Espaço pra imagem da câmera na live

Faça uma pergunta pelo chat.
Pode demorar uns dez segundas até eu ver a pergunta.

A minha sugestão é resolver alguns exercícios sobre o novo assunto
Integrais Duplas, da Definição até
Integrais sobre Regiões Genéricas.

Começamos assim que alguém se manifestar no chat.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Espaço pra imagem da câmera na live

Se $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ -2 \leq y \leq 2\}$, calcule a integral $\iint_R \sqrt{1 - x^2}\, dA$

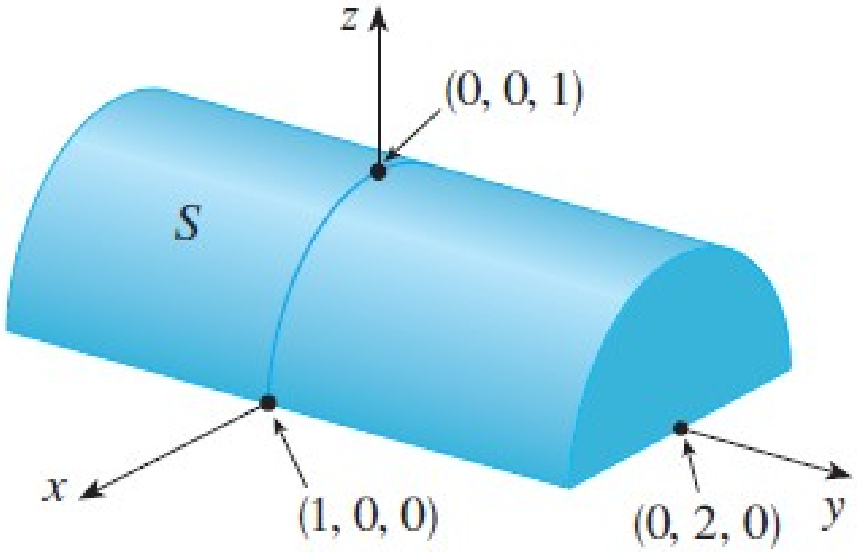
$$\iint_R \sqrt{1 - x^2}\, dA = \text{Volume debaixo do cilindro com área de base um semi-círculo de raio 1 e altura 4 (de } y = -2 \text{ a } 2)$$

$$= 2\pi$$

Espaço pra imagem da câmera na live

Se $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$, calcule a integral $\iint_R \sqrt{1 - x^2}\, dA$

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2}\, dA = 2\pi$$



Espaço pra imagem da câmera na live

Calcule o valor das integrais iteradas

(a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx$

(b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy$

(a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx = \int_0^3 [\tfrac{1}{2} x^2 y^2]_1^2 \, dx = \int_0^3 1.5 x^2 \, dx = 1.5 [x^3/3]_0^3 = 27/2$

(b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy = \int_1^2 [x^3 y/3]_0^3 \, dy = \int_1^2 9y \, dy = 9 \cdot \int_1^2 y \, dy = 9 \cdot [y^2/2]_1^2$

$= 27/2$

Espaço pra imagem da câmera na live

Calcule o valor das integrais iteradas

(a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx$

(b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy$

(a) 27/2

(b) 27/2

=> Teorema de Fubini

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:

Teorema de Fubini

$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$

Calcule $\iint_R y \operatorname{sen}(xy)$, onde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

$\int_1^2 \int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy)\, dy\, dx$ ou $\int_0^\pi \int_1^2 y \operatorname{sen}(xy)\, dx\, dy$?

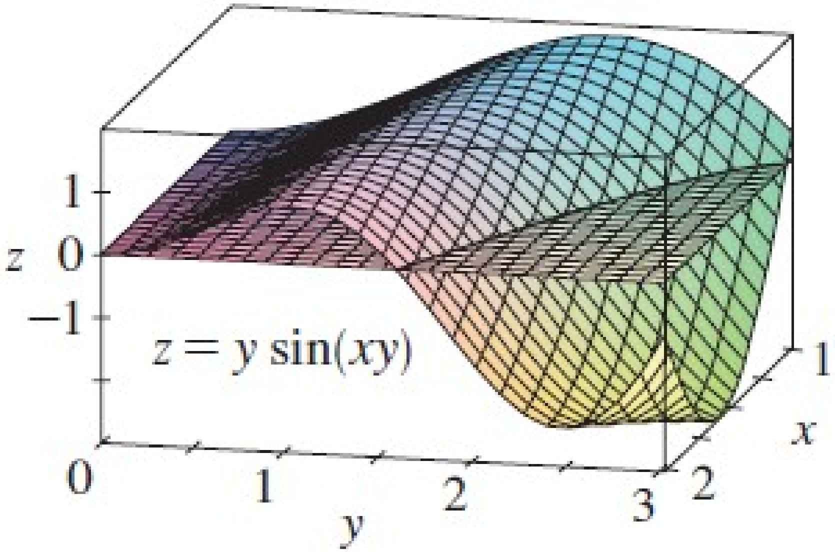
O segundo parece mais fácil:

$\int_0^\pi \int_1^2 y \operatorname{sen}(xy)\, dx\, dy = \int_0^\pi y\, [-\cos(xy)/y]_1^2\, dy$

$= \int_0^\pi y\, [-\cos(2y)/y + \cos(1y)/y]\, dy$

$= \int_0^\pi y\, [\cos(y) - \cos(2y)]/y\, dy = \int_0^\pi [\cos(y) - \cos(2y)]\, dy$

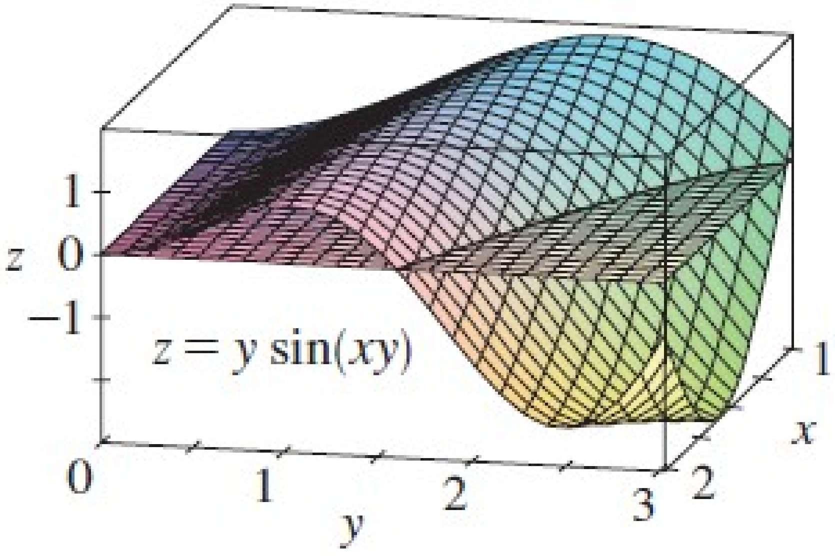
$= [\operatorname{sen}(y) - ½\cdot\operatorname{sen}(2y)]_0^\pi = [0 - ½\cdot 0 – 0 + ½\cdot 0] = 0$



Espaço pra imagem da câmera na live

Calcule $\iint_R y \operatorname{sen}(xy)$, onde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

solução: 0



Espaço pra imagem da câmera na live

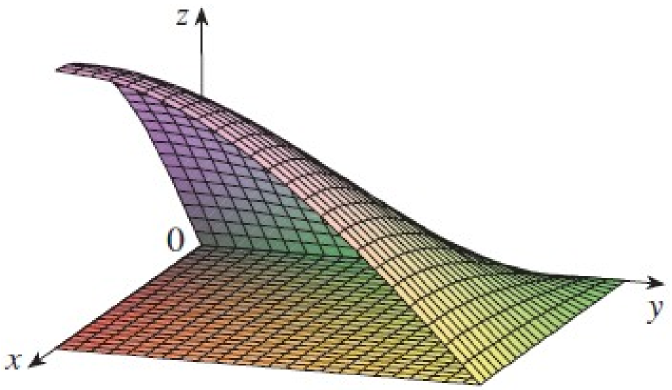
Lembrete:

Para funções $f(x, y)$ que podem ser separadas em duas funções, uma apenas de x e a outra apenas de y, $f(x, y) = g(x)h(y)$ vale

$$\int_a^b \int_c^d g(x)h(y)\, dy\, dx = \int_a^b g(x)\, dx \cdot \int_c^d h(y)\, dy$$

Se $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, calcule a integral $\iint_R \operatorname{sen} x \cos y \, dA$.

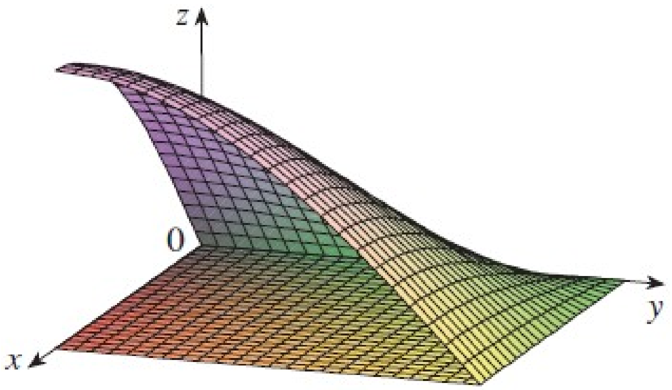
$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx \cdot \int_0^{\pi/2} \cos y \, dy = [-\cos x]_0^{\pi/2} \cdot [\operatorname{sen} y]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1$$



Espaço pra imagem da câmera na live

Se $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, calcule a integral $\iint_R \operatorname{sen} x \cos y \, dA$.

solução: 1



Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete: Região D tipo I:

$D = \{(x, y) | \ a \leq x \leq b, \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

então: $\iint_D f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} f(x, y) \, dy \, dx$

Região tipo II: mesmo coisa com os papeis de x e y invertidos.

Calcule $\iint_D (x + 2y) \, dA$, onde D é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

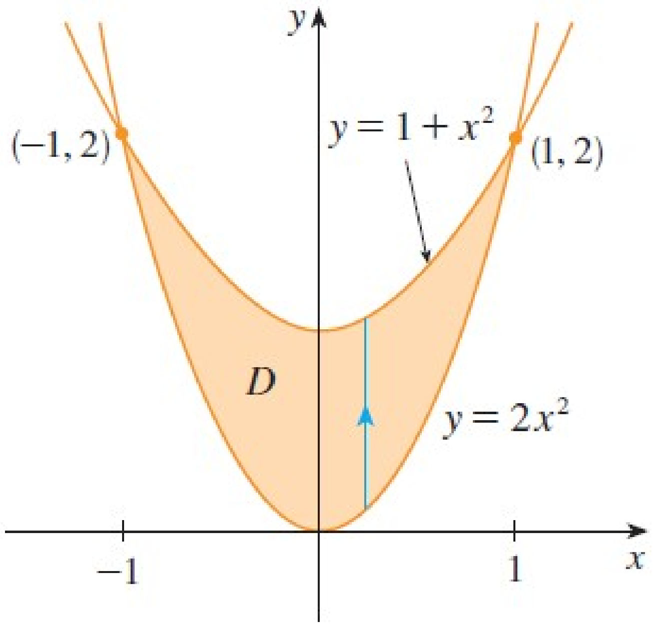
$\int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y) \, dy \, dx = \int_{-1}^{1} [xy + y^2]_{2x^2}^{1+x^2} \, dx$

$= \int_{-1}^{1} [x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2] \, dx$

$= \int_{-1}^{1} [1 + x + 2x^2 - x^3 - 3x^4] \, dx$

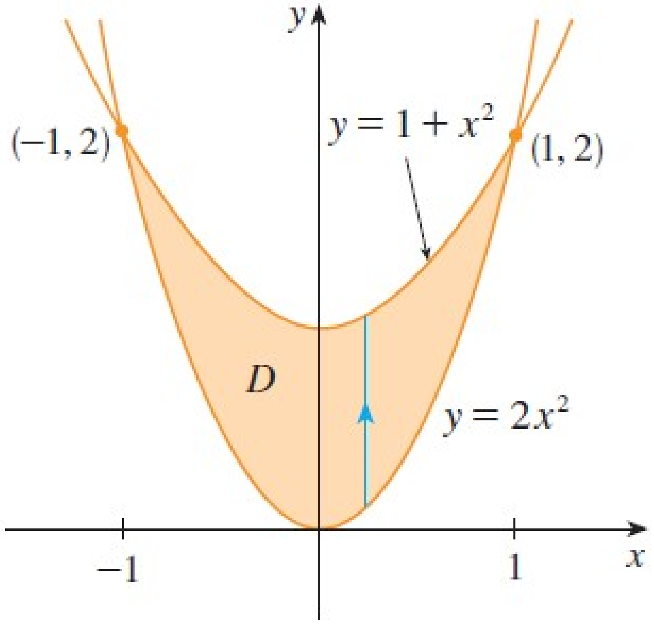
$= [x + ½x^2 + 2/3 \cdot x^3 - ¼ \cdot x^4 – 3/5 \cdot x^5]_{-1}^{1}$

$= 2 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot 2/3 - 0 – 2 \cdot 3/5 = (30 + 20 - 18)/15 = 32/15$



Espaço pra imagem da câmera na live

Calcule $\iint_D (x + 2y)\, dA$, onde D é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.



solução: 32/15

Espaço pra imagem da câmera na live

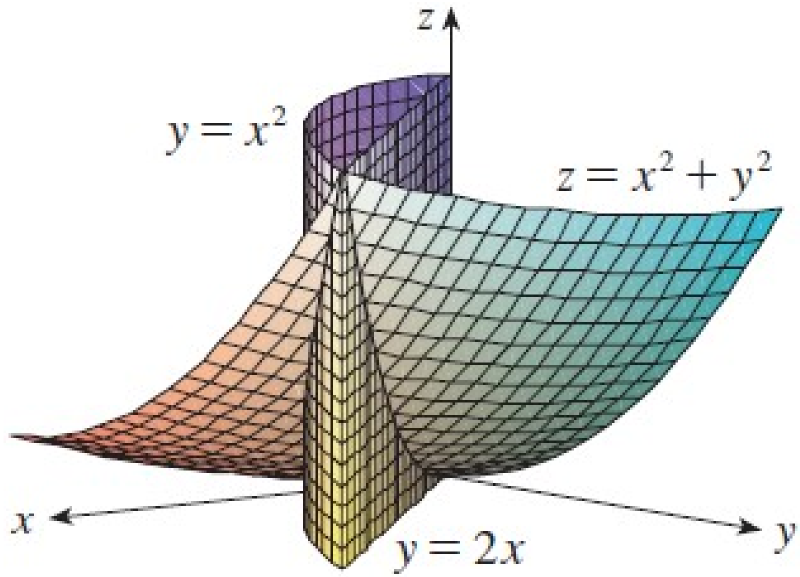
Lembrete: Região D tipo I:

$D = \{(x, y) | \ a \leq x \leq b, \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

então: $\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$

Região tipo II: mesmo coisa com os papeis de x e y invertidos.

Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.



Espaço pra imagem da câmera na live

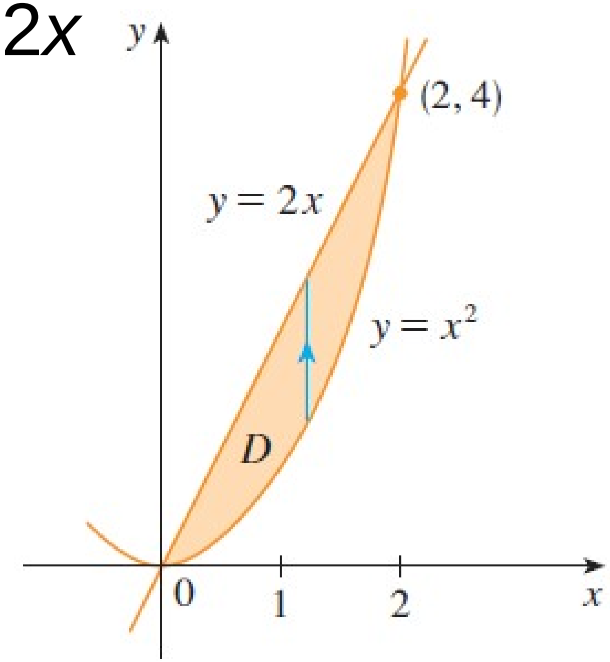
Lembrete: Região D tipo I:

$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

então: $\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$

Região tipo II: mesmo coisa com os papeis de x e y invertidos.

Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.



$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x^2 + y^2\, dy\, dx = \int_0^2 [x^2y + y^3/3]_{x^2}^{2x}\, dx$

$= \int_0^2 [2x^3 + 8x^3/3 - x^4 - x^6/3]\, dx$

$= [7/6 \cdot x^4 - x^5/5 - x^7/21]_0^2 = 7{\cdot}8/3 - 32/5 - 128/21$

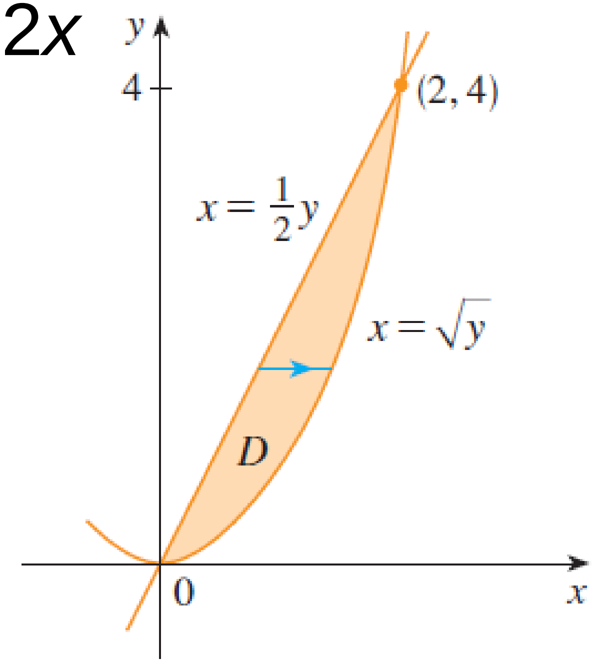
$= (35{\cdot}7{\cdot}8 - 21{\cdot}32 - 5{\cdot}128)/105 = 648/105 = 216/35$

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete: Região D tipo I:
$D = \{(x, y) |\ a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$
então: $\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$

Região tipo II: mesmo coisa com os papeis de x e y invertidos.

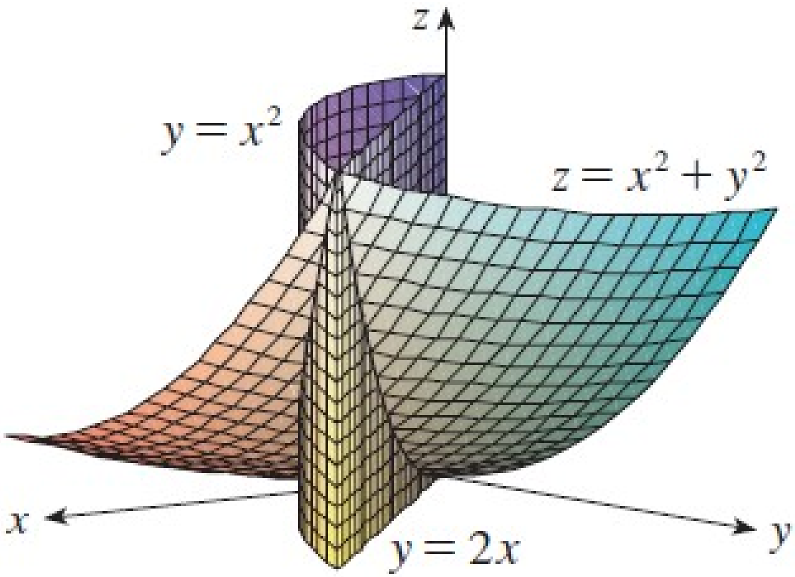
Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.



$$\int_0^4 \int_{½y}^{\sqrt{y}} x^2 + y^2\, dx\, dy = \int_0^4 [x^3/3 + y^2 x]_{½y}^{\sqrt{y}}\, dy$$
$$= \int_0^4 [y^{3/2}/3 + y^{5/2} - y^3/24 - ½\cdot y^3]\, dy$$
$$= [2y^{5/2}/15 + 2y^{7/2}/7 - 13y^4/96]_0^4$$
$$= 64/15 + 256/7 - 13\cdot 8/3 = 216/35$$

Espaço pra imagem da
câmera na live

Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.



solução: 216/35

Espaço pra imagem da câmera na live

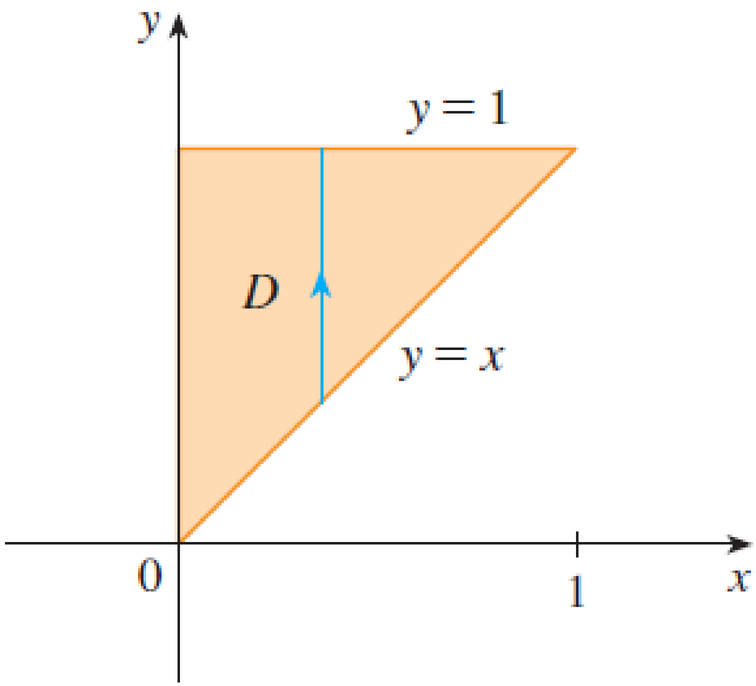
Lembrete: Região D tipo I:

$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

então: $\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$

Região tipo II: mesmo coisa com os papeis de x e y invertidos.

Calcule a integral iterada $\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dy\, dx$.



Difícil de integrar em y

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete: Região D tipo I:

$D = \{(x, y) |\ a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

então: $\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$

Região tipo II: mesmo coisa com os papeis de x e y invertidos.

Calcule a integral iterada $\int_0^1 \int_x^1 \mathrm{sen}(y^2)\, dy\, dx$.

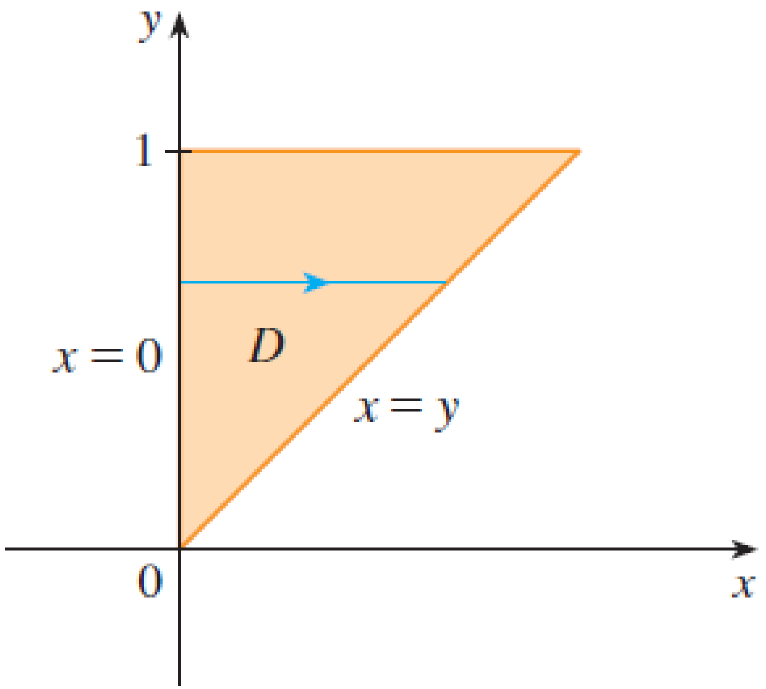
$\int_0^1 \int_0^y \mathrm{sen}(y^2)\, dx\, dy = \int_0^1 [\mathrm{sen}(y^2)x]_0^y\, dy$

$= \int_0^1 [\mathrm{sen}(y^2) \cdot y - \mathrm{sen}(y^2) \cdot 0]\, dy = \int_0^1 y \cdot \mathrm{sen}(y^2)\, dy$

$= ½ \cdot \int_0^1 2y \cdot \mathrm{sen}(y^2)\, dy = ½ \cdot [-\cos(y^2)]_0^1$

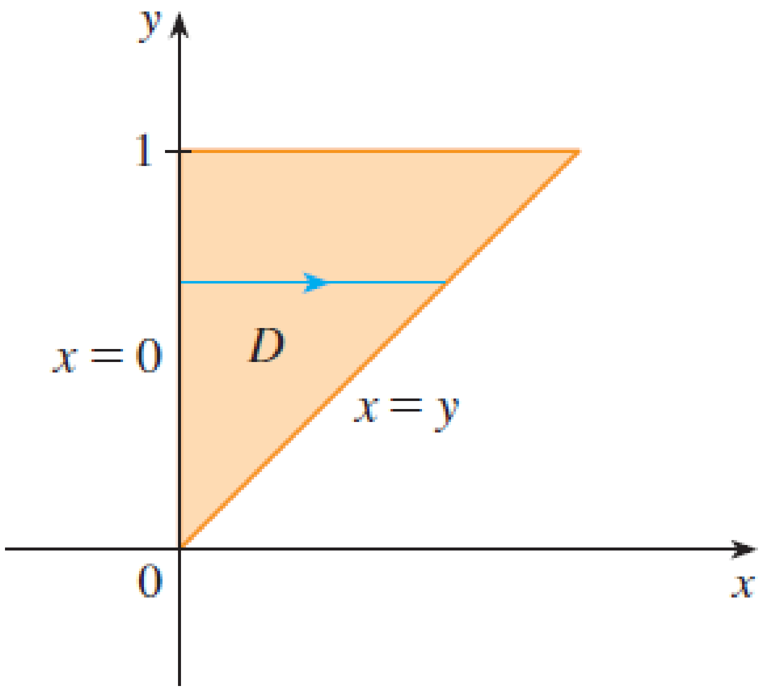
$= ½ \cdot [-\cos(1^2) + \cos(0^2)] = ½ \cdot [1 - \cos(1)]$

já que $d(-\cos(y^2))/dy = 2y \cdot \mathrm{sen}(y^2)$



Espaço pra imagem da câmera na live

Calcule a integral iterada $\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dy\, dx$.



solução: $\frac{1}{2}\cdot(1 - \cos 1)$