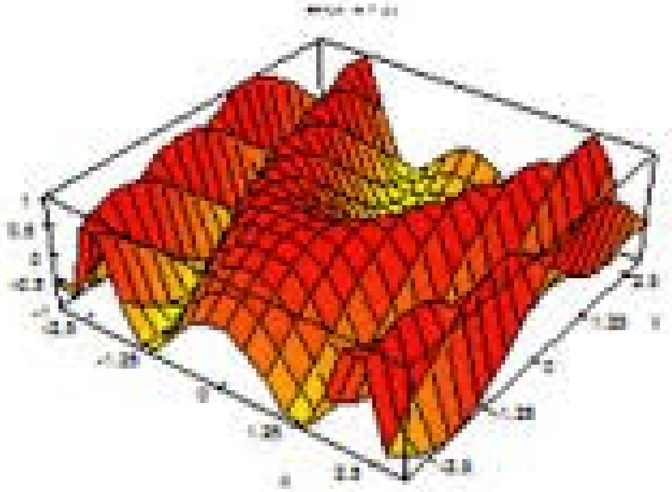
Funções de Várias Variáveis

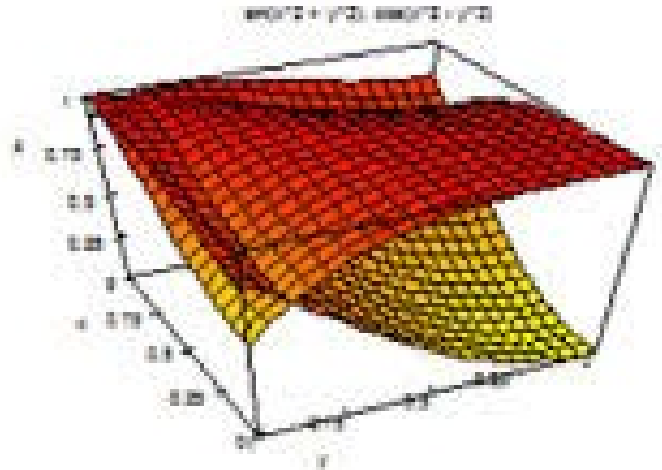
Universidade Federal do ABC

9. Fórmula de Taylor

Prof. Pieter Westera
pieter.westera@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/FVV.html





Fórmula de Taylor

Inicialmente formulada pelo matemático escosês James Gregory, e introduzido formalmente pelo matemático inglês Brook Taylor em 1715.

Lembrete (FUV):
Uma função de uma variável suficientemente "bem comportada" (i. e. n vezes derivável) pode ser aproximada em torno de um dado ponto por um polinômio de
n-ésima ordem chamado polinômio de Taylor.

Em alguns casos, dá para continuar a aproximação "ad infinitum" ($n \to \infty$), resultando numa série de Taylor.

Aproximar uma função por um polinômio pode ser prático, já que são funções, com aqueles é fácil de trabalhar (derivar, integrar, ...).

James Gregory
(1638–1675)

Brook Taylor
(1685-1731)

Fórmula de Taylor

Mais precisamente:

O polinômio de Taylor de ordem n, $p_n(x)$ em torno de $x = a$ de uma dada função $f(x)$ é o (único) polinômio, cujas n primeiras derivadas coincidem com aquelas de f em $x = a$:

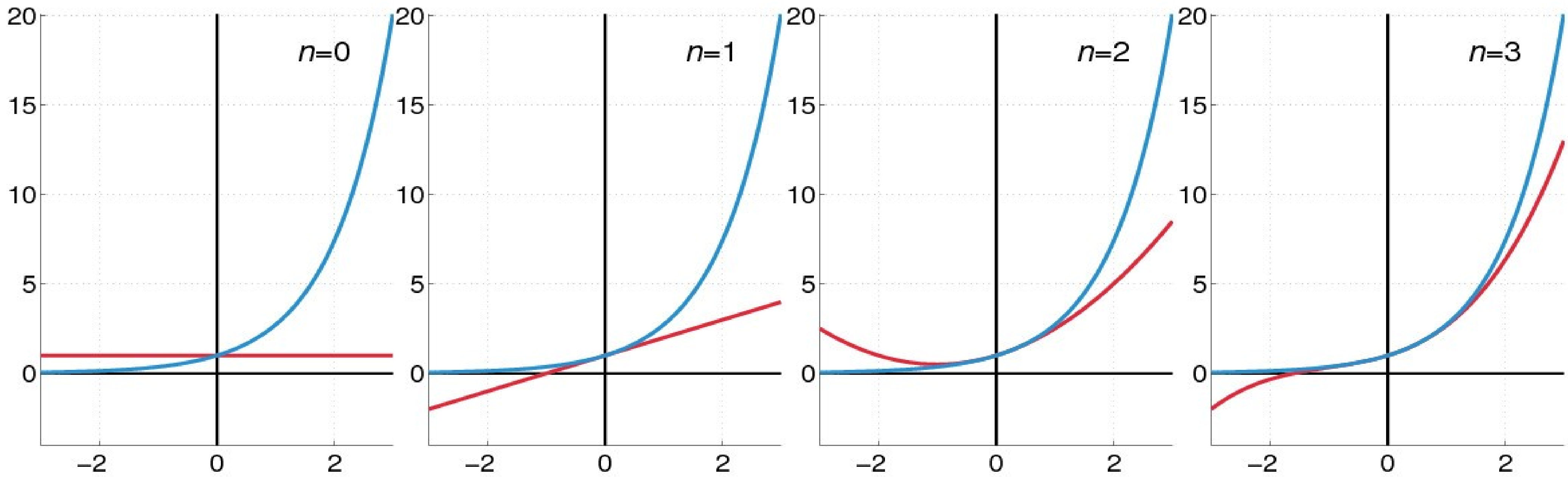
$$p_n^{(i)}(a) = f^{(i)}(a),\ i = 0, 1, 2, ..., n,$$

onde a 0-ésima derivada é o próprio valor da função.

A mesma coisa vale para as derivadas da série de Taylor de f em torno de $x = a$.

Fórmula de Taylor

Exemplo: p_0 - p_3 de e^x em torno de $x = 0$.



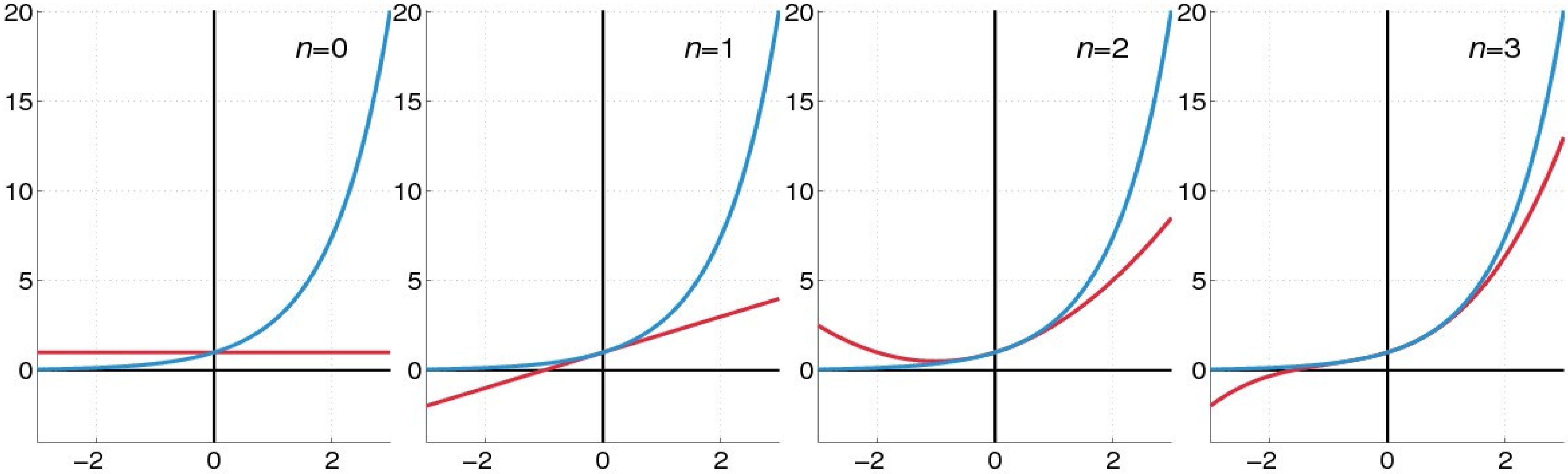
$p_0(x) = 1$ $p_1(x) = 1 + x$ $p_2(x) = 1 + x + x^2/2$ $p_3(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$

A fórmula geral para p_n é $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i/i!$

Bom exercício para fazer em casa: Confira, que as derivadas até a n-ésima coincidem com as de e^x em $x = 0$.

Fórmula de Taylor

Exemplo: p_0 - p_3 de e^x em torno de $x = 0$.



$p_0(x) = 1$ $p_1(x) = 1 + x$ $p_2(x) = 1 + x + x^2/2$ $p_3(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$

Conforme n aumenta, a aproximação melhora,
https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series#/media/File:Exp_series.gif,
o que leva à série de Taylor de e^x: $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$,
que converge para todos os valores de x.

Fórmula de Taylor

Para uma função $f(x)$, o polinômio de Taylor de ordem n, $p_n(x)$ em torno de $x = a$ é dado por:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x - a)^i,$$

e a série de Taylor:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x - a)^i,$$

processo chamado expansão de Taylor.
Cada série de Taylor tem sua faixa de convergência, que pode ser apenas o ponto $x = a$, algum intervalo centrado em a, ou $\mathbb{R}$ inteiro.

Outro bom exercício: Confira que $\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$ é a expansão de Taylor de e^x em torno de $x = 0$.

Fórmula de Taylor

A expansão de Taylor pode ser feita para funções de *n* variáveis.

Nesta aula tratamos de funções de duas variáveis.

!!! Não está no Stewart !!!

No Guidorizzi há uns seções (15.4 a 15.6) sobre a expansão de Taylor de funções de duas variáveis.

Fórmula de Taylor

Primeiro temos que definir, o que é um polinômio de 2 variáveis, x e y, de n-ésima ordem:

É a soma de termos do tipo $c \cdot x^i y^j$, onde $i+j \leq n$.

Exemplos: os polinõmios mais gerais de:

0-ésima ordem: c_1

1ª ordem: $c_1 + c_2 x + c_3 y$

2ª ordem: $c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 xy + c_6 y^2$

3ª ordem: $c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 xy + c_6 y^2 + c_7 x^3 + c_8 x^2 y + c_9 xy^2 + c_{10} y^3$

...

$(n+1)(n+2)/2$ termos

Fórmula de Taylor

0ª ordem:

Igual como no caso de uma variável, para uma função contínua *f*, o polinômio de Taylor de 0-ésima ordem em torno de (a, b) é simplesmente a função f = constante = o valor da função naquele ponto:

$p_1(x, y) = \text{const.} = f(a, b)$

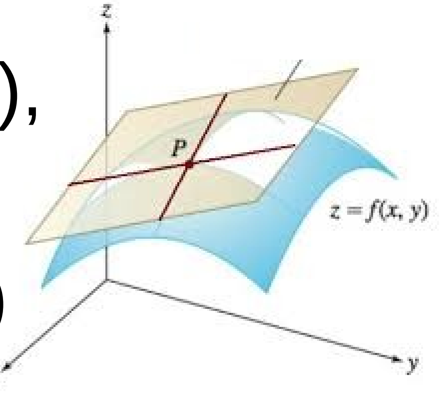
Quer dizer: o valor da função em (a, b) é uma “boa” aproximação ao seu valor na vizinhança deste ponto.

Fórmula de Taylor

1ª ordem:

Para um função de duas variáveis que tem derivadas parciais contínuas em (a, b), o polinômio de Taylor de primeira ordem em torno de (a, b) é aquela função linear (polinômio de primeiro ordem), que passa por (a, b, f(a, b)) cujas derivadas parciais em (a, b) são as mesmas que as da própria função:

É nada outro que a linearização de f em (a, b), que já conhecemos da aula 6:



$$p_1(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

O gráfico de p_1 é o plano tangente a f em (a, b).

Fórmula de Taylor

2ª ordem:

Agora o trabalho começa: Para uma função $f(x, y)$ duplamente derivável em (a, b), temos que achar o polinômio de segunda ordem,

$$c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 xy + c_6 y^2,$$

que tem em (a, b):
- o mesmo valor que f
- as mesmas derivadas parciais, f_x e f_y
- e as mesmas segundas derivadas f_{xx}, $f_{xy} = f_{yx}$ e f_{yy}.

Fórmula de Taylor

Podemos escrever o polinômio também como

$$p_2(x, y) = d_1 + d_2(x - a) + d_3(y - b) \\ + d_4(x - a)^2 + d_5(x - a)(y - b) + d_6(y - b)^2,$$

e calcular as derivadas de p_n:

$$(p_2)_x = d_2 + 2d_4(x - a) + d_5(y - b)$$
$$(p_2)_y = d_3 + d_5(x - a) + 2d_6(y - b)$$
$$(p_2)_{xx} = 2d_4$$
$$(p_2)_{xy} = (p_2)_{yx} = d_5$$
$$(p_2)_{yy} = 2d_6$$

Fórmula de Taylor

$p_2 = d_1 + d_2(x - a) + d_3(y - b) + d_4(x - a)^2 + d_5(x - a)(y - b) + d_6(y - b)^2$
$(p_2)_x = d_2 + 2d_4(x - a) + d_5(y - b)$
$(p_2)_y = d_3 + d_5(x - a) + 2d_6(y - b)$
$(p_2)_{xx} = 2d_4$
$(p_2)_{xy} = (p_2)_{yx} = d_5$
$(p_2)_{yy} = 2d_6$

Calculando valor e derivadas de p_2 em (a, b):

$p_2(a, b) = d_1 + d_2 \cdot 0 + d_3 \cdot 0 + d_4 \cdot 0^2 + d_5 \cdot 0 \cdot 0 + d_6 \cdot 0^2 = d_1$
$(p_2)_x(a, b) = d_2 + 2d_4 \cdot 0 + d_5 \cdot 0 = d_2$
$(p_2)_y(a, b) = d_3 + d_5 \cdot 0 + 2d_6 \cdot 0 = d_3$
$(p_2)_{xx}(a, b) = 2d_4$
$(p_2)_{xy}(a, b) = (p_2)_{yx} = d_5$
$(p_2)_{yy}(a, b) = 2d_6$

Fórmula de Taylor

$p_2(a, b) = d_1$, $(p_2)_x(a, b) = d_2$, $(p_2)_y(a, b) = d_3$,
$(p_2)_{xx}(a, b) = 2d_4$, $(p_2)_{xy}(a, b) = (p_2)_{yx} = d_5$, $(p_2)_{yy}(a, b) = 2d_6$

Já que estes valores têm que coincidir com aqueles de f e suas derivadas em (a, b), temos:

$d_1 = p_2(a, b) = f(a, b)$
$d_2 = (p_2)_x(a, b) = f_x(a, b)$
$d_3 = (p_2)_y(a, b) = f_y(a, b)$
$d_4 = ½\cdot(p_2)_{xx}(a, b) = ½\cdot f_{xx}(a, b)$
$d_5 = (p_2)_{xy}(a, b) = f_{xy}(a, b)$
$d_6 = ½\cdot(p_2)_{yy}(a, b) = ½\cdot f_{yy}(a, b)$

Fórmula de Taylor

Assim, o procurado polinômio de segunda ordem é:

$$p_2(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$
$$+ \tfrac{1}{2}f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \tfrac{1}{2}f_{yy}(a, b)(y - b)^2$$

ou

$$p_2(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$
$$+ \tfrac{1}{2}[f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2]$$

O gráfico deste polinômio é um paraboloide que se “aninha” a *f* em (a, b), tendo neste ponto, não apenas o mesmo plano tangente que a superfície descrita por *f*, mas também a mesma curvatura.

Fórmula de Taylor

2ª ordem:

Podemos formular: Seja f uma função de x e y duas vezes derivável na vizinhança de (a, b), então para todos os pontos (x, y), para aqueles o segmento até (a, b) está contido no domínio de f, o polinômio de Taylor de segunda ordem em torno de (a, b) é:

$$p_2(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$
$$+ \tfrac{1}{2}[f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2]$$

Fórmula de Taylor

3a ordem:

De maneira análoga: Seja f uma função de x e y três vezes derivável na vizinhança de (a, b), então para todos os pontos (x, y), para aqueles o segmento até (a, b) está contido no domínio de f, o polinômio de Taylor de terceira ordem em torno de (a, b) é:

$$p_3(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$
$$+ \tfrac{1}{2}[f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2]$$
$$+ \tfrac{1}{6}[f_{xxx}(a, b)(x - a)^3 + 3f_{xxy}(a, b)(x - a)^2(y - b)$$
$$+ 3f_{xyy}(a, b)(x - a)(y - b)^2 + f_{yyy}(a, b)(y - b)^3]$$

Fórmula de Taylor

n-ésima ordem:

generalizando: Seja f uma função de x e y n vezes derivável na vizinhança de (a, b), então para todos os pontos (x, y), para aqueles o segmento até (a, b) está contido no domínio de f, o polinômio de Taylor de ordem n em torno de (a, b) é:

$$p_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} f_{x^j y^{i-j}}(a, b)\,(x-a)^j (y-b)^{i-j},$$

onde $\binom{i}{j} = \dfrac{i!}{j! \cdot (i-j)!}$ é o coeficiente binomial de n e k

Obsirva que cada polinômio está contido nos de maior ordem.

O limite para $n \to \infty$ é a série de Taylor de f.

Fórmula de Taylor

Exemplo:

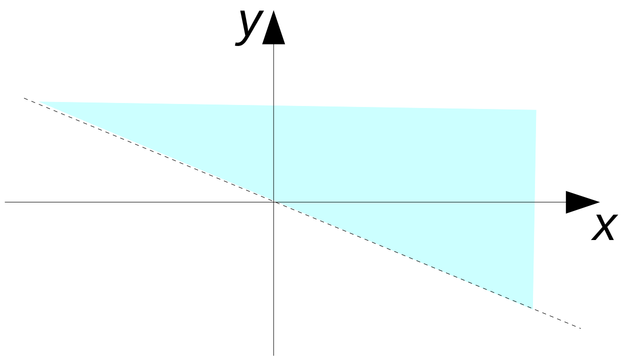
Seja $f = \ln(x + 2y)$.

(a) Determine o domínio de f.

(b) Determine os polinômios de Taylor de ordem 0 a 3 de f em torno de $(1, \frac{1}{2})$.

Fórmula de Taylor

Quadro:



(a) $y > -x/2$

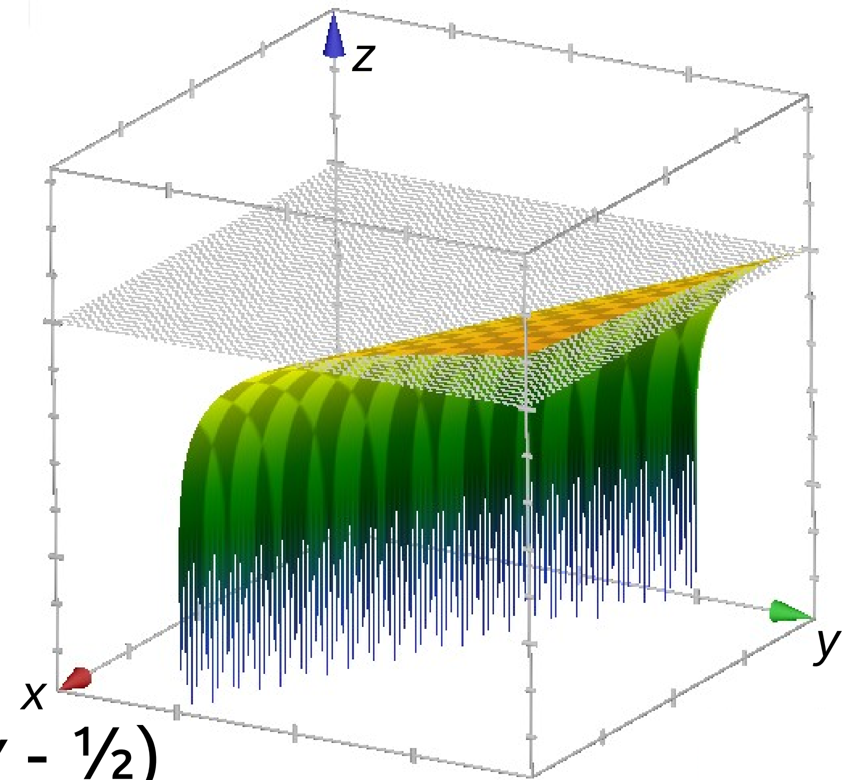
(b) $p_0(x, y) = \ln(2)$

$$p_1(x, y) = \ln(2) + \tfrac{1}{2}\cdot(x - 1) + (y - \tfrac{1}{2})$$

$$p_2(x, y) = \ln(2) + \tfrac{1}{2}\cdot(x - 1) + (y - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{8}\cdot(x - 1)^2 + \tfrac{1}{2}\cdot(x - 1)(y - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\cdot(y - \tfrac{1}{2})^2$$

$$p_3(x, y) = \ln(2) + \tfrac{1}{2}\cdot(x - 1) + (y - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{8}\cdot(x - 1)^2 + \tfrac{1}{2}\cdot(x - 1)(y - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\cdot(y - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{24}\cdot(x - 1)^3 - \tfrac{1}{4}\cdot(x - 1)^2(y - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}\cdot(x - 1)(y - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{3}\cdot(y - \tfrac{1}{2})^3$$

Fórmula de Taylor



Quadro:

(a) $y > -x/2$

(b) $p_0(x, y) = \ln(2)$

$$p_1(x, y) = \ln(2) + \tfrac{1}{2}\cdot(x - 1) + (y - \tfrac{1}{2})$$

$$p_2(x, y) = \ln(2) + \tfrac{1}{2}\cdot(x - 1) + (y - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{8}\cdot(x - 1)^2 + \tfrac{1}{2}\cdot(x - 1)(y - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\cdot(y - \tfrac{1}{2})^2$$

$$p_3(x, y) = \ln(2) + \tfrac{1}{2}\cdot(x - 1) + (y - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{8}\cdot(x - 1)^2 + \tfrac{1}{2}\cdot(x - 1)(y - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\cdot(y - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{24}\cdot(x - 1)^3 - \tfrac{1}{4}\cdot(x - 1)^2(y - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}\cdot(x - 1)(y - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{3}\cdot(y - \tfrac{1}{2})^3$$

Funções de Várias Variáveis

FIM PRA HOJE