Lista 7 – Funções de Várias Variáveis

Aplicações de Integrais Duplas, Integrais Triplas

Exercícios e figuras adaptados do livro de J. Stewart, *Cálculo*, 5a. edição, vol. 2. Cengage Learning, 2006.

1 — Lembrar que as coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ do *centro de massa* de uma placa de formato dado pela região plana $R \subset \mathbb{R}^2$ e cuja distribuição de massa é dada pela *função densidade de massa* $\mu : R \to \mathbb{R}$ é dada por

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M}\ ,\ \overline{y} = \frac{M_x}{M}\ ,$$

onde

$$M = \iint\limits_R \mu(x,y)\, dA\ ,$$

$$M_x = \iint\limits_R y\mu(x,y)\, dA\ ,\ M_y = \iint\limits_R x\mu(x,y)\, dA$$

são respectivamente a *massa* e os *momentos de massa* em relação aos eixos x e y. Calcule as coordenadas (x_c, y_c) do centro de massa da placa *homogênea* (i.e. μ *constante*) indicada na figura, um círculo de $1,0m$ de raio do qual foi removido um círculo de $0,5m$ de raio, com uma separação de $0,25m$ entre os centros O e O' dos dois círculos.

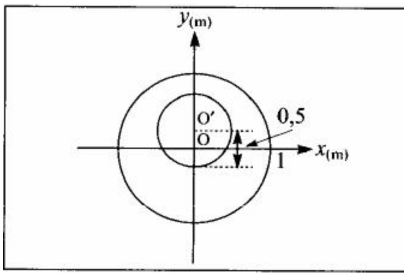

Figura 1

2 — A *área de uma superfície* determinada pelo gráfico de uma função de duas variáveis $z = f(x,y)$ definida numa região $R \subset \mathbb{R}^2$ é dada pela fórmula

$$A = \iint\limits_R \sqrt{1 + \|\nabla f(x,y)\|^2}\, dA\ .$$

Se f é dada implicitamente pela equação $F(x,y,z) = 0$, então

$$A = \iint\limits_D \frac{\|\nabla F(x,y,z)\|}{\left|\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right|}\, dA\ ,$$

onde $z = f(x,y)$ e supondo que nesse caso $\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} \neq 0$ no interior de R. Determine a área das seguintes superfícies:

a) A parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante;

b) A parte da superficie $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$;

c) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro do paraboloide $z = x^2 + y^2$;

d) A parte da esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ax$ e acima do plano xy.

3 — Calcule as seguintes integrais triplas iteradas:

a) $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xy\, dy\, dx\, dz$;

b) $\int_0^1 \int_0^z \int_0^y z e^{-y^2}\, dx\, dy\, dz$;

c) $\iiint\limits_R y\, dV$ onde R é a região limitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $2x + 2y + z = 4$;

d) $\iiint\limits_R y\, dV$ onde R é a região limitada pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 3x$ e $z = 0$ no primeiro octante.

4 — Esboce o sólido cujo volume é dado pelas integrais iteradas dadas abaixo e reescreva a integral como uma integral equivalente de dois modos diferentes:

a) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dy\, dz\, dx$;

b) $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx\, dz\, dy$;

c) $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} dy\, dz\, dx$.

5 — Faça um esboço do sólido cujo volume é dado pelas integrais abaixo e calcule tais integrais:

a) $\int_0^{\pi/2}\int_0^{2}\int_0^{9-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$;

b) $\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2}\int_0^{3}\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$.

6 — Utilize *coordenadas cilíndricas*

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\mathrm{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

($r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$) e calcule as integrais dadas a seguir, usando a fórmula de mudança de variáveis

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_{R'} f(r\cos(\theta), r\mathrm{sen}(\theta), z) r\, dV ,$$

onde

$$R = \{(x = r\cos(\theta), y = r\mathrm{sen}(\theta), z) \in \mathbb{R}^3 \mid (r, \theta, z) \in R'\} .$$

a) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dz\, dy\, dx$;

b)
$$\iiint\limits_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dV ,$$

onde R é a região contida dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$;

c)
$$\iiint\limits_R x\, dV$$

onde R está delimitada pelos planos $z = 0$, $z = x + y + 3$ e pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

7 — Utilize *coordenadas esféricas*

$$\begin{cases} x = r\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi) \\ y = r\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$$

($r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$) e calcule as integrais dadas a seguir, usando a fórmula de mudança de variáveis

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_{R'} f(r\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi), r\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi), r\cos(\theta)) r^2 \mathrm{sen}(\theta)\, dV ,$$

onde

$$R = \{(x = r\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi), y = r\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi), z = r\cos(\theta)) \in \mathbb{R}^3 \mid (r, \theta, \phi) \in R'\} .$$

a) $\int_0^{3}\int_0^{\sqrt{9-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dx\, dy$;

b)
$$\iiint\limits_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dV ,$$

onde R é a região hemisférica que está acima do plano xy e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

c)
$$\iiint\limits_R e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dV ,$$

onde R está delimitada pela esfera $x^2+y^2+z^2 = 9$ no primeiro octante.

8 — Determine o determinante Jacobiano de transformação:

a) $x = u^2 - v^2$, $y = u^2 + v^2$;

b) $x = \frac{u}{u+v}$, $x = \frac{v}{u-v}$;

c) $x = \alpha\mathrm{sen}(\beta)$, $y = \alpha\cos(\beta)$;

d) $x = e^{u-v}$, $y = e^{u+v}$, $z = e^{u+v+w}$.

9 — Determine a imagem do conjunto S pela transformação dada:

a) $S = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 3 , 0 \leq v \leq 2\}$, $x = 2u+3v$, $y = u - v$;

b) S é a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$, $x = u^2$, $y = v$;

c) S é o disco dado por $u^2 + v^2 \leq 1$, $x = au$, $y = bv$.

10 — Utilize a transformação dada para calcular a integral:

a)
$$\iint\limits_R (x - 3y)\, dA ,$$

onde R é a região triangular de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$ e $(1, 2)$, $x = 2u + v$, $y = u + 2v$;

b)
$$\iint\limits_R x^2\, dA ,$$

onde R é a região limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$, $x = 2u$, $y = 3v$;

c)

$$\iint\limits_R xy\, dA\ ,$$

onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $y = x$ e $y = 3x$ e pelas hipérboles $xy = 1$ e $xy = 3$, $x = u/v$, $y = v$.

11 — Calcule a integral fazendo uma mudança de variáveis apropriada:

a)

$$\iint\limits_R \frac{x - 2y}{3x - y}\, dA\ ,$$

onde R é o paralelogramo delimitado pelas retas $x - 2y = 0$, $x - 2y = 4$, $3x - y = 1$ e $3x - y = 8$;

b)

$$\iint\limits_R \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right)\, dA\ ,$$

onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, 1)$;

c)

$$\iint\limits_R e^{x+y}\, dA\ ,$$

onde R é dada pela inequação $|x| + |y| \leq 1$.

Respostas dos Exercícios

1 $(x_c, y_c) = (0, -\frac{1}{12})$

2

3

4

5

6

8

9

10

11