

## Lista 2 – Funções de Várias Variáveis

## Limites e Continuidade

Exercícios marcados com asterisco (\*) são desafios, com um grau mais alto de dificuldade.

**1** — Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe (justifique!):

a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} (x^3y + x^2y^3 + 4)$$

b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy}}{x+1}$$

c)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + 2}$$

d)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2 + y^2}$$

e)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$$

f)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}$$

g)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(x) - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^4 + y^4}$$

h)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

i)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \operatorname{tg}(x)}{x^2 + y^2}$$

j)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{xy + x}$$

k)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\sqrt[3]{xy} - 1}{\sqrt{xy} - 1}$$

l)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

**2** —

a) Mostre que o valor de  $\frac{x^3y}{2x^6+y^2}$  tende a 0 quando  $(x, y)$  tende a  $(0, 0)$  ao longo de qualquer reta  $y = mx$ , ou ao longo de qualquer parábola  $y = kx^2$ .

b) Mostre que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y}{2x^6 + y^2}$$

não existe, tomando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ao longo da curva  $y = x^3$ .

**3** — Utilize coordenadas polares para determinar os limites (*Dica*: note que se  $(r, \theta)$  são as coordenadas polares do ponto  $(x, y)$ )

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned}, \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi),$$

então  $r \rightarrow 0+$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , pois  $x^2 + y^2 = r^2$ :

a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

c)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-1/(x^2+y^2)}$$

d)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$$

4 — Esboce o maior conjunto no qual a função é contínua:

a)  $f(x, y) = y \ln(1 + x)$

b)  $f(x, y) = \sqrt{x - y}$

c)  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$

d)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

e)  $f(x, y) = \arcsen(xy)$

f)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

5 — Encontre o valor de  $a$  para que a função dada seja contínua em  $(0, 0)$ :

a)  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{xy}\right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{y^2 + 1} - 1} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ a - 4 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

c)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 \operatorname{sen}(x) \cos(y)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ a^2 - 4a - 5 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

6 — Existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(2x) - 2x + y}{x^3 + y}$ ? Justifique sua resposta!

7 — Mostre que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy} = 1$ .

8 — É possível definir a função  $\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$  no ponto  $(0, 0)$  de tal modo que ela seja contínua? Justifique!

9 — Idem para a função  $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ .

10 — Calcule

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - 2xh - k}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

onde  $f(x, y) = x^2 + y$ .

11 — Seja  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

Mostre que  $f$  é contínua em  $(0, 0)$ .

12 — Seja  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ .

a) Verifique que as curvas  $y = \operatorname{tg}(a)x$ , com  $a \in (-\pi/2, \pi/2)$ , são curvas de nível de  $f$ .

b) É possível definir  $f$  na origem de modo a torná-la contínua? Justifique.

\* 13 — Denotamos por

$$B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

o disco aberto de raio  $r \geq 0$  centrado no ponto  $(x_0, y_0)$ . Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = 1$ , onde  $D = B_1(0, 0) \cup \{(1, 0)\}$ . Mostre, usando a definição de limite, que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y) = 1.$$

## Respostas dos Exercícios

**1** a)  $-8$

b)  $1$

c)  $0$

d) Não existe

e) Não existe

f) Não existe

g) Não existe

h)  $0$

i)  $0$

j)  $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

k)  $\frac{2}{3}$

l)  $0$

**2**

**3** a)  $0$

b)  $0$

c)  $0$

d)  $0$

**4** a)  $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -1\}$

b)  $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$

c)  $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 25\}$

d)  $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$

e)  $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq xy \leq 1\}$

f) Contínua para todo  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$

**5** a)  $a = 0$

b)  $a = 4$

c)  $a = -1$  ou  $a = 5$

**6** Não.

**7**

**8** Sim. O limite em  $(0, 0)$  vale  $1$ . (por quê?)

**9** Não.

**10** O limite vale  $0$ .

**11**

**12**

**13**