Espaço pra imagem da
câmera na live

Faça uma pergunta pelo chat.
Pode demorar uns dez segundas até eu ver a pergunta.

A minha sugestão é resolver alguns exercícios
sobre o novo assunto
Integrais Duplas: Mudança de Variáveis
e aplicações.

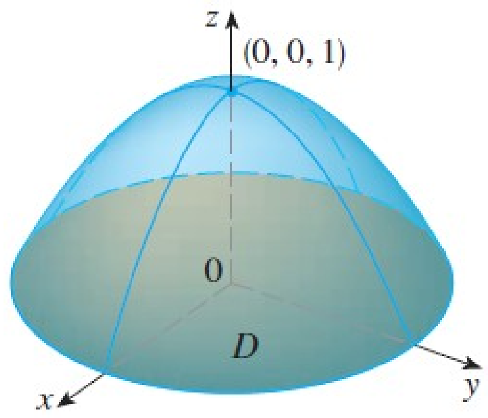
Começamos assim que alguém se manifestar no chat.

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete: Região D tipo I:
$D = \{(x, y) | \ a \leq x \leq b, \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$
então: $\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$

Região tipo II: mesmo coisa com os papeis de x e y invertidos.

Determine o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.



Área de integração: o círculo com raio 1: $y = \pm\sqrt{1-x^2}$

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 - x^2 - y^2 \, dy\, dx$$
$$= \int_{-1}^{1} [(1 - x^2)y - y^3/3]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$
$$= \int_{-1}^{1} [2(1 - x^2)\sqrt{1-x^2} - 2(1-x^2)^{3/2}/3] \, dx = \int_{-1}^{1} [4(1-x^2)^{3/2}/3] \, dx$$

difícil de integrar

Espaço pra imagem da câmera na live

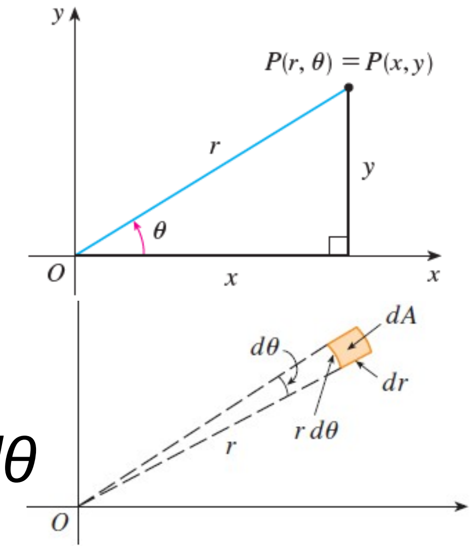
Lembrete:

Coordenadas polares:

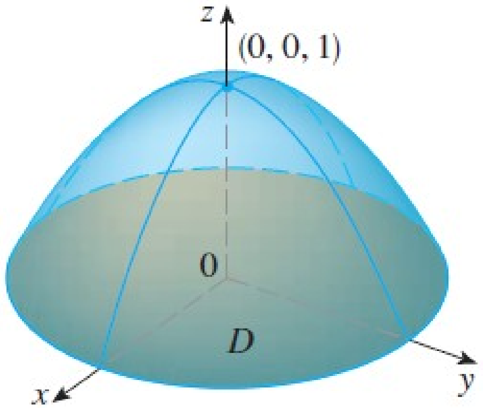
$r^2 = x^2 + y^2$, $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$

Mudança coordenadas cartesianas para coordenadas polares

$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta$



Determine o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

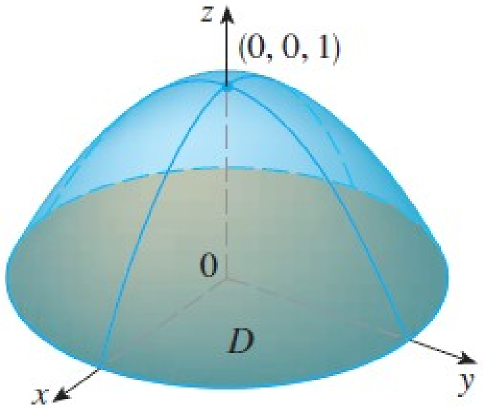


$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2)\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r - r^3\, r\, dr = 2\pi \cdot [r^2/2 - r^4/4]_0^1$

$= 2\pi \cdot ¼ = \pi/2$

Espaço pra imagem da
câmera na live

Determine o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$
e pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.



solução: $\pi/2$

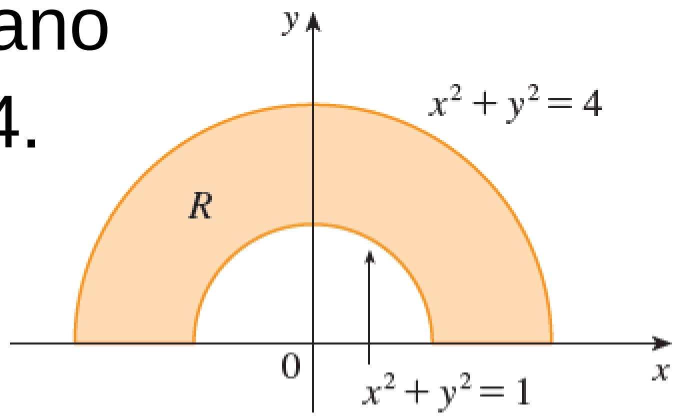
Às vezes, a função toma uma forma mais fácil de integrar
em coordenadas polares, por exemplo no caso de funções
Com simetria circular, $f = f(r)$ e independente de θ.

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete: Região D tipo I:
$D = \{(x, y) | \ a \leq x \leq b, \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$
então: $\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$

Região tipo II: mesmo coisa com os papeis de x e y invertidos.

Calcule $\iint_R (3x + 4y^2)\, dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.



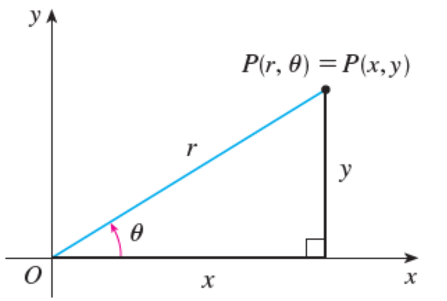
Daria três regioes para integrar sobre: x de -2 a -1,
x de -1 a 1 e x de 1 a 2.

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:

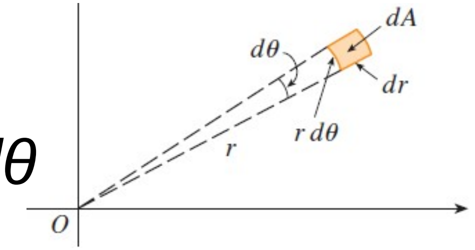
Coordenadas polares:

$r^2 = x^2 + y^2$, $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$

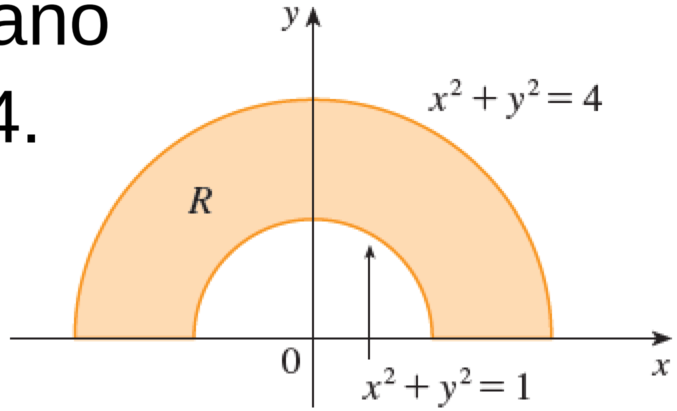


Mudança coordenadas cartesianas para coordenadas polares

$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta$



Calcule $\iint_R (3x + 4y^2)\, dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.



$\int_0^\pi \int_1^2 (3(r \cos \theta) + 4(r \operatorname{sen} \theta)^2)\, r\, dr\, d\theta$

Espaço pra imagem da câmera na live

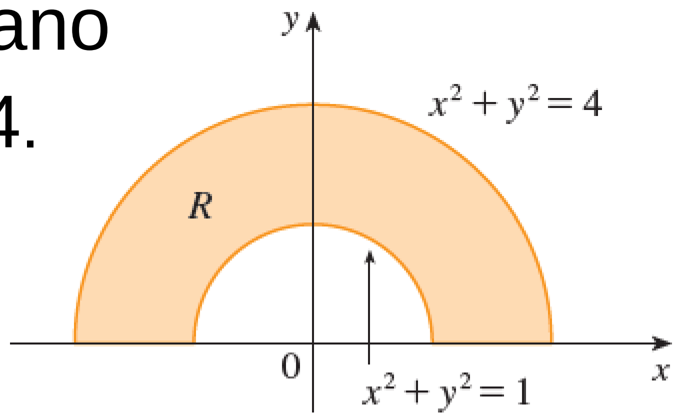
Outro lembrete:

$\text{sen}^2\,\theta = \tfrac{1}{2}\cdot(1 - \cos 2\theta)$

$\Rightarrow \int \text{sen}^2\,\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}\cdot(\theta - \tfrac{1}{2}\cdot\text{sen}\,2\theta)$

$= \tfrac{1}{2}\cdot\theta - \tfrac{1}{4}\cdot\text{sen}\,2\theta$

Calcule $\iint_R (3x + 4y^2)\, dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.



$\int_0^\pi \int_1^2 (3(r \cos\theta) + 4(r\,\text{sen}\,\theta)^2)\, r\, dr\, d\theta$

$= \int_0^\pi [\cos\theta \cdot r^3 + \text{sen}^2\,\theta \cdot r^4\,]_1^2\, dr\, d\theta$

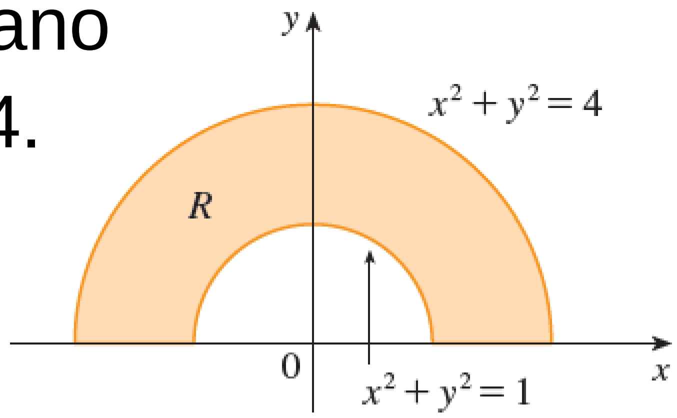
$= \int_0^\pi [7\cdot\cos\theta + 15\cdot\text{sen}^2\,\theta]_1^2\, dr\, d\theta$

$= [7\cdot\text{sen}\,\theta + 15\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot\theta - \tfrac{1}{4}\cdot\text{sen}\,2\theta)]_0^\pi$

$= [7\cdot(0-0) + 15\cdot(\pi/2 - 0/2 - \tfrac{1}{4}\cdot(0-0))] = 15\pi/2$

Espaço pra imagem da câmera na live

Calcule $\iint_R (3x + 4y^2)\, dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.



soluçao: $15\pi/2$

Às vezes, é a forma da região de integração que torna coordenadas polares mais fáceis de usar.

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:

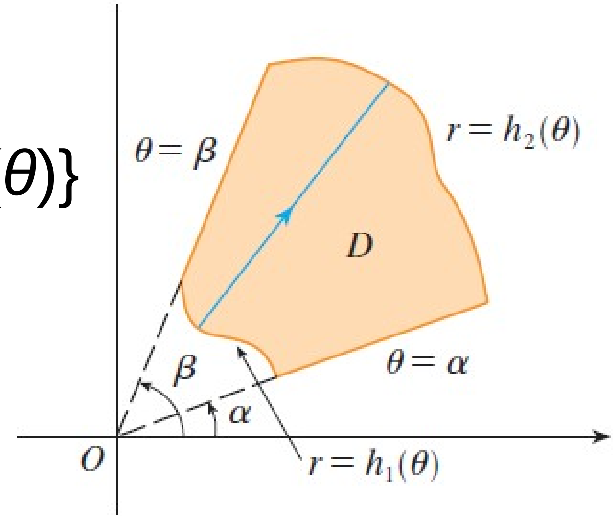
Se

$D = \{(r, \theta) | \, \alpha \leq \theta \leq \beta, \, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$

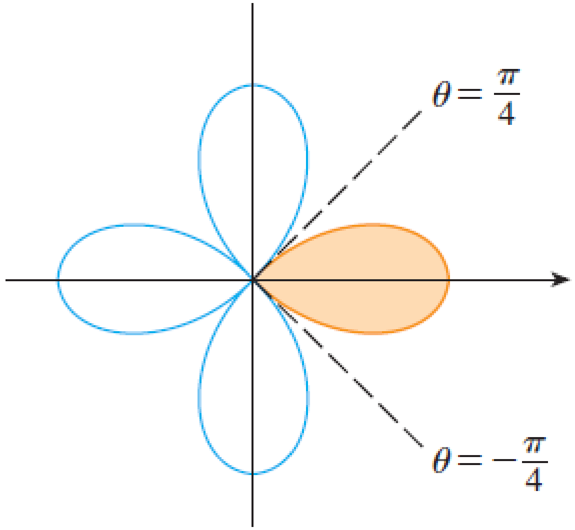
então

$\iint_D f(x, y)\, dA$

$= \int_\alpha^\beta \int_{h1(\theta)}^{h2(\theta)} f(r \cos \theta, r \, \mathrm{sen}\, \theta)\, r\, dr\, d\theta$



Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.



$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} 1\; r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [r^2/2]_0^{\cos 2\theta}\, d\theta$

$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [\tfrac{1}{2}\cos^2 2\theta - 0]\, d\theta$

Espaço pra imagem da câmera na live

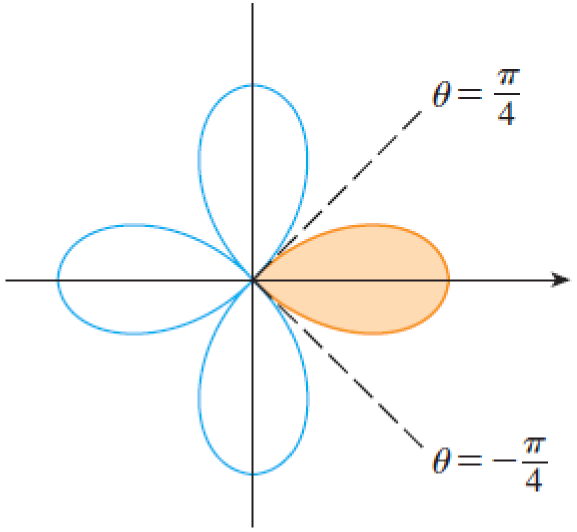
Outro lembrete:

$\cos^2 \theta = \tfrac{1}{2}\cdot(1 + \cos 2\theta)$

$\Rightarrow \int \cos^2 \theta \, d\theta = \tfrac{1}{2}\cdot(\theta + \tfrac{1}{2}\cdot \mathrm{sen}\, 2\theta)$

$= \tfrac{1}{2}\cdot\theta + \tfrac{1}{4}\cdot \mathrm{sen}\, 2\theta$

Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.



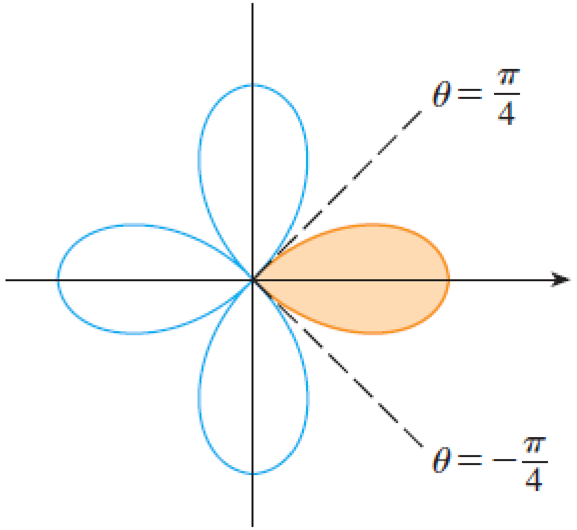
$\tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}[\cos^2 2\theta]\, d\theta = \tfrac{1}{2}\, [\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\cdot 2\theta + \tfrac{1}{4}\cdot \mathrm{sen}\, 2\cdot 2\theta)]_{-\pi/4}^{\pi/4}$

$= [\tfrac{1}{4}\, \theta + \mathrm{sen}\, 4\theta / 8]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \pi/8$

Espaço pra imagem da câmera na live

Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

solução: $\pi/8$



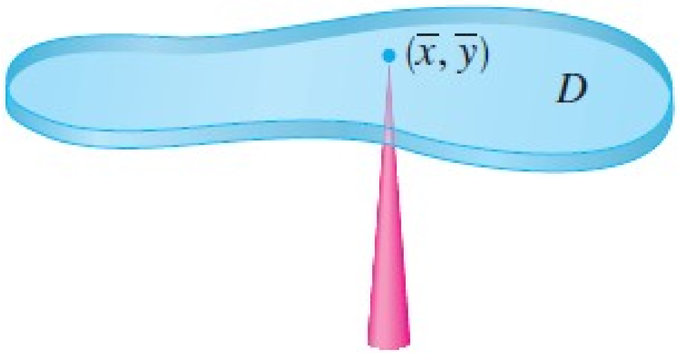
Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete: centro de massa de uma lâmina D de densidade de massa por área $\rho(x, y)$:

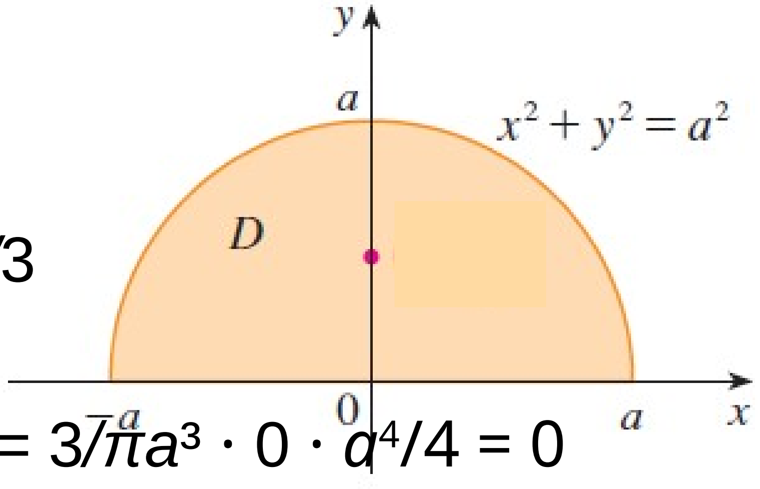
$\bar{x} = 1/m \cdot \iint_D x\,\rho(x, y)\, dA$,

$\bar{y} = 1/m \cdot \iint_D y\,\rho(x, y)\, dA$,

onde $m = \iint_D \rho(x, y)\, dA$



A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância ao centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.



$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA = \int_0^{\pi}\int_0^{a} Kr\, r\, dr\, d\theta = K \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a} r^2\, dr = K\, \pi\, a^3/3$

$\bar{x} = 3/K\pi a^3 \cdot \int_0^{\pi}\int_0^{a} r \cos\theta\, Kr\, r\, dr\, d\theta$

$= 3/K\pi a^3 \cdot K\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^3 \cos\theta\, dr\, d\theta = 3/\pi a^3 \cdot \int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta \int_0^{a} r^3\, dr = 3/\pi a^3 \cdot 0 \cdot a^4/4 = 0$

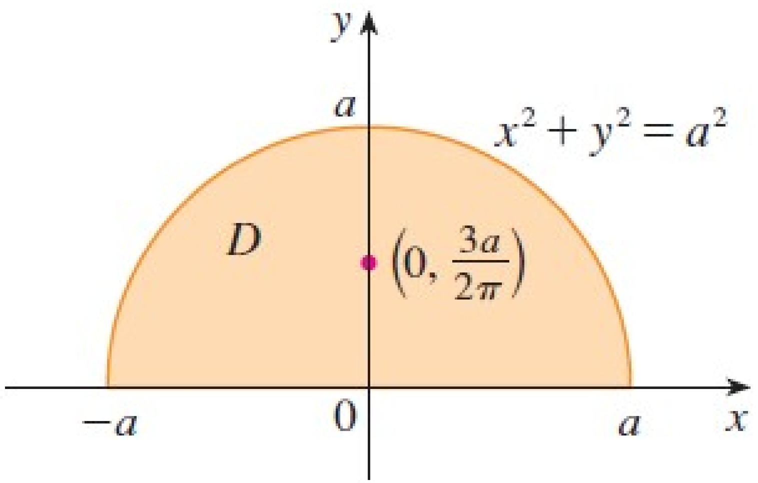
$\bar{y} = 3/K\pi a^3 \cdot \int_0^{\pi}\int_0^{a} r \operatorname{sen}\theta\, Kr\, r\, dr\, d\theta$

$= 3/K\pi a^3 \cdot K\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^3 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta = 3/\pi a^3 \cdot \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{a} r^3\, dr = 3/\pi a^3 \cdot 2 \cdot a^4/4 = 3a/2\pi$

Espaço pra imagem da câmera na live

A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância ao centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.

O centro de massa fica a uma distância do centro de $3/2\pi$ vezes o raio do semicírculo.



Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete: momento de inércia de uma lâmina D de densidade de massa por área $\rho(x, y)$ em relação aos eixos x e y e à origem:

$I_x = \iint_D x^2 \rho(x, y)\, dA$,

$I_y = \iint_D y^2 \rho(x, y)\, dA$,

$I_0 = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2)\, \rho(x, y)\, dA$

Determine os momentos de inércia I_x, I_y e I_0 do disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio a.

$$I_0 = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2 \rho\, r\, dr\, d\theta = \rho\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a} r^3\, dr = \rho\, 2\pi\, a^4/4 = \pi\rho a^4/2 = m\, a^2/2$$

$$I_x = I_y = ½\cdot I_0 = \pi\rho a^4/4 = m\, a^2/4$$

Espaço pra imagem da câmera na live

Determine os momentos de inércia I_x, I_y e I_0 do disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio a.

$$I_x = I_y = \pi\rho a^4/4 = \tfrac{1}{4}ma^2$$
$$I_0 = \pi\rho a^4/2 = \tfrac{1}{2}ma^2$$

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete: para a função densidade de probabilidade conjunta $f(x, y)$, a probabilidade de que (X, Y) esteja em uma região D:

$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y)\, dA$,

e vale $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = 1$

Se a função densidade de probabilidade conjunta for dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{se } 0 \leq x \leq 10,\ 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

determine o valor da constante C. Em seguida, calcule $P(X \leq 7, Y \geq 2)$.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = 1 = \int_0^{10}\int_0^{10} C(x + 2y)\, dx\, dy = C \int_0^{10} [x^2/2 + 2xy]_0^{10}\, dy$$

$$= C \int_0^{10} [x^2/2 + 2xy]_0^{10}\, dy = C \int_0^{10} 50 + 20y\, dy = C\, [50y + 10y^2]_0^{10}$$

$$= C \cdot 1500 = 1 \Rightarrow C = 1/1500$$

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete: para a função densidade de probabilidade conjunta $f(x, y)$, a probabilidade de que (X, Y) esteja em uma região D:
$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y)\, dA$,
e vale $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = 1$

Se a função densidade de probabilidade conjunta for dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{se } 0 \le x \le 10,\ 0 \le y \le 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

determine o valor da constante C. Em seguida, calcule $P(X \le 7, Y \ge 2)$.

$P(\ldots) = 1/1500 \int_2^{10} \int_0^7 (x + 2y)\, dx\, dy = 1/1500 \int_2^{10} [x^2/2 + 2xy]_0^7\, dy$

$= 1/1500 \int_2^{10} 49/2 + 14y\, dy = 1/1500\, [49y/2 + 7y^2]_2^{10}$

$= 1/1500\, [49 \cdot 10/2 - 49 \cdot 2/2 + 7 \cdot 10^2 - 7 \cdot 2^2]$

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete: para a função densidade de probabilidade conjunta $f(x, y)$, a probabilidade de que (X, Y) esteja em uma região D:

$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y)\, dA$,

e vale $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = 1$

Se a função densidade de probabilidade conjunta for dada por

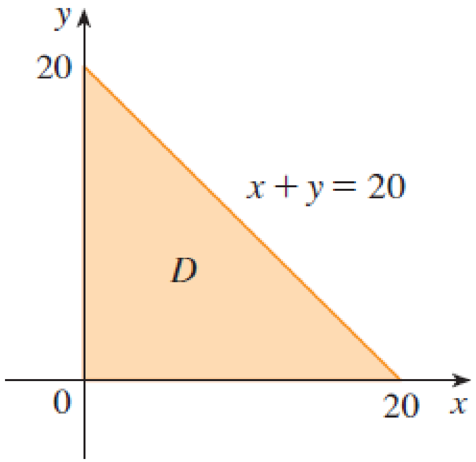
$$f(x, y) = \begin{cases} 1/50 \cdot e^{-x/10} e^{-y/5} & \text{se } x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

mostre, que $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = 1$. Em seguida, calcule $P(X + Y < 20)$.

$\int_0^\infty \int_0^\infty 1/50 \cdot e^{-x/10} e^{-y/5}\, dx\, dy = 1/50 \cdot \int_0^\infty e^{-x/10}\, dx \int_0^\infty e^{-y/5}\, dy$

$= 1/50 \cdot [-10 \cdot e^{-x/10}]_0^\infty\ [-5 \cdot e^{-y/5}]_0^\infty$

$= 1/50 \cdot [-10 \cdot (0-1)]\ [-5 \cdot (0-1)] = 1$ QED



Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete: para a função densidade de probabilidade conjunta $f(x, y)$, a probabilidade de que (X, Y) esteja em uma região D:

$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y)\, dA$,

e vale $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = 1$

Se a função densidade de probabilidade conjunta for dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/50 \cdot e^{-x/10} e^{-y/5} & \text{se } x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

mostre, que $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = 1$. Em seguida, calcule $P(X + Y < 20)$.

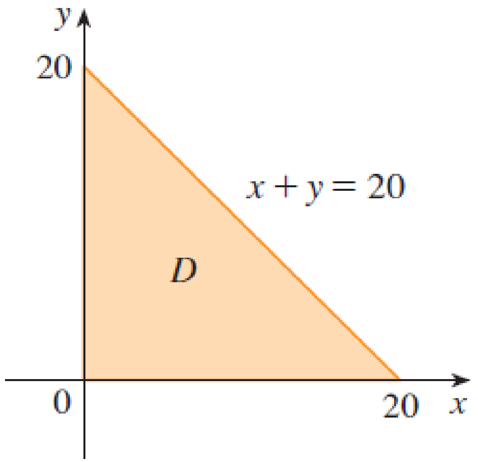
$$\int_0^{20}\int_0^{20-x} 1/50 \cdot e^{-x/10} e^{-y/5}\, dy\, dx = 1/50 \cdot \int_0^{20} e^{-x/10} \int_0^{20-x} e^{-y/5}\, dy\, dx$$

$$= 1/50 \cdot \int_0^{20} e^{-x/10} \left[-5e^{-y/5}\right]_0^{20-x} dx = 1/50 \cdot \int_0^{20} e^{-x/10} \left[-5(e^{-(20-x)/5} - 1)\right] dx$$

$$= 1/10 \cdot \int_0^{20} e^{-x/10} (e^{-4+x/5} - 1)\, dx = 1/10 \cdot \int_0^{20} (e^{-4} e^{x/10} - e^{-x/10})\, dx$$

$$= 1/10 \cdot \left[10 \cdot e^{-4} e^{x/10} - (-10) \cdot e^{-x/10}\right]_0^{20} = \left[e^{-4} e^{x/10} + e^{-x/10}\right]_0^{20}$$

$$= e^{-4} \cdot (e^2 - 1) + (e^{-2} - 1) = -e^{-4} + 2e^{-2} - 1$$

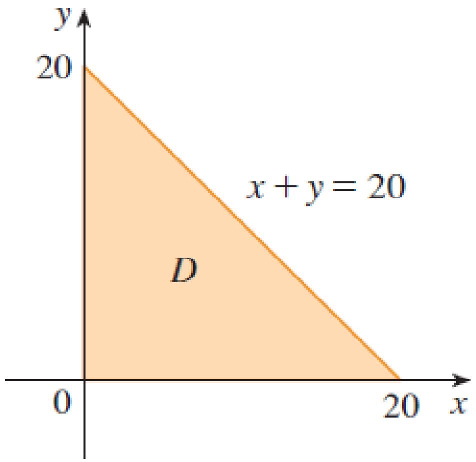


Espaço pra imagem da
câmera na live

Se a função densidade de probabilidade conjunta for dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/50 \cdot e^{-x/10} e^{-y/5} & \text{se } x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

mostre, que $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = 1$. Em seguida, calcule $P(X + Y < 20)$.



$$P(X + Y < 20) = 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0.7476$$