Espaço pra imagem da câmera na live

Seja $f = \ln(x + 2y)$.

(a) Determine o domínio de f.

(b) Determine os polinômios de Taylor de ordem 0 a 3 de f em torno de $(1, \frac{1}{2})$.

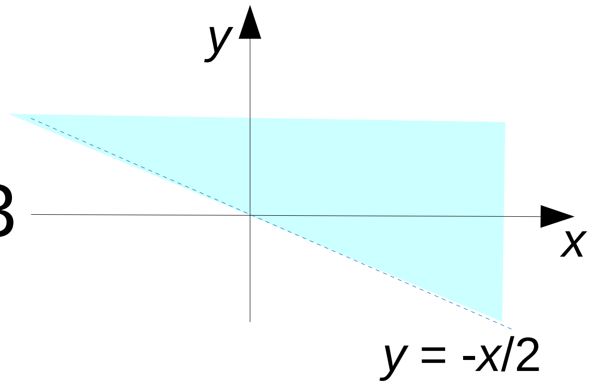
$x + 2y > 0 \Rightarrow y > x/2$

Espaço pra imagem da
câmera na live

Seja $f = \ln(x + 2y)$.

(a) Determine o domínio de f.

(b) Determine os polinômios de Taylor de ordem 0 a 3 de f em torno de $(1, ½)$.



(a) $y > -x/2$ => a área a cima da linha $y = -x/2$ excluindo a linha

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete: o polinômio de Taylor de terceira ordem em torno de (a, b) é:

$$p_3(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$
$$+ \tfrac{1}{2}[f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2]$$
$$+ \tfrac{1}{6}[f_{xxx}(a, b)(x - a)^3 + 3f_{xxy}(a, b)(x - a)^2(y - b)$$
$$+ 3f_{xyy}(a, b)(x - a)(y - b)^2 + f_{yyy}(a, b)(y - b)^3]$$

Seja $f = \ln(x + 2y)$.

(b) Determine os polinômios de Taylor de ordem 0 a 3 de f em torno de (1, ½).

$f(a, b) = \ln(2) \Rightarrow p_0(x, y) = \ln(2)$

$f_x = 1/(x + 2y)$, $f_y = 2/(x + 2y)$

$\Rightarrow p_1(x, y) = \ln(2) + (x - 1) / 2 + 2(y - ½) / 2$

$f_{xx} = [0*(x + 2y) – 1·1]/(x + 2y)^2 = -1/(x + 2y)^2$, $f_{xy} = f_{yx} = -2/(x + 2y)^2$, $= f_{yy} = -4/(x + 2y)^2$

$\Rightarrow p_2(x, y) = \ln(2) + (x - 1) / 2 + 2(y - ½) / 2 - ½[¼(x - 1)^2 + (x - 1)(y - ½) + (y - ½)^2]$

$f_{xxx} = - [0·(x + 2y)^2 - 1·1·2(x + 2y)] / (x + 2y)^4 = 2 / (x + 2y)^3$, $f_{xxy} = 4 / (x + 2y)^3$, $f_{xyy} = 8 / (x + 2y)^3$, $f_{yyy} = 16 / (x + 2y)^3$

$\Rightarrow p_3(x, y) = \ln(2) + (x - 1) / 2 + 2(y - ½) / 2 - ½[¼(x - 1)^2 + (x - 1)(y - ½) + (y - ½)^2]$
$+ \tfrac{1}{6}[¼(x - 1)^3 + 1.5(x - 1)^2(y - ½) + 3(a, b)(x - 1)(y - ½)^2 + 2(y - ½)^3]$

Espaço pra imagem da câmera na live

Seja $f = \ln(x + 2y)$.

(b) Determine os polinômios de Taylor de ordem 0 a 3 de f em torno de $(1, \frac{1}{2})$.

(b) $p_0(x, y) = \ln(2)$

$p_1(x, y) = \ln(2) + \frac{1}{2}\cdot(x - 1) + (y - \frac{1}{2})$

$p_2(x, y) = \ln(2) + \frac{1}{2}\cdot(x - 1) + (y - \frac{1}{2})$
$+ \frac{1}{8}\cdot(x - 1)^2 + \frac{1}{2}\cdot(x - 1)(y - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\cdot(y - \frac{1}{2})^2$

$p_3(x, y) = \ln(2) + \frac{1}{2}\cdot(x - 1) + (y - \frac{1}{2})$
$+ \frac{1}{8}\cdot(x - 1)^2 + \frac{1}{2}\cdot(x - 1)(y - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\cdot(y - \frac{1}{2})^2$
$- \frac{1}{24}\cdot(x - 1)^3 - \frac{1}{4}\cdot(x - 1)^2(y - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\cdot(x - 1)(y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{3}\cdot(y - \frac{1}{2})^3$

Espaço pra imagem da câmera na live

Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

Ache os pontos críticos e avalie, se estes são mínimos e/ou máximos locais e/ou globais.

Os únicos pontos críticos são aqueles com $f_x = 0$, $f_y = 0$.

$f_x = 2x + 0 - 2 - 0 + 0 = 2x - 2$, $f_y = 2y - 6$

Igualando os dois a zero: $x = 1$, $y = 3$

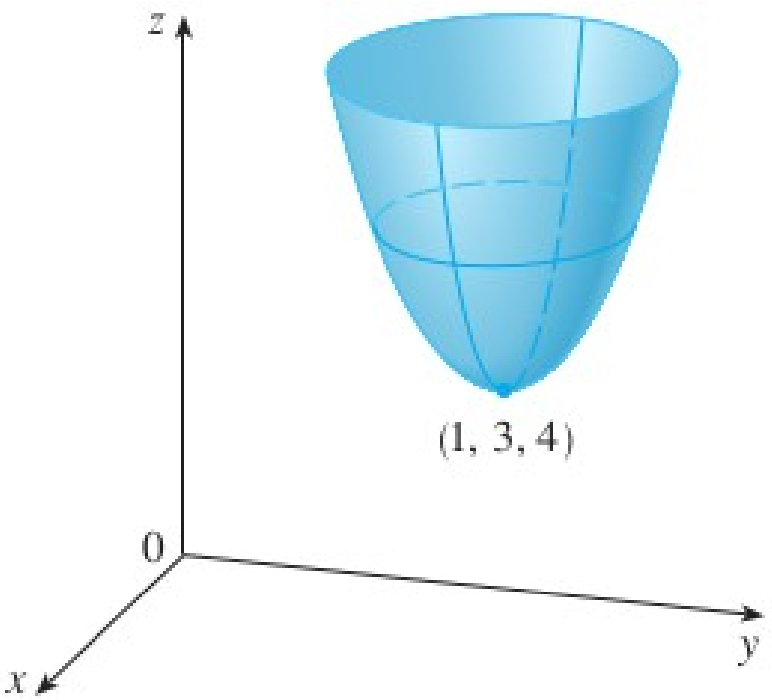
$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + 4 = 4$ em $(1, 3)$

> 4 nos outros pontos $\Rightarrow (1, 3)$ é um mínimo

Espaço pra imagem da
câmera na live

Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$
Ache os pontos críticos e avalie,
se estes são mínimos e/ou máximos
locais e/ou globais.

Um ponto crítico: (1, 3)
é um mínimo local e global



Espaço pra imagem da câmera na live

Determine os valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.
Os únicos pontos críticos são aqueles com $f_x = 0$, $f_y = 0$.

$f_x = -2x$, $f_y = 2y$ dá 0, 0 para (0, 0)

indo ao longo do eixo x (mantendo $y = 0$) => $f(x, 0) = -x^2$, diminui afastando-se da origem

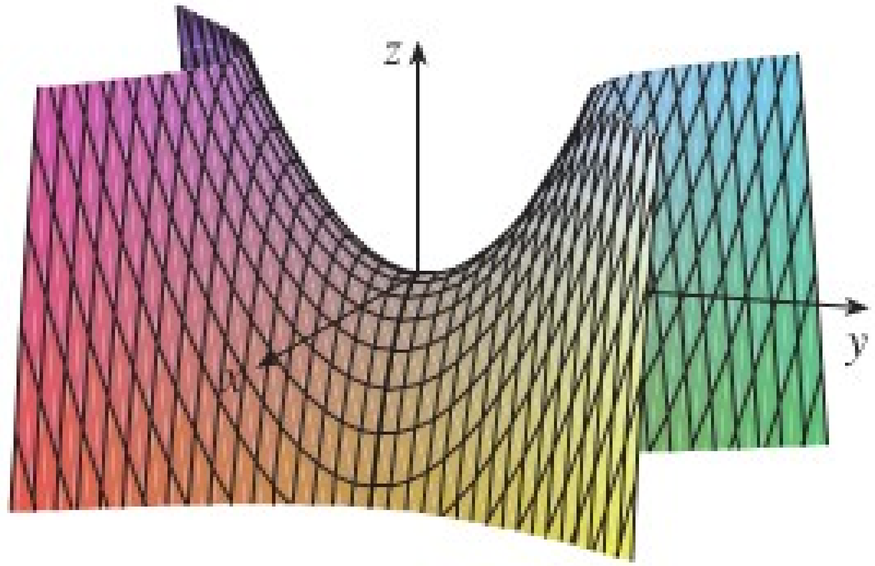
indo ao longo do eixo y (mantendo $x = 0$) => $f(0, y) = y^2$, aumenta afastando-se da origem

Espaço pra imagem da câmera na live

Determine os valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Não tem valor extremo,

mas (0, 0) é ponto de sela.



Espaço pra imagem da câmera na live

Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela de $f(x, y) = x^4 + y^4 -4xy + 1$

$f_x = 4x^3 -4y$, $f_y = 4y^3 -4x$,
os dois igual a zero: (I) $0 = 4x^3 -4y$, (II) $0 = 4y^3 -4x$
(I) => $4x^3 = 4y$ => $y = x^3$ substituir em (II): $0 = 4x^9 - 4x$
solução trivial $x = 0$ => $y = 0$,
dividindo por x: $0 = 4x^8 – 4$ => $x^8 = 1$
duas soluções reais: $x = 1$, $y = 1$, $x = -1$, $y = -1$
resumo das três soluções: (0, 0), (1, 1), (-1, -1)

Espaço pra imagem da câmera na live

Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Lembrete: Teste da segunda derivada:

Seja $D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - |f_{xy}(a, b)|^2$

- $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0 \Rightarrow f(a, b)$ é um mínimo local
- $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0 \Rightarrow f(a, b)$ é um máximo local
- $D < 0 \Rightarrow f(a, b)$ é nem mínimo nem máximo

$f_x = 4x^3 - 4y$, $f_y = 4y^3 - 4x$

$f_{xx} = 12x^2$, $f_{xy} = f_{yx} = -4$, $f_{yy} = 12y^2$

(0, 0): $D(0, 0) = 0 \cdot 0 - |-4|^2 = -16 \Rightarrow$ nem mínimo nem máximo (pt. de sela)

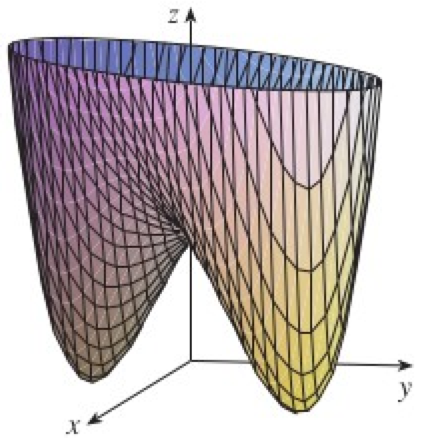
(1, 1): $D(1, 1) = 12 \cdot 12 - |-4|^2 = 128 > 0$ e $f_{xx} = 12 > 0 \Rightarrow$ mínimo

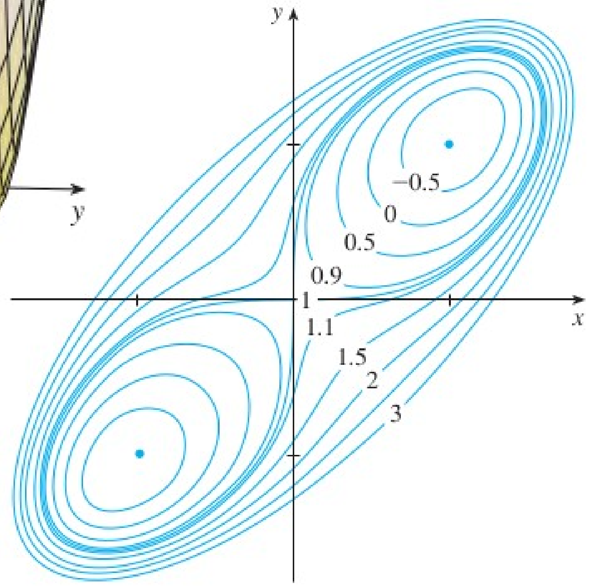
(-1, -1): $D(-1, -1) = 12 \cdot 12 - |-4|^2 = 128 > 0$ e $f_{xx} = 12 > 0 \Rightarrow$ mínimo

Espaço pra imagem da câmera na live

Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

(1, 1) e (-1, -1): mínimos
(0, 0): ponto de sela





Espaço pra imagem da câmera na live

Determine a menor distância entre o ponto (1, 0, -2) e o plano $x + 2y + z = 4$.

$z = 4 - x - 2y$

$d = \sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z-(-2))^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y)^2+(z+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y)^2+(4 - x - 2y + 2)^2}$

$= \sqrt{x^2-2x+1 + y^2 + 36 + x^2 + 4y^2 - 12x - 24y + 4xy} = \sqrt{2x^2-14x+37+5y^2-24y+4xy}$

em lugar de d minimizamos $d^2 = 2x^2-14x+37+5y^2-24y+4xy$

$f_x = 4x - 14 + 4y = 0$ (I), $f_y = 10y - 24 + 4x = 0$ (II)

subtrair: (II)-(I) $= -10 + 6y = 0 \Rightarrow y = 10/6$, substituir em (I) ou (II): $x = 11/6$

$d^2 = 2(11/6)^2-14(11/6)+37+5(10/6)^2-24(10/6)+4(11/6)(10/6) \qquad \cdot 36$

$36d^2 = 2(11)^2-14(11\cdot 6)+37+5(10)^2-24(6\cdot 10)+4(11)(10)$ => dá para achar d

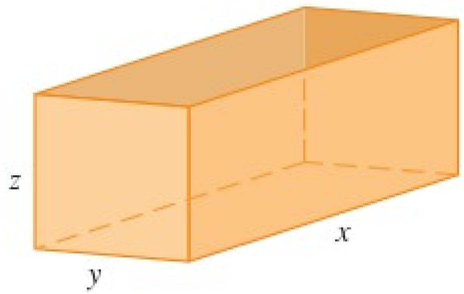
Espaço pra imagem da câmera na live

Determine a menor distância entre o ponto (1, 0, -2) e o plano $x + 2y + z = 4$.

$d_{min} = 5/\sqrt{6} = 5/6 \cdot \sqrt{6}$

Espaço pra imagem da câmera na live

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m² de papelão. Determina o volume máximo de tal caixa.



$1xy + 2yz + 2xz = 12$ = área total de papelão

$\Rightarrow 2yz + 2xz = 12 - xy \Rightarrow z = (12 - xy)/(2x + 2y)$

$V = xyz = xy(12 - xy)/(2x + 2y) = (12xy - x^2\,y^2)/(2x + 2y)$ maximizar

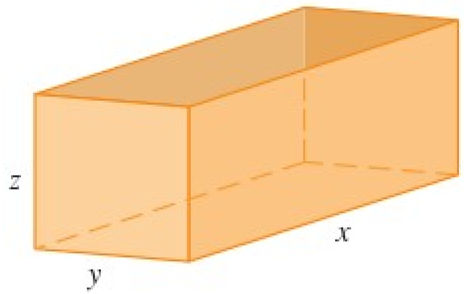
$V_x = ((12y - 2xy^2)(2x + 2y) - 24xy + 2x^2y^2)/(2x + 2y)^2 = 0$

$12 - 2xy - x^2 = 0$ para $V_y = 0$, obtemos a mesma coisa, trocando x e y:

$12 - 2xy - y^2 = 0$

Espaço pra imagem da câmera na live

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m² de papelão. Determina o volume máximo de tal caixa.



$12 - 2xy - x^2 = 0$
$12 - 2xy - y^2 = 0$

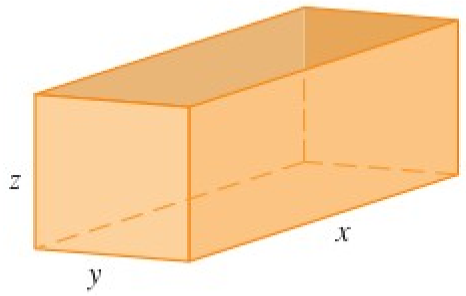
subtraindo: $x = y$

substituir em uma das equações: $12 - 2xx - x^2 = 0 \Rightarrow x = 2$, $y = 2$, $z = 1$ $\Rightarrow V = 4$ m³

Espaço pra imagem da câmera na live

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m² de papelão. Determina o volume máximo de tal caixa.

V_{max} = 4 m³



Espaço pra imagem da câmera na live

Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ no retângulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2\}$.

L_1 ($y=0$): $f(x, 0) = x^2 \Rightarrow$ min: (0,0,0), max: (3,0,9)

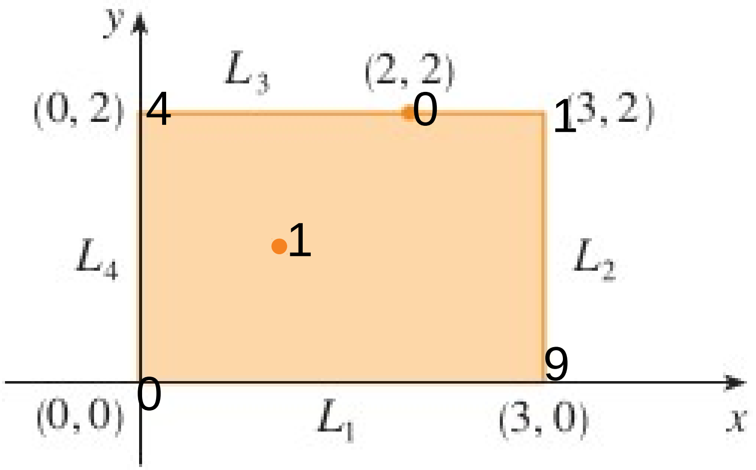
L_2 ($x=3$): $f(3, y) = 9-4y \Rightarrow$ min: (3,2,1), max: (3,0,9)

L_3 ($y=2$): $f(x, 2) = x^2 - 4x + 4$, $\quad df/dx = 2x - 4 = 0$

$\Rightarrow$ min: (2,2,0), max: (0,2,4)

L_4 ($x=0$): $f(0, y) = 2y \Rightarrow$ min: (0,0,0), max: (0,2,4)

interior: $f_x = f_y = 0$: $f_x = 2x - 2y = 0$ e $f_y = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, y = 1 \Rightarrow f = 1$



Espaço pra imagem da câmera na live

Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função
$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ no retângulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.

máximo: $f(3, 0) = 9$
mínimos: $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$