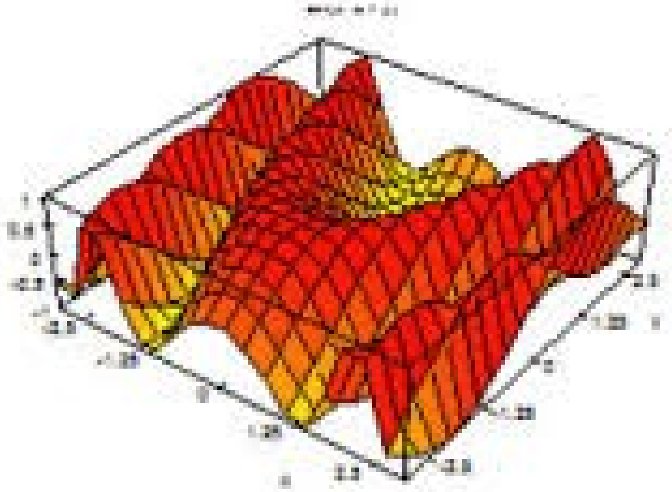
Universidade Federal do ABC

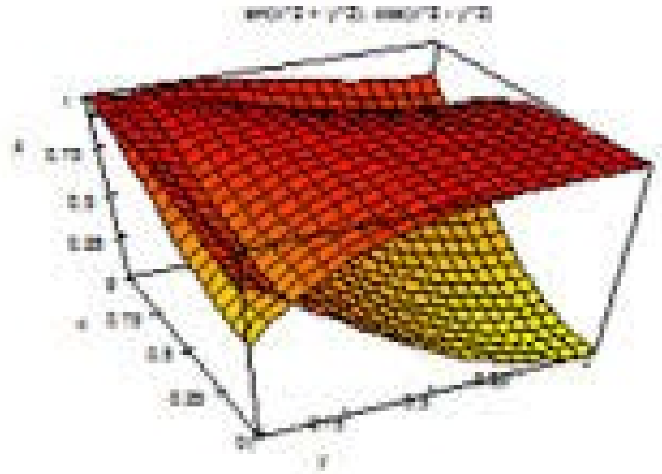
Funções de Várias Variáveis

8. Derivadas direcionais e Vetor Gradiente

Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

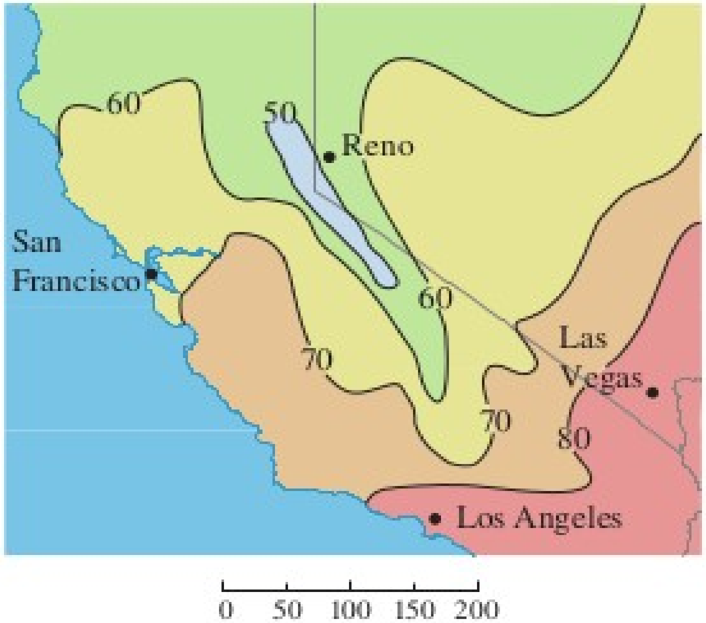
http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/FVV.html





Derivadas Direcionais

Ao lado: Um mapa de linhas de contorno da temperatura (*T* ou *f*, em °F) em California e Nevada às 15:00 num dia em outubro.



Distância em milhas

Tomando a longitude como eixo x e a latitude, como eixo y, as derivadas parciais $\partial T/\partial x$ e $\partial T/\partial y$ (ou $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$) significam as taxas de variação de temperatura (em °F/milhas) nas direções leste e norte, respectivamente.

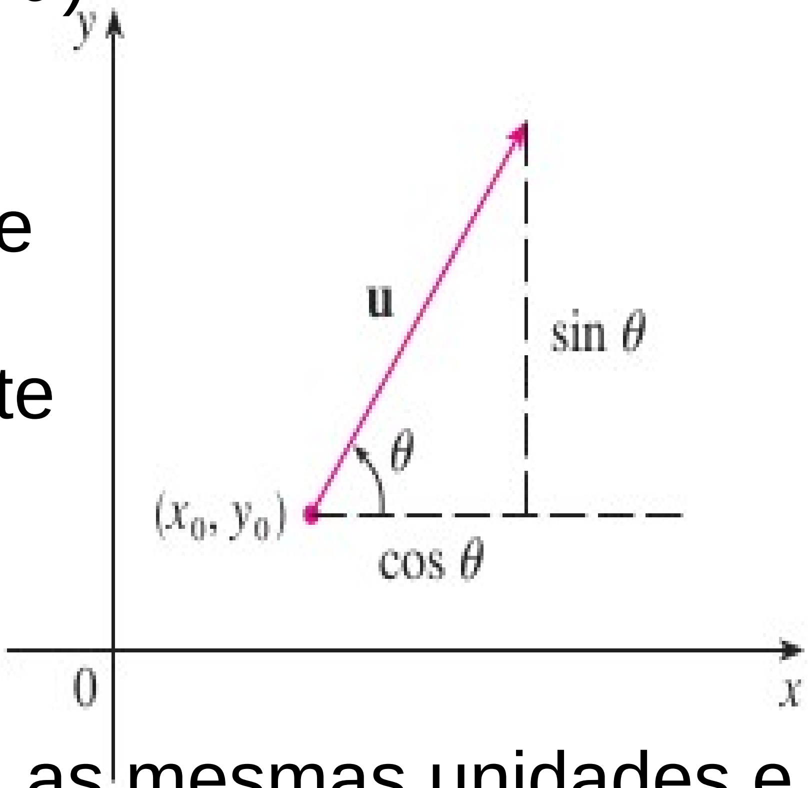
Mas se quiséssemos conhecer a taxa na direção sudoeste (por exemplo em Reno direção Las Vegas) ou numa direção qualquer?

Derivadas Direcionais

Definimos **u** = (*a* = cos θ, *b* = sen θ) como o vetor unitário na direção de interesse.

Um passeio na direção de **u** pode ser descrita como função da distância percorrida, *t*, da seguinte maneira:

$$(x(t), y(t)) = (x_0, y_0) + t\cdot\mathbf{u}$$
$$= (x_0+t\cdot a, y_0+t\cdot b).$$



Por **u** ser um vetor unitário, *t* tem as mesmas unidades e está na mesma escala que *x* e *y*.

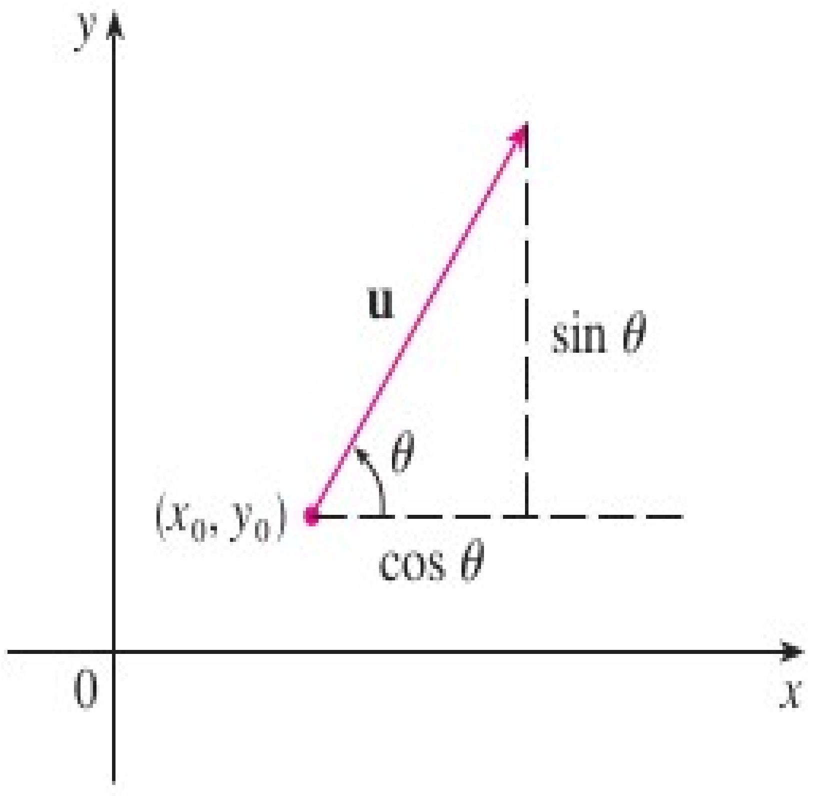
Uma variação por uma unidade em *t* corresponde a um deslocamento pela mesma distância que um deslocamento por uma unidade na direção de *x* ou *y*.

Derivadas Direcionais

$\dfrac{\partial f}{\partial t}$ é, então, a taxa de variação de f na direção de **u**.

Chamamos ela de derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção de **u**:

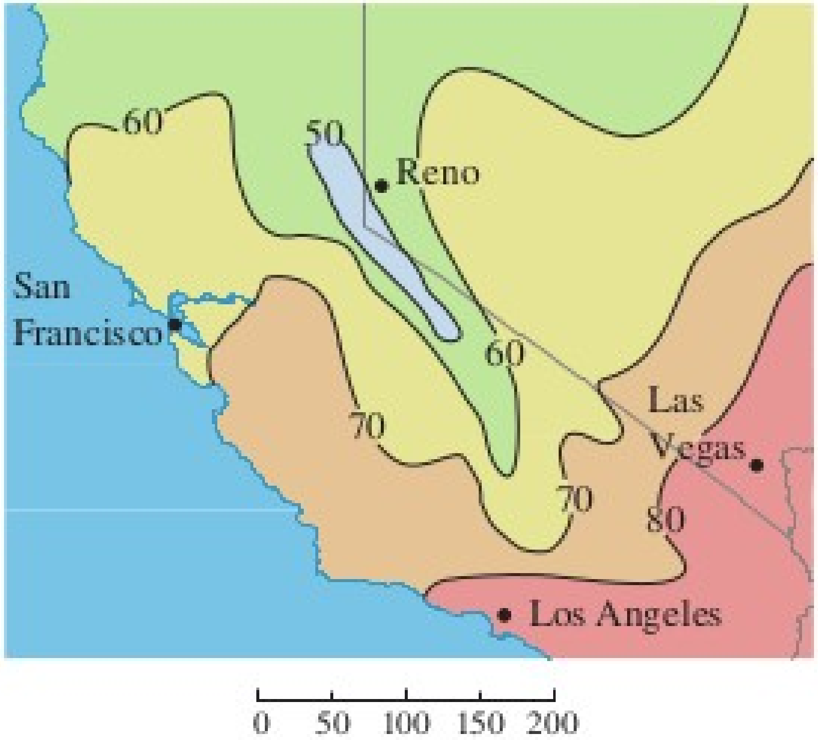
$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$



Derivadas Direcionais

Exemplo:

Utilize este mapa para estimar o valor da derivada direcional da função temperatura em Reno na direção sudoeste

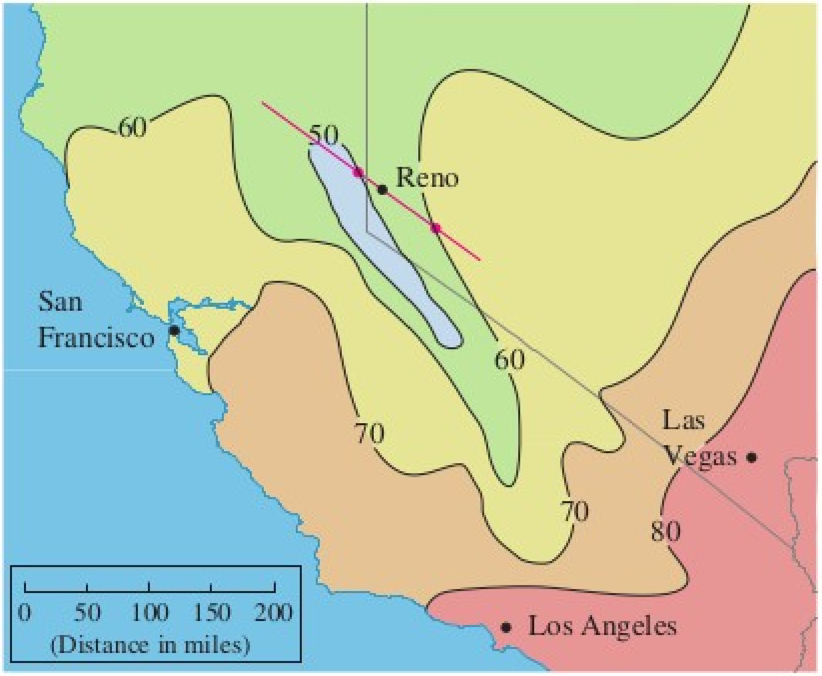


Distância em milhas

Derivadas Direcionais

Exemplo:

Utilize este mapa para estimar o valor da derivada direcional da função temperatura em Reno na direção sudoeste



Estimando a distância entre as interseções das curvas T = 50 °F e T = 60 °F com a linha nordeste-sudoeste que passa por Reno: ~75 milhas

=> $D_{\mathbf{u}}T \approx (60 - 50)/75$ °F/mi ≈ 0.13 °F/mi,

onde $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, o vetor unitário na direção SO.

Derivadas Direcionais

E calculando?

Usando a regra da cadeia conseguimos exprimir $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ como:

$$\frac{df}{dt}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}(x_0, y_0)$$

$$= a \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + b \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Derivadas Direcionais

E calculando?

Alternativamente, podemos usar a definição:
A derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = (a, b)$ é

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esse limite existir.

Derivadas Direcionais

Formulamos o seguinte teorema:

Se f é uma função diferenciável de x e y, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor unitário $\mathbf{u} = (a, b)$ e

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Nas direções dos eixos x e y, os vetores unitários são os da base canônica $\mathbf{i} = (1, 0)$ e $\mathbf{j} = (0, 1)$, e as derivadas direcionais são as derivadas parciais:

$$D_{\mathbf{i}}f(x, y) = f_x(x, y)\cdot 1 + f_y(x, y)\cdot 0 = f_x(x, y) \quad \text{e}$$

$$D_{\mathbf{j}}f(x, y) = f_x(x, y)\cdot 0 + f_y(x, y)\cdot 1 = f_y(x, y)$$

Derivadas Direcionais

Exemplo:

Determine a derivada direcional
$D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ se
$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$
e **u** é o vetor unitário dado pelo
ângulo $\theta = \pi/6$.
Qual será $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$?

Derivadas Direcionais

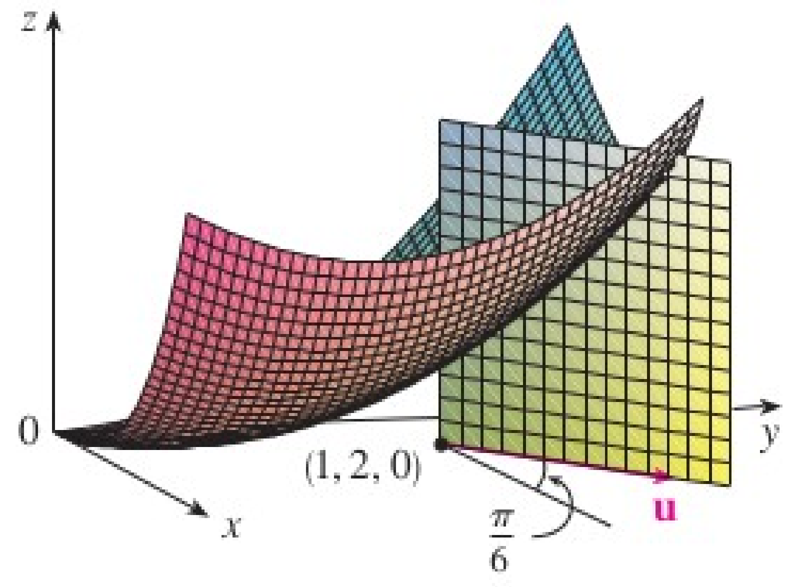
Exemplo:

Determine a derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ se

$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$

e **u** é o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \pi/6$.

Qual será $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$?



Quadro:

$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \frac{1}{2}[3\sqrt{3}x^2 - 3x + (8 - 3\sqrt{3})y]$

$D_{\mathbf{u}}f(1, 2) = (13 - 3\sqrt{3})/2$

Vetor Gradiente

Olhando de novo pra maneira de calcular a derivada parcial:

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Isto pode ser entendido como o produto escalar de **u** e o vetor $(f_x(x, y), f_y(x, y))$:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= f_x(x, y)a + f_y(x, y)b = (f_x(x, y), f_y(x, y)) \cdot (a, b) \\ &= (f_x(x, y), f_y(x, y)) \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

O primeiro vetor é chamado gradiente de f :

$(f_x(x, y), f_y(x, y)) =:$ **grad** f ou ∇f (“del f ”)

($\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ é o operador gradiente 2D ou nabla)

Vetor Gradiente

Definição:

Se f é uma função de duas variáveis x e y, o gradiente de f é a função vetorial ∇f definida por:

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

Podemos escrever a derivada direcional como

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

Vetor Gradiente

Exemplo:

Se $f(x, y) = \text{sen } x + e^{xy}$, então

$\nabla f(x, y) = (f_x, f_y) = (\cos x + ye^{xy}, xe^{xy})$

e

$\nabla f(0, 1) = (2, 0)$

Vetor Gradiente

Exemplo:

Determine a derivada direcional da função
$f(x, y) = x^2y^3 - 4y$
no ponto (2, -1) na direção $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
! **v** não é um vetor unitário

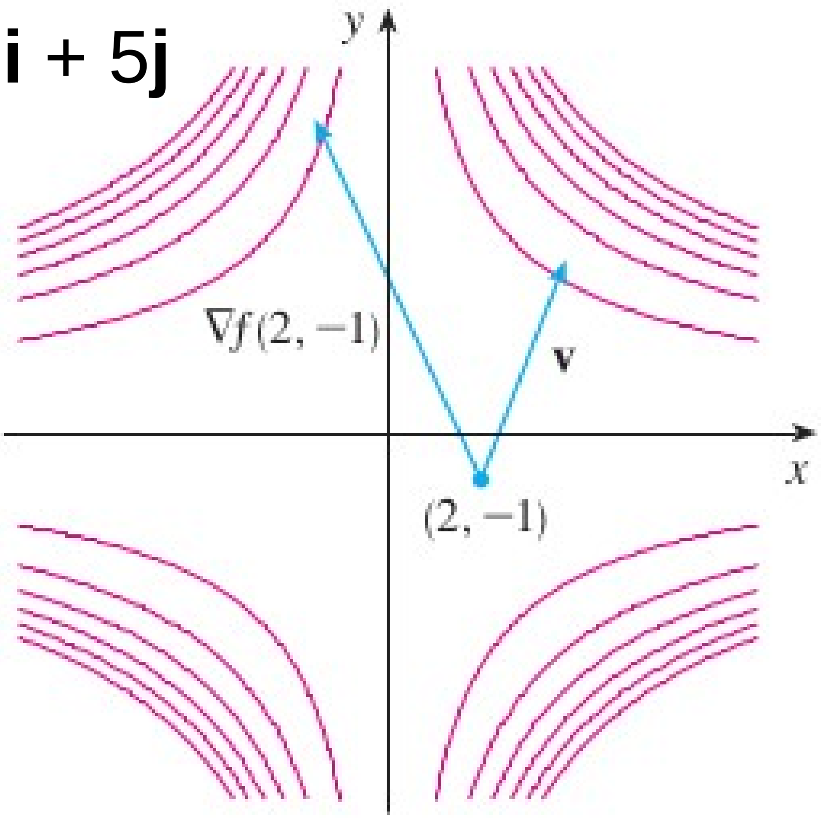
Vetor Gradiente

Exemplo:

Determine a derivada direcional da função
$f(x, y) = x^2y^3 - 4y$
no ponto (2, -1) na direção $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
! **v** não é um vetor unitário

Quadro:

$D_{\mathbf{u}}f(2, -1) = 32/\sqrt{29}$



Funções de Três Variáveis

Os conceitos de derivada direcional e gradiente são fáceis de estender para funções de três variáveis:

Definição:
A derivada direcional de f em (x_0, y_0, z_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = (a, b, c)$ é

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

se esse limite existir.

Notação vetorial (também pode ser usada para funções de duas ou mais de três variáveis):

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

Funções de Três Variáveis

Teorema:

Se f é uma função diferenciável de x, y e z, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor unitário $\mathbf{u} = (a, b, c)$ e

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = f_x(x, y, z)a + f_y(x, y, z)b + f_z(x, y, z)c$$

Nas direções dos eixos x e y e z (vetores unitários $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$):

$$D_{\mathbf{i}}f(x, y, z) = f_x(x, y, z),$$
$$D_{\mathbf{j}}f(x, y, z) = f_y(x, y, z) \quad \text{e}$$
$$D_{\mathbf{k}}f(x, y, z) = f_z(x, y, z)$$

Funções de Três Variáveis

Definição:

Se f é uma função de três variáveis x, y e z, o gradiente de f é a função vetorial ∇f definida por:

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Podemos escrever a derivada direcional como

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$$

Funções de Três Variáveis

Exemplo:

Se $f(x, y, z) = x \text{ sen } yz$,
(a) determine o gradiente de f e
(b) determine a derivada direcional de f
no ponto (1, 3, 0) na direção de $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$.

Funções de Três Variáveis

Exemplo:

Se $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$,
(a) determine o gradiente de f e
(b) determine a derivada direcional de f
no ponto (1, 3, 0) na direção de $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$.

Quadro:

(a) $\nabla f(x, y, z) = (\operatorname{sen} yz,\ xz \cos yz,\ xy \cos yz)$
(b) $D_{(1,\ 2,-1)/\sqrt{6}} f(1, 3, 0) = -\sqrt{(3/2)}$

Vetor Gradiente

Interpretação do Vetor Gradiente

Será que o vetor gradiente tem algum significado além do de ferramenta para achar derivadas direcionais?

Vetor Gradiente

Interpretação do Vetor Gradiente

Olhamos, em que direção a função f aumenta o mais rapidamente, a "direção de maior aumento" de f.

Taxa de aumento na direção do vetor unitário **u**:

$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f|\,|\mathbf{u}| \cos \theta = |\nabla f| \cos \theta$,

onde θ é ângulo entre ∇f e **u**.

O máximo ocorre em $\theta = 0$, isto é:

O gradiente de f aponta justamente na direção do maior aumento, e seu módulo é a taxa e aumento de f nesta direção (ou seja, o valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f$).

Vetor Gradiente

Exemplo:

(a) Se $f(x, y) = xe^y$, determine a taxa de variação de f no ponto $P(2, 0)$ na direção de P a $Q(\frac{1}{2}, 2)$.
(b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é a máxima taxa de variação?

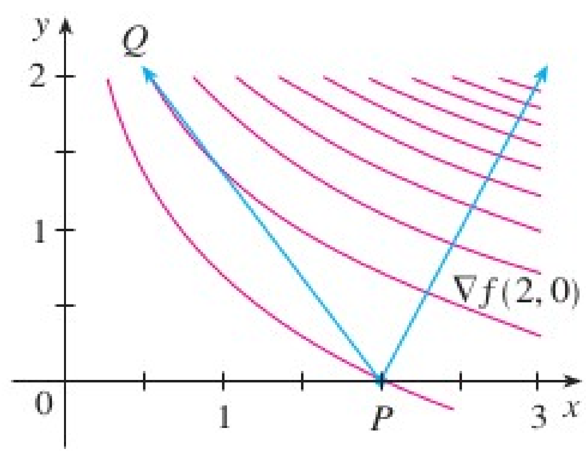
Vetor Gradiente

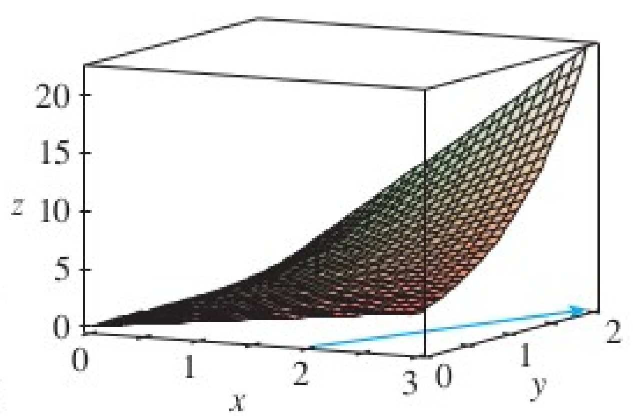
Exemplo:

(a) Se $f(x, y) = xe^y$, determine a taxa de variação de f no ponto $P(2, 0)$ na direção de P a $Q(\frac{1}{2}, 2)$.
(b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é a máxima taxa de variação?

Quadro:

(a) $D_{\mathbf{u}}f(2, 0) = 1$
(b) $|\nabla f(2, 0)| = \sqrt{5}$





Vetor Gradiente

Exemplo:

Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) do espaço seja dada por $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, onde T é medida em graus Celsius e x, y e z, em metros. Em que direção no ponto (1, 1, -2) a temperatura aumenta mais rapidamente?
Qual é a taxa máxima de aumento?

Vetor Gradiente

Exemplo:

Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) do espaço seja dada por $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, onde T é medida em graus Celsius e x, y e z, em metros. Em que direção no ponto (1, 1, -2) a temperatura aumenta mais rapidamente?
Qual é a taxa máxima de aumento?

Quadro:

Na direção (-1, -2, 6)
Taxa máxima: $\frac{5}{8}\sqrt{41}$ °C/m ≈ 4 °C/m

Plano Tangente às Superfícies de Nível

Seja $F(x, y, z)$ uma função de três variáveis, e S:

$F(x, y, z) = k$,

a superfície de nível k de F, $P(x_0, y_0, z_0)$, um ponto sobre S e C uma curva contida em S que passe pelo ponto P, parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, onde $\mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

Assim,

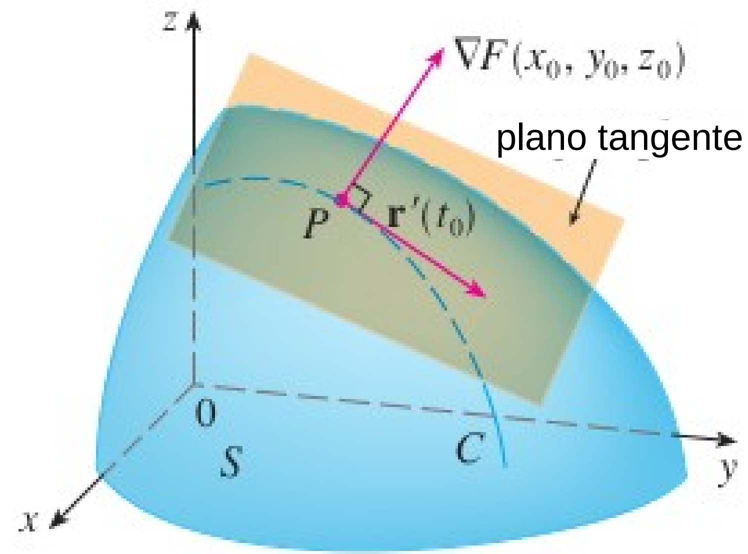
$F(x(t), y(t), z(t)) = k$.

Derivando os dois lados em t:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Mas o lado esquerdo pode ser escrito como $\nabla F \cdot \mathbf{r}'(t)$.

Plano Tangente às Superfícies de Nível



$\nabla F \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$, por exemplo para t_0:

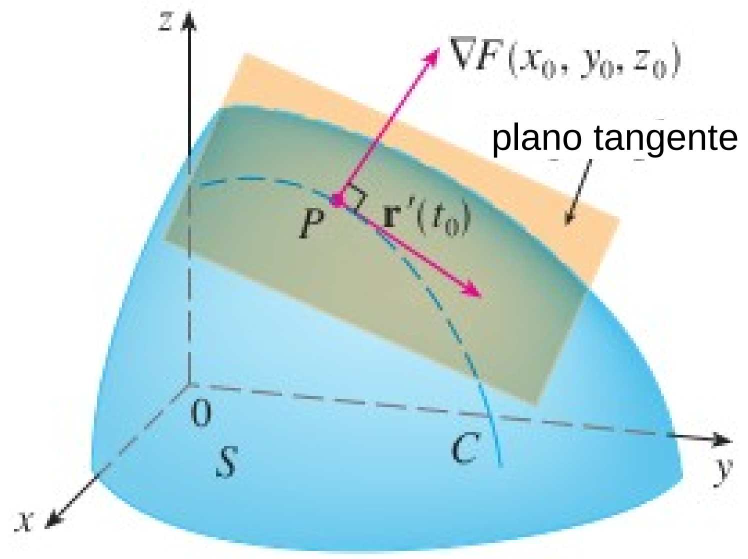
$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$

Já que $\mathbf{r}'(t_0)$ aponta na direção da tangente a C em P, $\mathbf{r}'(t_0)$ faz parte do plano tangente a S, e $\nabla F(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$ significa, que $\mathbf{r}'(t_0)$ é perpendicular a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

Já que isto vale para todas as tangentes a curvas em S, isto significa que todo o plano tangente é perpendicular a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

Plano Tangente às Superfícies de Nível

O plano tangente é perpendicular a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, e com isto a própria superfície de nível k.

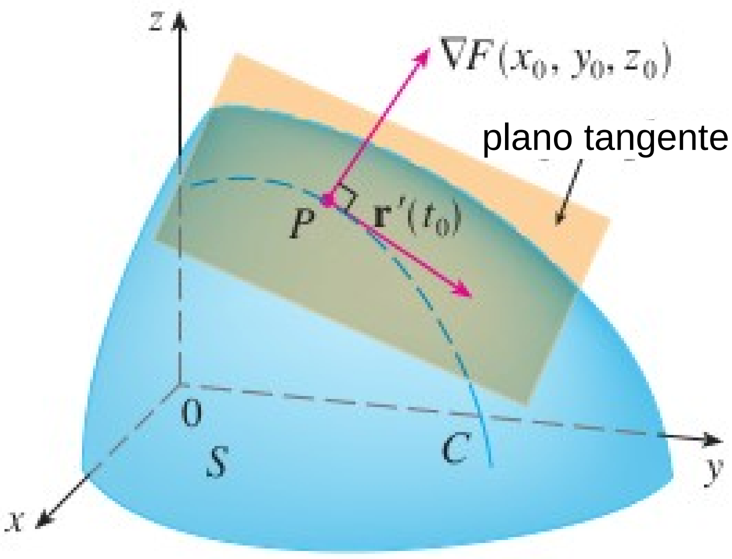


Poderíamos ter chegado nesta conclusão usando derivadas direcionais:

Em direções **u** dentro da superfície de nível k,
F é constante
=> $D_{\mathbf{u}}F = \nabla F \cdot \mathbf{u} = 0$.
=> $\mathbf{u} \perp \nabla F$.

Plano Tangente às Superfícies de Nível

(=> primeira aula)
Equação do plano tangente
à superfície de nível k
em $P(x_0, y_0, z_0)$:



$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

e as equações simétricas da reta normal:

$$(x - x_0)/F_x(x_0, y_0, z_0) = (y - y_0)/F_y(x_0, y_0, z_0) = (z - z_0)/F_z(x_0, y_0, z_0).$$

Plano Tangente às Superfícies de Nível

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Uma superfície S da forma $z = f(x, y)$ (=> aula 6) pode ser entendida como superfície de nível (0) da função $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$

$$\Rightarrow F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0),$$
$$F_y(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0),$$
$$F_z(x_0, y_0, z_0) = -1.$$

A equação do plano tangente se torna:

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

o mesmo resultado que na aula 6.

Plano Tangente às Superfícies de Nível

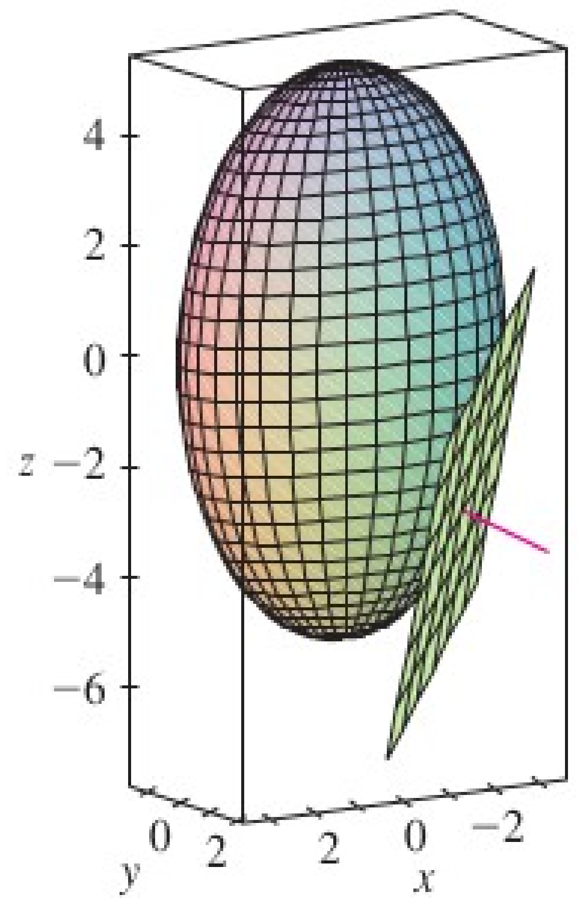
Exemplo:

Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto (-2, 1, -3) ao elipsoide
$x^2/4 + y^2 + z^2/9 = 3$

Plano Tangente às Superfícies de Nível

Exemplo:

Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto (-2, 1, -3) ao elipsoide
$x^2/4 + y^2 + z^2/9 = 3$



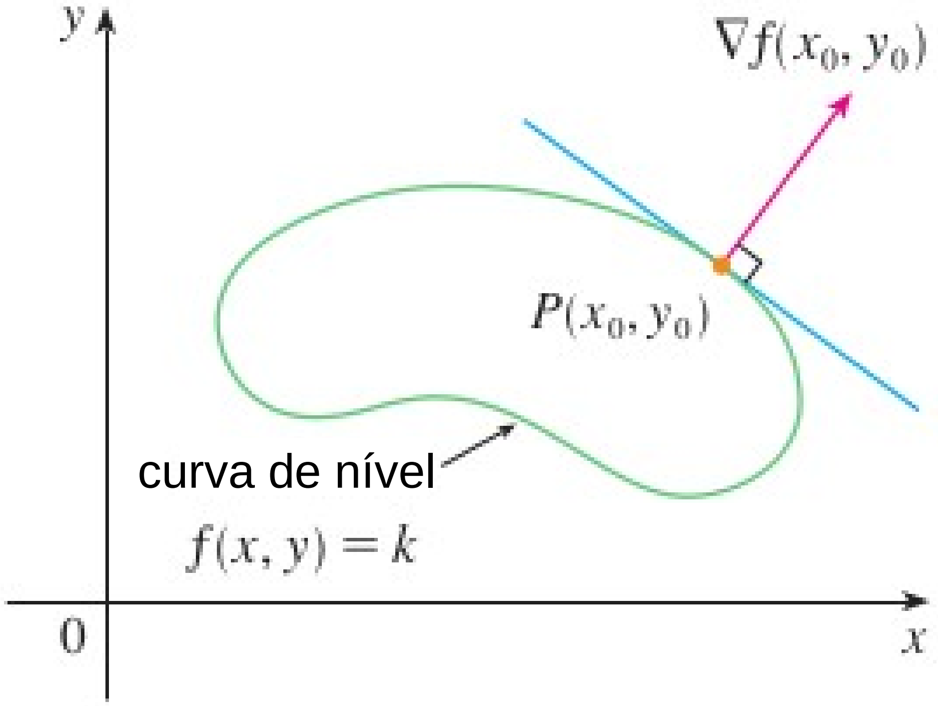
Quadro:

reta normal:
$\mathbf{r}(t) = (-2, 1, -3) + t\cdot(-1, 2, -\tfrac{2}{3})$ ou
$(x + 2)/(-1) = (y - 1)/2 = (z + 3)/(-\tfrac{2}{3})$

Plano tangente: $3x - 6y + 2z + 18 = 0$

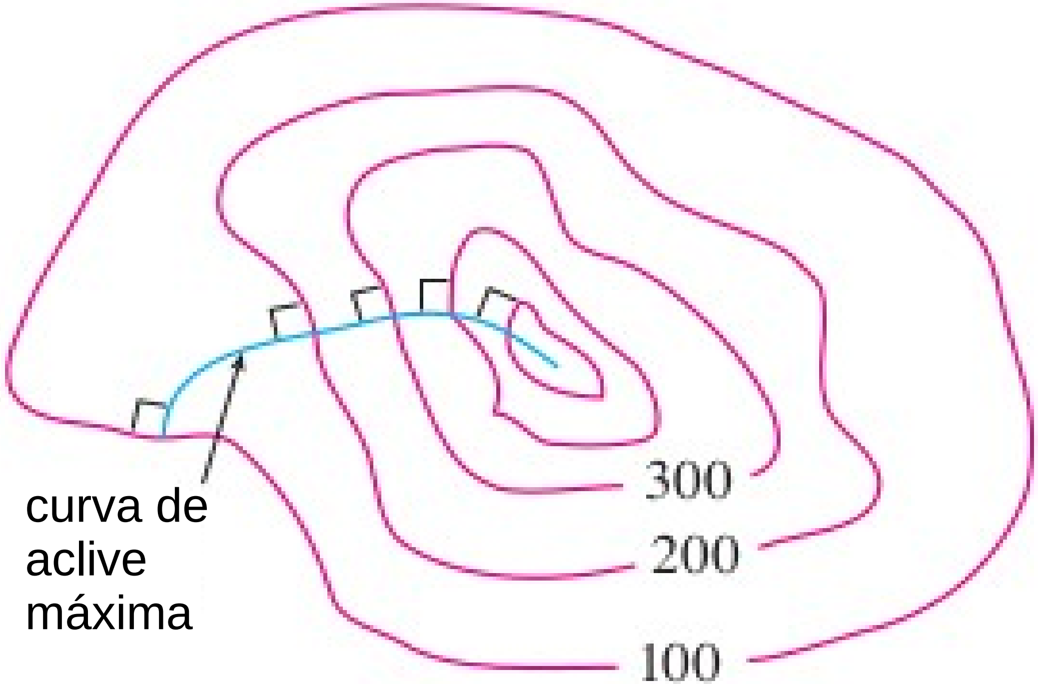
Vetor Gradiente

O mesmo resultado vale para funções de duas variáveis:
O vetor gradiente de uma função indica a direção do maior crescimento desta (e seu módulo, a taxa deste maior crescimento), e é ortogonal às curvas de nível.



Vetor Gradiente

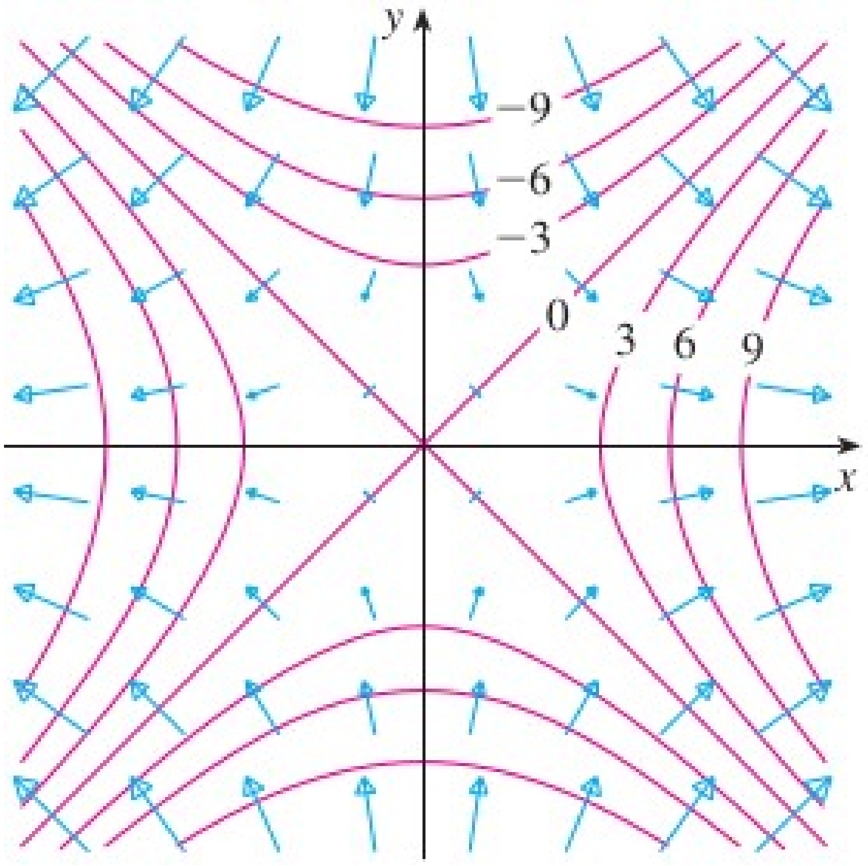
Por exemplo, se $f(x, y)$ representa a altura acima do nível do mar do ponto do coordenadas (x, y), a curva de aclive máxima corre perpendicular às curvas de contorno.



Vetor Gradiente

Exemplo: a função $f(x, y) = x^2 - y^2$

as curvas vermelhas são as curvas de nível,
e as flechas azuis mostram
o vetor gradiente em função
da posição,
o campo de vetores gradientes.



Funções de Várias Variáveis

FIM PRA HOJE