Lista 6 – Funções de Várias Variáveis

Integrais Duplas

1 — Calcule $\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy$, onde:

a) $f(x,y) = xe^{xy}$ e R é o retângulo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \,,\, 0 \leq y \leq 1\}$;

b) $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$ e R é o retângulo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \,,\, 1 \leq y \leq 2\}$.

2 — Esboçe a região de integração e calcule as integrais iteradas a seguir:

a) $\int\limits_0^1 \int\limits_x^{2x} (2x+4y)\,dy\,dx$;

b) $\int\limits_1^e \int\limits_0^{\ln x} (\frac{1}{e-e^y})\,dy\,dx$;

c) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx\,dy$;

d) $\int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} 2xy\,dy\,dx$.

3 — Inverta a ordem de integração das seguintes integrais duplas iteradas:

a) $\int\limits_0^4 \int\limits_0^{y/2} f(x,y)\,dx\,dy$;

b) $\int\limits_0^1 \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx$;

c) $\int\limits_0^1 \int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)\,dy\,dx$.

4 — Calcule $\iint\limits_R (8-x-y)\,dx\,dy$, onde R é a região delimitada por $y = x^2$ e $y = 4$.

5 — Calcule $\iint\limits_R \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\,dx\,dy$, onde R é o quadrado $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \,,\, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$.

6 — Calcule $\iint\limits_R \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, onde R é a região delimitada por $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ e $x = 2$.

7 — Usando coordenadas polares, calcule:

a) $\iint\limits_R (x^2+y^2)^2\,dx\,dy$, onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4 \,,\, x \geq 0\}$;

b) $\int\limits_{-1}^1 \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx$;

c) $\iint\limits_R \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, onde R é a região delimitada por $x^2+y^2 = 1$ e $x^2+y^2 = 9$;

d) $\iint\limits_R x\,dx\,dy$, onde R é a região delimitada por $x^2+y^2-4x = 0$;

e) $\iint\limits_R xy\,dx\,dy$, onde R é a região delimitada por $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 1$;

f) $\iint\limits_R \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\,dx\,dy$, onde R é a região delimitada por $(x-1)^2+(y-2)^2 = 1$;

g) $\iint\limits_R dx\,dy$, onde R é a região limitada por $4(x-3)^2+(y-2)^2 = 4$. Interprete o resultado geometricamente.

8 — Uma região R é mostrada em cada um dos gráficos da figura abaixo. Decida se você deve usar coordenadas polares ou retangulares e escreva os limites de integração da integral iterada $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$, onde f é uma função arbitrária qualquer contínua em R. [1]

[1] Fonte da figura: J. Stewart, *Cálculo*, 5a. edição, vol. 2, pág. 1006. Cengage Learning, 2006.

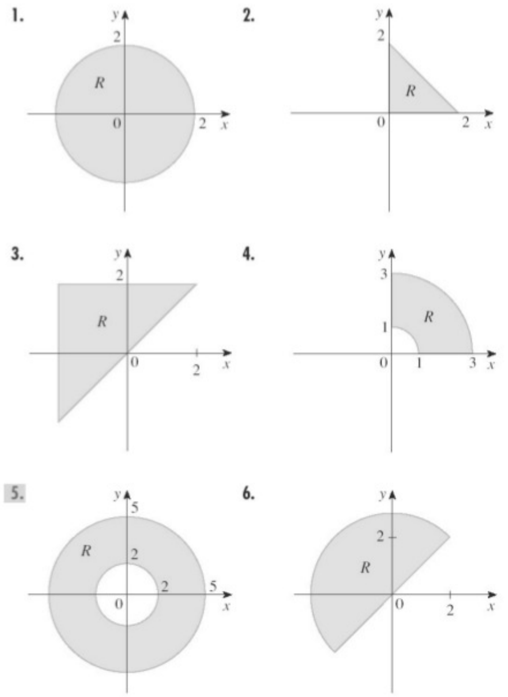

Figura 1

9 — Calcule o volume dos sólidos delimitados pelas surperfícies dadas:

a) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ e $z = x^2 + y^2$.

b) $z - 0$, $x^2 + y^2 = 16$ e $z = 10 + x$.

10 — Calcule a área da elipse $x^2 + 4y^2 - 4x = 0$.

11 — Determine a área de região R delimitada pelas curvas $y = x^3$, $x + y = 2$ e $y = 0$.

12 — Calcule $\iint\limits_R e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy$, onde R é a região triangular limitada pela reta $x + y = 2$ e os eixos coordenados.

13 — Prove que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1\int_0^1 x^n y^n \,dx\,dy = 0 \ .$$

14 — Calcule a integral dupla

$$\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_R \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy \ ,$$

onde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \frac{1}{a^2}\}$, e mostre que

$$\lim_{a\to\infty} I(a) = 0 \ .$$

Respostas dos Exercícios

1 a) $e^3 - e - 2$.

b) $10\ln(2) - 6\ln(3)$.

2 a) $8/3$.

b) 1.

c) $1/3$.

d) $1/6$.

3 a) $\int_0^2 \int_{2x}^4 f(x, y)\, dx\, dy$.

b) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y)\, dx\, dy$.

c) $\int_0^2 \int_{y/3}^{y/2} f(x, y)\, dx\, dy + \int_2^3 \int_{y/3}^1 f(x, y)\, dx\, dy$.

4 $896/15$.

5 1.

6 $9/4$.

7 a) $\frac{32\pi}{3}$.

b) $\frac{2\pi}{3}$.

c) $\frac{52\pi}{3}$.

d) 8π.

e) 0.

f) $\frac{2\pi}{3}$.

g) 2π.

8

9 a) $\frac{\pi}{2}$.

b) 160π.

10 2π.

11 $3/4$.

12 $e - e^{-1}$.

13

14