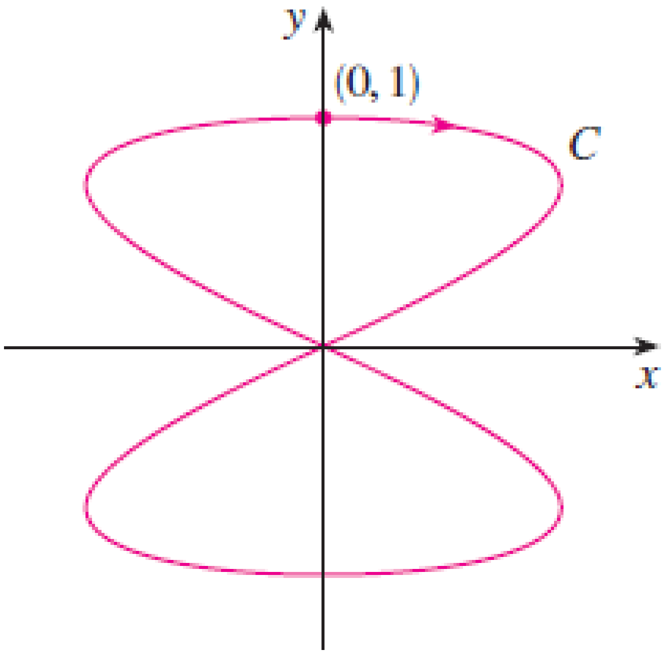
Formulação definitiva: Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(t)$, $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t.
Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Regra da Cadeia

Exemplo:

Se $z = x^2y + 3xy^4$,
onde $x = \text{sen } 2t$ e $y = \cos t$,
determine dz/dt quando $t = 0$.



A curva $x = \text{sen } 2t$, $y = \cos t$

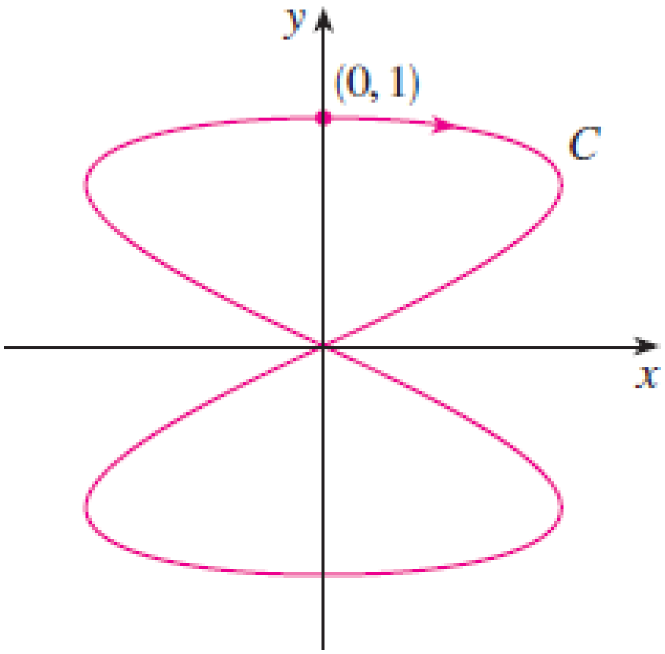
Regra da Cadeia

Exemplo:

Se $z = x^2y + 3xy^4$,
onde x = sen $2t$ e $y = \cos t$,
determine dz/dt quando $t = 0$.

Quadro:

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = 6$$



A curva x = sen $2t$, $y = \cos t$

Regra da Cadeia

Exemplo:

Estrutura da Matéria, Fenômenos Térmicos:
Lei dos gases ideais para um mol de gás: $PV = 8.31T$, onde P = pressão em kPa, V = volume em litros (L) e T = temperatura em K.
Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é 300 K e está aumentando com a taxa de 0.1 K/s e o volume é 100 L e está aumentando com a taxa de 0.2 L/s.

Regra da Cadeia

Exemplo:

Estrutura da Matéria, Fenômenos Térmicos:
Lei dos gases ideais para um mol de gás: $PV = 8.31T$, onde P = pressão em kPa, V = volume em litros (L) e T = temperatura em K.
Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é 300 K e está aumentando com a taxa de 0.1 K/s e o volume é 100 L e está aumentando com a taxa de 0.2 L/s.

Quadro: $\dfrac{dP}{dt}$ = (300 K, 100 L) = -0.04155 kPa/s

Regra da Cadeia

Função de três funções de uma variável

Esta regra da cadeia é fácil de estender para três dimensões (i. e. um mosca movimentando-se ao longo de uma curva no espaço 3D, onde a temperatura depende da posição (x, y, z))

Suponha que $w = f(x, y, z)$ seja uma função diferenciável de x, y e z, onde x, y e z são funções diferenciáveis de t. Então w é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Regra da Cadeia

Função de duas funções de duas variáveis

Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e t.
Então

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Aqui, s e t são os variáveis independentes,
x e y variáveis intermediárias, e
z, a variável dependente.

Regra da Cadeia

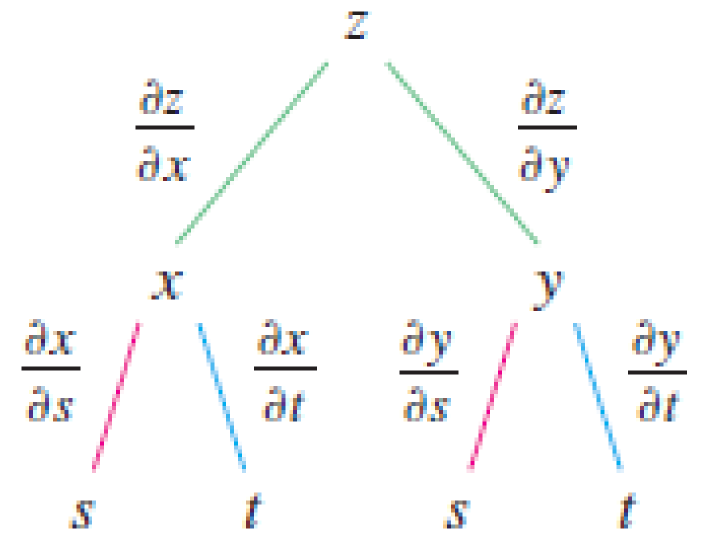
Função de duas funções de duas variáveis

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

São dois termos para *∂z/∂s* e dois para *∂z/∂t*.

Para se ter certeza de não esquecer nenhum termo, pode ser útil desenhor um diagrama de árvore.

Para cada caminho da variável dependente até as variáveis independentes, há um termo de derivada.



Regra da Cadeia

Exemplo:

se $z = e^x \operatorname{sen} y$, onde $x = st^2$ e $y = s^2t$, determine $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

Regra da Cadeia

Exemplo:

se $z = e^x \text{ sen } y$, onde $x = st^2$ e $y = s^2t$, determine $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Quadro:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = t^2 e^{st\wedge 2} \text{sen}(s^2t) + 2ste^{st\wedge 2} \cos(s^2t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2ste^{st\wedge 2} \text{sen}(s^2t) + s^2 e^{st\wedge 2} \cos(s^2t)$$

Regra da Cadeia

Versão Geral (n funções de m variáveis)

Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, onde cada x_j é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, t_2, ..., t_m$.

Então u é uma função diferenciável de $t_1, t_2, ..., t_m$ e

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, ..., m$.

$n \cdot m$ termos

Regra da Cadeia

Exemplo:

Escreva a regra da cadeia para o caso onde
$w = f(x, y, z, t)$ e $x = x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ e $t(u, v)$.

Regra da Cadeia

Exemplo:

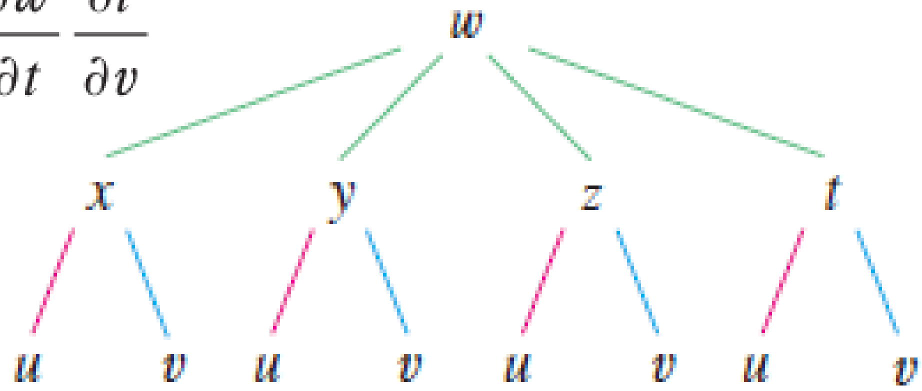
Escreva a regra da cadeia para o caso onde
w = *f*(*x*, *y*, *z*, *t*) e *x* = *x*(*u*, *v*), *y*(*u*, *v*), *z*(*u*, *v*) e *t*(*u*, *v*).

Solução:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}$$

diagrama de árvore



2·4 = 8 termos

Regra da Cadeia

Exemplo:

Se $u = x^4y + y^2z^3$, onde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ e $z = r^2s$ sen t, determine o valor de $\partial u/\partial s$ quando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

Regra da Cadeia

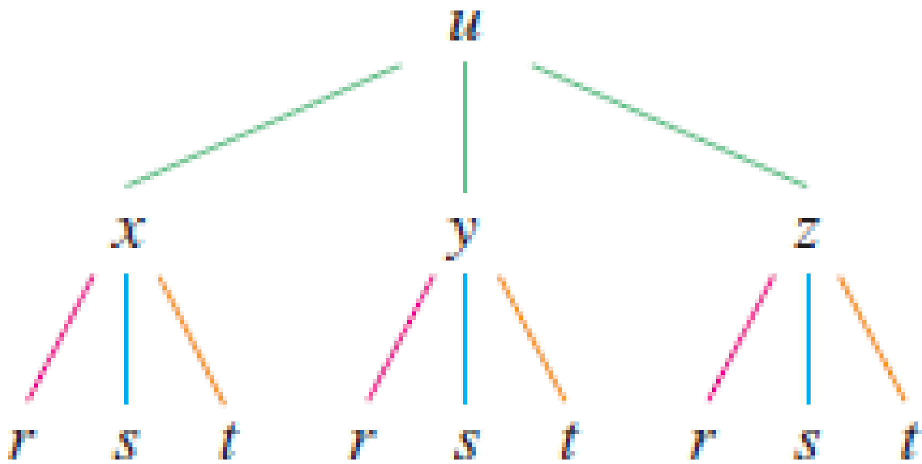
Exemplo:

Se $u = x^4y + y^2z^3$, onde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ e $z = r^2s$ sen t, determine o valor de $\partial u/\partial s$ quando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

Quadro:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(2, 1, 0) = 192$$

diagrama de árvore



Regra da Cadeia

Exemplo:

Se $g(s, t) = f(s^2\text{-}t^2, t^2\text{-}s^2)$ e f é diferenciável, mostre que g satisfaz a equação

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

Regra da Cadeia

Exemplo:

Se $g(s, t) = f(s^2\text{-}t^2, t^2\text{-}s^2)$ e f é diferenciável, mostre que g satisfaz a equação

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

Quadro:

$$t\,\frac{\partial g}{\partial s} + s\,\frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st\,\frac{\partial f}{\partial x} - 2st\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(-2st\,\frac{\partial f}{\partial x} + 2st\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

Regra da Cadeia

Exemplo:

Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $x = r^2 + s^2$ e $y = 2rs$, determine

(a) $\partial z/\partial r$ e

(b) $\partial^2 z/\partial r^2$.

Regra da Cadeia

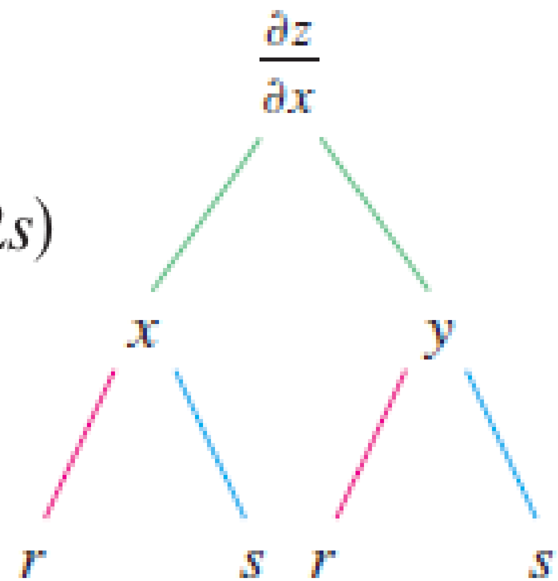
Exemplo:

Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $x = r^2 + s^2$ e $y = 2rs$, determine

(a) $\partial z/\partial r$ e

(b) $\partial^2 z/\partial r^2$.

diagrama de árvore



Quadro:

(a) $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}(2r) + \dfrac{\partial z}{\partial y}(2s)$

(b) $\partial^2 z/\partial r^2 = 2\dfrac{\partial z}{\partial x} + 4r^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 4s^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Derivação Implícita

A regra da cadeia ajuda para achar, por derivação implícita, a derivada de uma função $y = f(x)$, para aquela vale:

$F(x, f(x)) = 0$

f e F sendo deriváveis no domínio de interesse.

Anote, que F é uma função de x, isto é, x é a (única) variável independente, e y é uma variável intermediária de F.

Para poder usar a regra da cadeia, temos que interpretar o primeiro argumente de F, x, como função de x:

$F = F(x(x), y(x)) = 0$

Derivação Implícita

$F = F(x(x), y(x)) = 0$

Agora podemos derivar os dois lados da equação, o lado esquerdo usando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Mas *dx*/*dx* é 1, então obtemos: $\partial F/\partial x + \partial F/\partial y \cdot dy/dx = 0$

=> $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Tendo encontrado desta maneira *dy*/d*x*, podemos determinar *y*(*x*) por integração.

Derivação Implícita

Este resultado, junto com as condições, naquelas ele vale, pode ser formulado como o

Teorema da Função Implícita:

Se F é definida em uma bola aberta contendo (a, b), onde $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$, e F_x e F_y são funções contínuas nessa bola, então a equação $F(x, y) = 0$ define y como uma função de x perto do ponto (a, b) e a derivada dessa função é dada por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Derivação Implícita

Exemplo:

Determine y' se $x^3 + y^3 = 6xy$.

Derivação Implícita

Exemplo:

Determine y' se $x^3 + y^3 = 6xy$.

Quadro:

$dy/dx = -(x^2 - 2y)/(y^2 - 2x)$

Derivação Implícita

De maneira análoga podemos achar as derivadas parciais $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ de uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$ dada por $F(x, y, z = f(x, y)) = 0$:

Derivando em x: $$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Mas $\partial x/\partial x = 1$ e $\partial y/\partial x = 0$, então $\partial F/\partial x + \partial F/\partial z \cdot dz/dx = 0$.

Derivando em y obtemos $\partial F/\partial y + \partial F/\partial z \cdot dz/dy = 0$.

=> $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Derivação Implícita

Levando a esta versão do

Teorema da Função Implícita:

Se F é definida em uma esfera contendo (a, b, c), onde $F(a, b, c) = 0$, $F_z(a, b, c) \neq 0$, e F_x, F_y e F_z são contínuas dentro da esfera, então a equação $F(x, y, z) = 0$ define z como uma função de x e y perto do ponto (a, b, c) e as derivadas parciais dessa função são dadas por

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

Derivação Implícita

Exemplo:

Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ se $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

Derivação Implícita

Exemplo:

Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ se $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

Quadro:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -(x^2 + 2yz)/(z^2 + 2xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -(y^2 + 2xz)/(z^2 + 2xy)$$

(mesma solução que na aula 5)

Funções de Várias Variáveis

FIM PRA HOJE