Lista 5 – Funções de Várias Variáveis

Pontos Críticos, Máximos e Mínimos, Multiplicadores de Lagrange

1 — Determine e classifique os pontos criticos das funções abaixo relacionadas:

a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 4x - 4y + 5$;

b) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 3$;

c) $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + y^2 - 12x + 10$;

d) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$.

2 — Encontre o máximo e mínimo globais de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x,y) = sen(x) + sen(y) + sen(x+y)$, $0 \leq x \leq \pi/3$, $0 \leq y \leq \pi/3$;

b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, na região triangular com vértices $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$;

c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2+y}$, $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.

3 — Foi encomendado para sua empresa o projeto de um tanque para gas liquefeito de petróleo. As especificações do cliente pedem um tanque cilindrico com extremidades hemisféricas que contenham 8.000 m^3 de gás. O cliente também quer usar a menor quantidade possível de mateiral para construir o tanque. Qual raio R e altura h da parte cilíndrica você recomendaria para o tanque?

4 — Determine o volume máximo V de uma caixa retangular inscrita no elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

5 — De uma folha de aluminio com $12cm$ de largura, deseja-se construir uma calha, dobrando-se os lados da folha para cima e formando duas abas de mesmo tamanho, de modo que estas abas façam o mesmo ângulo com a horizontal. Qual a largura L das abas e que ângulo θ elas devem fazer com a horizontal para que a capacidade da calha seja máxima?

6 — Determine os valores máximo e mínimo, se existirem, das funções relacionadas sujeitas ao respectivo vínculo indicado:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 4$;

b) $f(x,y) = xy$, $4x^2 + 9y^2 = 36$;

c) $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2$, $3x + 2y + z = 6$;

d) $f(x,y) = x + y + z$, $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$.

7 — A janela de uma casa tem a forma de um retângulo com um triângulo isósceles no topo. Se o perímetro da janela é $12m$ e esta deve coletar a maior quantidade de energia solar possível, mostre que o ângulo da base do triângulo é $\frac{\pi}{6}$ radianos.

8 — Determine a equação do plano que passa pelo ponto $(1,2,1)$ e determina com os planos coordenados um tetraedro de volume máximo.

9 — Suponha que a temperatura em um ponto (x,y) de uma placa de metal seja $T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Uma formiga, andando sobre a placa, percorre um círculo de raio 5 centrado na origem. Qual é a maior e a menor temperaturas encontradas pela formiga?

10 — Considere a curva C dada pela intersecção do cilindro de equação $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ com o plano $2x + y + z = 12$. Determine as distâncias máximas e mínimas dos pontos de C ao plano xy.

11 — Numa circunferência de raio R, traçam-se duas cordas paralelas, uma acima e outra abaixo do centro, e constroi-se um trapésio isósceles. Determine as distâncias das duas cordas ao centro para que a área do trapézio seja máxima.

12 — Determine os valores máximo e mínimo, se existirem, da função $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeita aos vínculos $x + y + z = 1$ e $x + 2x + 3z = 6$.

13 — Se f for uma função contínua de uma variável com dois máximos locais num intervalo, então deve haver um mínimo local entre eles. Este resultado não se estende a funções de duas variáveis. De fato, mostre que $f(x, y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$ tem dois máximos relativos, mas nenhum outro ponto crítico.

Respostas dos Exercícios

1 a) Mínimo global $(-1, 2)$

b) Máximo local $(-1, -1)$, ponto de sela

c) Ponto de sela $(-1, 0)$, mínimo local $(2, 0)$

d) Ponto de sela $(0, 0)$, mínimos locais $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, máximos locais $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

2 a) Máximo $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ em $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, mínimo 0 em $(0, 0)$

b) Máximo em $(0, 1)$ e $(1, 0)$, mínimo $-\frac{1}{2}$ em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

c) Máximo e^3 em $(1, 1)$ e $(-1, 1)$, minimo $e^{-\frac{1}{4}}$ em $(0, -\frac{1}{2})$

3 $h = 0$ e $R = 10\sqrt[3]{6/\pi} \cong 12,4m$

4 $V = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}$

5 $L = 4cm$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$ radianos

6 a) Máximo 4 em $(\pm 2, 0)$, mínimo -4 em $(0, \pm 2)$

b) Máximo 3 em $(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2})$ e $(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{2})$, mínimo -3 em $(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2})$ e $(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{2})$

c) Mínimo $\frac{18}{7}$ em $(\frac{9}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7})$

d) Máximo 7 em $(\frac{36}{7}, \frac{9}{7}, \frac{4}{7})$ e mínimo -7 em $(-\frac{36}{7}, -\frac{9}{7}, -\frac{4}{7})$

7

8 $2x + y + 2z = 6$

9 125° nos pontos $(2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ e $(-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$, e 0° nos pontos $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ e $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$

10 20 e 4

11 Distâncias iguais a $\frac{R\sqrt{2}}{2}$

12

13