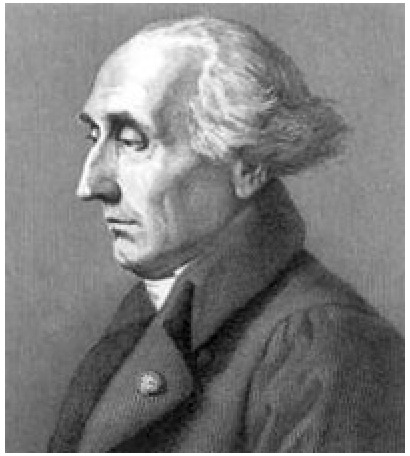
Espaço pra imagem da
câmera na live

Faça uma pergunta pelo chat.
Pode demorar uns dez segundas até eu ver a pergunta.

A minha sugestão é resolver alguns exercícios
sobre o novo assunto
Máximos e Mínimos: Multiplicadores de Lagrange.

Começamos assim que alguém se manifestar no chat.

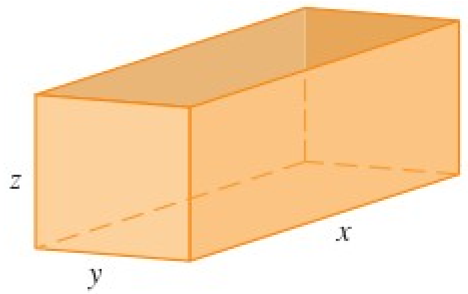


Joseph-Louis
Lagrange
(1736-1813)

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:
Procuramos o máximo ou mínimo de $f(x,y(,z))$ limitado em $g(x,y(,z)) = k$
=> Achar $(x,y(,z))$ para aquele
$\nabla f(x,y(,z)) = \lambda \nabla g(x,y(,z))$
$g(x,y(,z)) = k$

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m² de papelão. Determina o volume máximo de tal caixa.



"f" $= V = xyz$, $g = xy + 2xz + 2yz = 12$

$V_x = yz = \lambda g_x = \lambda(y + 2z)$ (I)

$xz = \lambda(x + 2z)$ (II)

$xy = \lambda(2x + 2y)$ (III)

$xy + 2xz + 2yz = 12$ (IV)

(I) – (II) => $yz - xz = \lambda(y + 2z) - \lambda(x + 2z)$ => $(y-x)z = \lambda(y-x)$

=> ou $z = \lambda$ ou $x = y$

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:

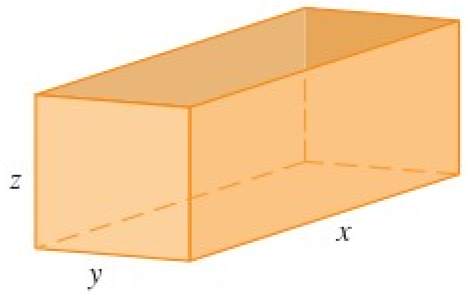
Procuramos o máximo ou mínimo de $f(x,y(,z))$ limitado em $g(x,y(,z)) = k$

=> Achar $(x,y(,z))$ para aquele

$\nabla f(x,y(,z)) = \lambda \nabla g(x,y(,z))$

$g(x,y(,z)) = k$

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m² de papelão. Determina o volume máximo de tal caixa.



$xz = \lambda(x + 2z)$ (II)

$xy = \lambda(2x + 2y)$ (III)

$xy + 2xz + 2yz = 12$ (IV)

2(II) – (III): $2xz - xy = 2\lambda(x + 2z) - \lambda(2x + 2y) \Rightarrow x(2z - y) = 2\lambda(2z - y)$

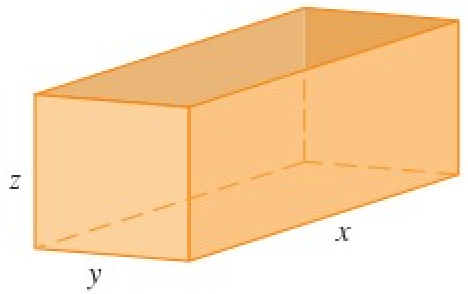
$x = \lambda$ ou $x = y = 2z$ substituir em (IV): $4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12 \Rightarrow z = 1$

$\Rightarrow x = y = 2z = 2 \Rightarrow V = xyz = 4$ m³

Espaço pra imagem da câmera na live

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m² de papelão. Determina o volume máximo de tal caixa.

$V_{max} = 4\ m^3$



Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:
Procuramos o máximo ou mínimo de $f(x,y(,z))$ limitado em $g(x,y(,z)) = k$
=> Achar $(x,y(,z))$ para aquele
$\nabla f(x,y(,z)) = \lambda \nabla g(x,y(,z))$
$g(x,y(,z)) = k$

Determine os valores extremos da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no círculo $x^2 + y^2 = 1$.

$g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$

$f_x = \lambda g_x$ => $2x = 2\lambda x$ => $\lambda = 1$ ou $x = 0$

$f_y = \lambda g_y$ => $4y = 2\lambda y$ => $\lambda = 2$ ou $y = 0$

2 soluções: $\lambda = 1$ e $y = 0$ => $x = \pm 1$

$\lambda = 2$ e $x = 0$ => $y = \pm 1$

4 soluções: $(1, 0)$: $f = 1$, $(-1, 0)$: $f = 1$, $(0, 1)$: $f = 2$, $(0, -1)$: $f = 2$

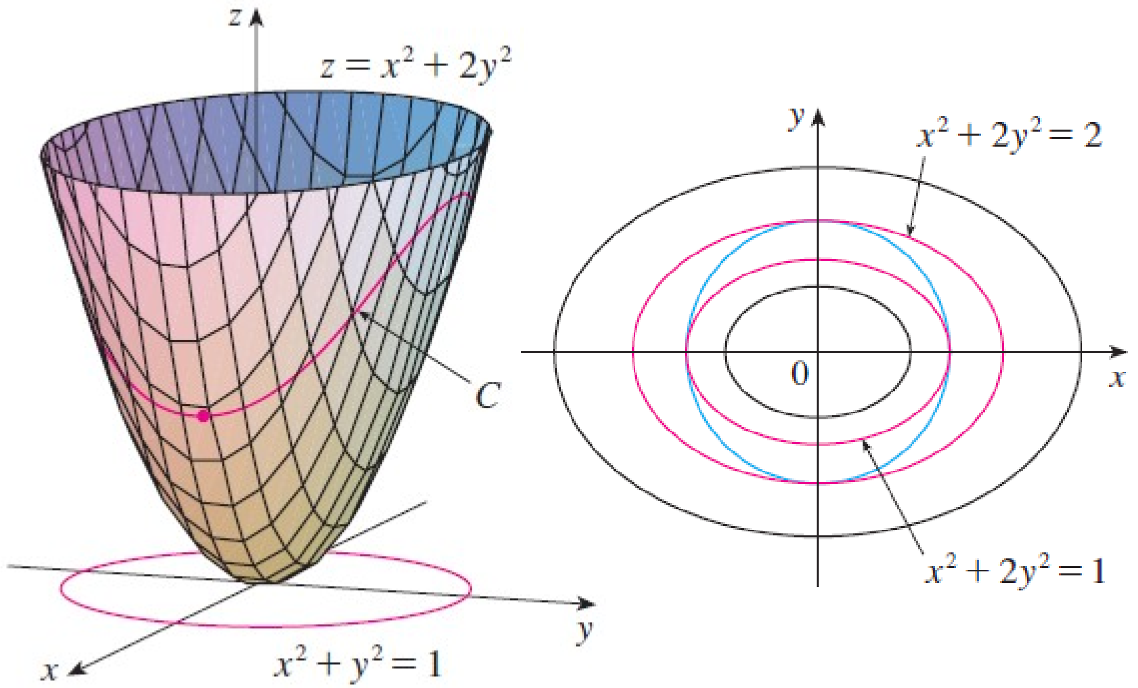
min min max max

Espaço pra imagem da câmera na live

Determine os valores extremos da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no círculo $x^2 + y^2 = 1$.

máximos: $f(0, 1) = f(0, -1) = 2$

mínimos: $f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$



Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:
Procuramos o máximo ou mínimo de $f(x,y(,z))$
limitado em $g(x,y(,z)) = k$
=> Achar $(x,y(,z))$ para aquele
$\nabla f(x,y(,z)) = \lambda \nabla g(x,y(,z))$
$g(x,y(,z)) = k$

Determine os valores extremos da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$
no disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

Borda:
máximos: $f(0, 1) = f(0, -1) = 2$
não mais mínimos: $f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$

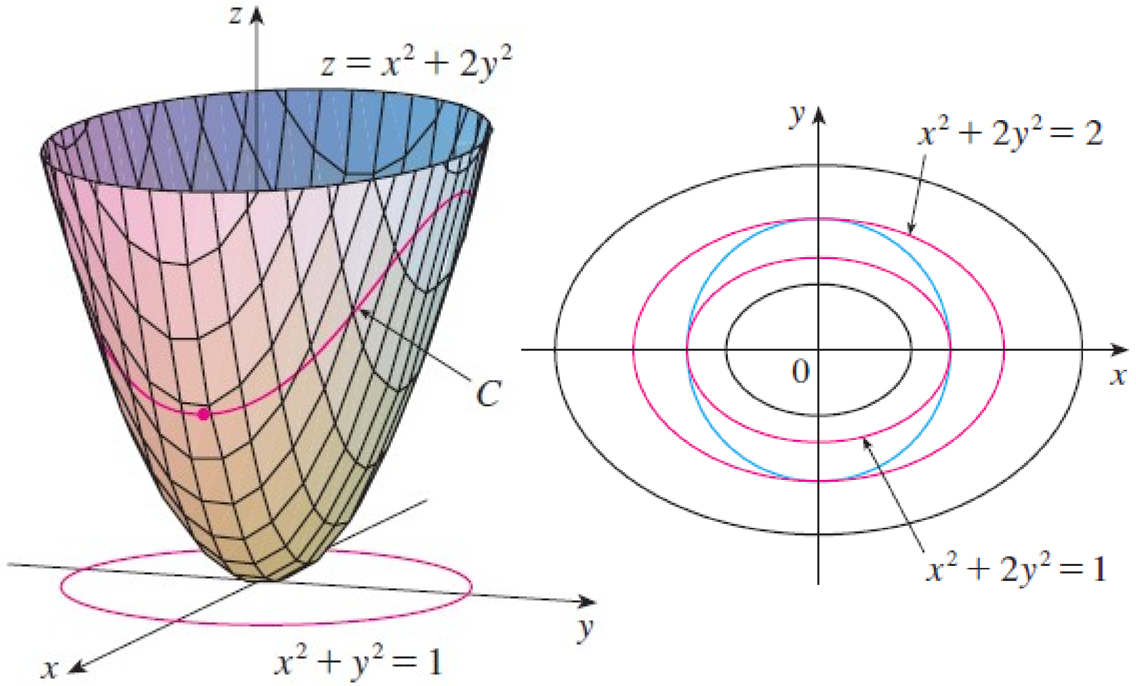
interior: $f_x = f_y = 0 = 2x = 4y \Rightarrow (0, 0)$: $f = 0$: mínimo

Espaço pra imagem da câmera na live

Determine os valores extremos da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

máximos: $f(0, 1) = f(0, -1) = 2$

mínimo: $f(0, 0) = 0$



Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:
Procuramos o máximo ou mínimo de $f(x,y(,z))$
limitado em $g(x,y(,z)) = k$
=> Achar $(x,y(,z))$ para aquele
$\nabla f(x,y(,z)) = \lambda \nabla g(x,y(,z))$
$g(x,y(,z)) = k$

Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estão mais próximos e mais distantes do ponto (3, 1, -1).

f: distância até o ponto (3, 1, -1)
$f = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$
$g = x^2 + y^2 + z^2 = 4$
$f_x = \lambda g_x$: $2(x-3) = 2\lambda x \;\Rightarrow\; \lambda = (x-3)/x$ (I)
$f_y = \lambda g_y$: $2(y-1) = 2\lambda y \;\Rightarrow\; \lambda = (y-1)/y$ (II)
$f_z = \lambda g_z$: $2(z+1) = 2\lambda z \;\Rightarrow\; \lambda = (z+1)/z$
combinando (I) e (II): $(x-3)/x = (y-1)/y \;\Rightarrow\; (x-3)y = (y-1)x \Rightarrow xy - 3y = xy - x$

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:
Procuramos o máximo ou mínimo de $f(x,y(,z))$ limitado em $g(x,y(,z)) = k$
=> Achar $(x,y(,z))$ para aquele
$\nabla f(x,y(,z)) = \lambda \nabla g(x,y(,z))$
$g(x,y(,z)) = k$

$f = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$

$g = x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (IV)

$f_x = \lambda g_x$: $2(x-3) = 2\lambda x \Rightarrow \lambda = (x-3)/x$ (I)

$f_y = \lambda g_y$: $2(y-1) = 2\lambda y \Rightarrow \lambda = (y-1)/y$ (II)

$f_z = \lambda g_z$: $2(z+1) = 2\lambda z \Rightarrow \lambda = (z+1)/z$

combinando (I) e (II): $(x-3)/x = (y-1)/y \Rightarrow (x-3)y = (y-1)x \Rightarrow xy - 3y = xy - x$
$\Rightarrow x = 3y$

combinando (I) e (III): $(x-3)/x = (z+1)/z \Rightarrow (x-3)z = (z+1)x \Rightarrow x = -3z$

substituindo em (IV): $x^2 + x^2/9 + x^2/9 = 4 \Rightarrow x^2 = 36/11 \Rightarrow x = \pm 6/\sqrt{11}$
$\Rightarrow y = \pm 2/\sqrt{11}$, $z = \mp 2/\sqrt{11}$ => soluções: $1/\sqrt{11}\cdot(6,2,-2)$, $1/\sqrt{11}\cdot(-6,-2,2)$

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:

Procuramos o máximo ou mínimo de $f(x,y(,z))$ limitado em $g(x,y(,z)) = k$

=> Achar $(x,y(,z))$ para aquele

$\nabla f(x,y(,z)) = \lambda \nabla g(x,y(,z))$

$g(x,y(,z)) = k$

$f = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$

soluções: $1/\sqrt{11}\cdot(6,2,-2)$, $1/\sqrt{11}\cdot(-6,-2,2)$

achar as distâncias mínima e máxima: substituir estas duas soluções em $\sqrt{[(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2]}$

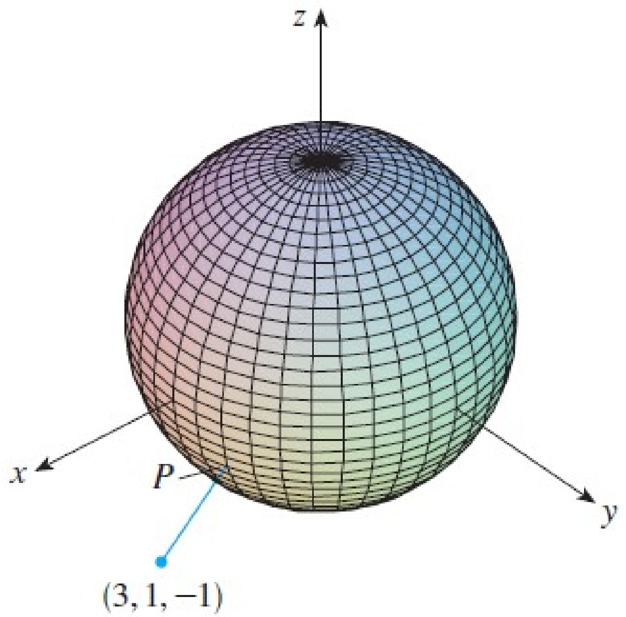
O maior dos dois valores é a distância máxima e o menor, a distância mínima

Espaço pra imagem da câmera na live

Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estão mais próximos e mais distantes do ponto (3, 1, -1).

Mais próximo: $1/\sqrt{11} \cdot (6, 2, -2)$

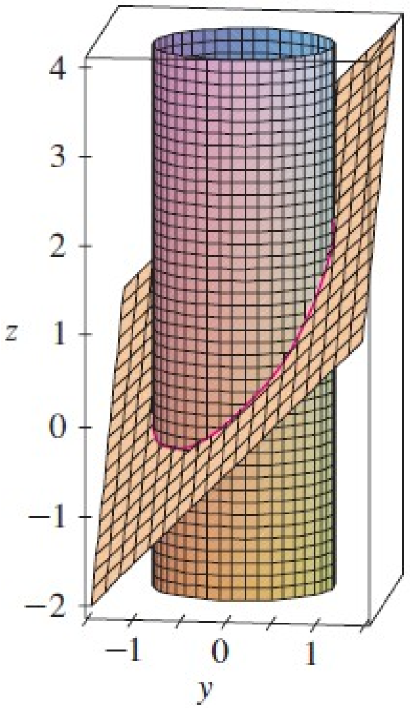
Mais distante: $1/\sqrt{11} \cdot (-6, -2, 2)$



Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:
Procuramos o máximo ou mínimo de $f(x,y(,z))$ limitado em $g(x,y(,z)) = k$ e $h(x,y(,z)) = c$
=> Achar $(x,y(,z))$ para aquele
$\nabla f(x,y(,z)) = \lambda \nabla g(x,y(,z)) + \mu \nabla h(x,y(,z))$
$g(x,y(,z)) = k$ e $h(x,y(,z)) = c$

Determine o valor máximo da função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na curva da interseção do plano $x - y + z = 1$ com o cilíndro $x^2 + y^2 = 1$.



$f_x = \lambda g_x + \mu h_x \Rightarrow 1 = \lambda + 2\mu x$ (I)
$f_y = \lambda g_y + \mu h_y \Rightarrow 2 = -\lambda + 2\mu y$ (II)
$f_z = \lambda g_z + \mu h_z \Rightarrow 3 = \lambda$ substituir em (I) e (II):
$1 = 3 + 2\mu x \Rightarrow \mu = -1/x$
$2 = -3 + 2\mu y \Rightarrow \mu = 5/2y$ combinando: $-1/x = 5/2y \Rightarrow x = -2y/5$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = (-2y/5)^2 + y^2 = 29y^2/25 = 1$
$\Rightarrow y = 5/\sqrt{29},\ x = -2/\sqrt{29}$

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:

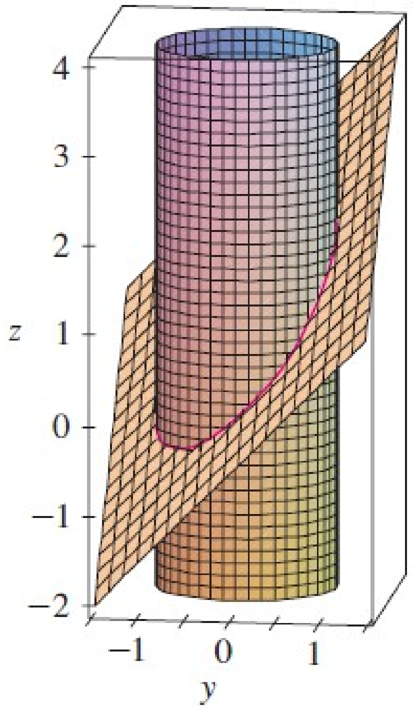
Procuramos o máximo ou mínimo de $f(x,y(,z))$ limitado em $g(x,y(,z)) = k$ e $h(x,y(,z)) = c$

=> Achar $(x,y(,z))$ para aquele

$\nabla f(x,y(,z)) = \lambda \nabla g(x,y(,z)) + \mu \nabla h(x,y(,z))$

$g(x,y(,z)) = k$ e $h(x,y(,z)) = c$

Determine o valor máximo da função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na curva da interseção do plano $x - y + z = 1$ com o cilíndro $x^2 + y^2 = 1$.



$f_x = \lambda g_x + \mu h_x \Rightarrow 1 = \lambda + 2\mu x$ (I)

$f_y = \lambda g_y + \mu h_y \Rightarrow 2 = -\lambda + 2\mu y$ (II)

$f_z = \lambda g_z + \mu h_z \Rightarrow 3 = \lambda$ substituir em (I) e (II):

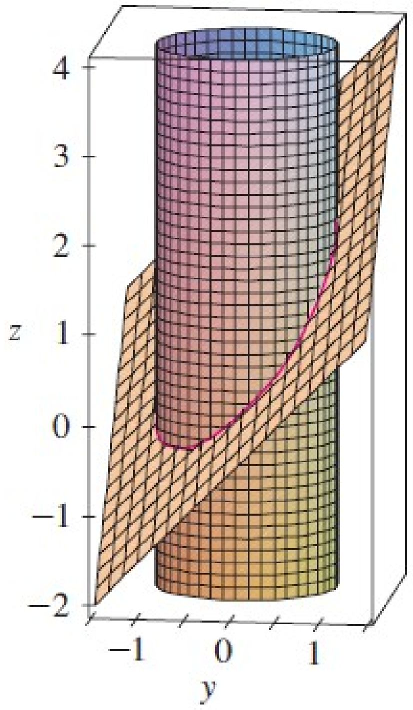
$\Rightarrow y = 5/\sqrt{29}$, $x = -2/\sqrt{29}$, $z = 1 - x + y = 1 + 7/\sqrt{29}$

$f(-2/\sqrt{29}, 5/\sqrt{29}, 1+7/\sqrt{29}) = -2/\sqrt{29} + 10/\sqrt{29} + 3(1+7/\sqrt{29})$

$= 3 + 29/\sqrt{29} = 3 + \sqrt{29}$

Espaço pra imagem da câmera na live

Determine o valor máximo da função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na curva da interseção do plano $x - y + z = 1$ com o cilíndro $x^2 + y^2 = 1$.



Valor máximo: $3 + \sqrt{29}$

Nos pontos $(\pm 2/\sqrt{29}, \pm 5/\sqrt{29}, 1 \pm 7/\sqrt{29})$