Espaço pra imagem da
câmera na live

Faça uma pergunta pelo chat.
Pode demorar uns dez segundas até eu ver a pergunta.

A minha sugestão é resolver alguns exercícios
sobre o novo assunto
Integrais Triplas, Definição e
Apilcações.

Georg Friedrich
Bernhard
Riemann
(1826-1866)

Começamos assim que alguém se manifestar no chat.

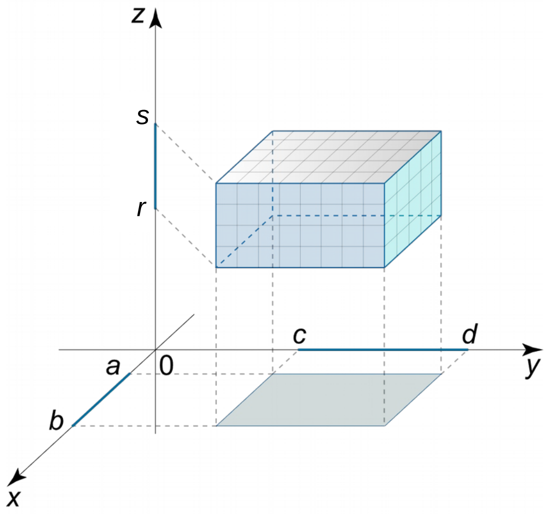
Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:
Teorema de Fubini
para Integrais Triplas:

$\iiint f(x, y, z)\, dV$

$B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$

$= \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$



Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2\, dV$, onde B é a caixa retangular dada por
$B = \{(x, y, z) |\ 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\}$.

$\iiint f(x, y, z)\, dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2\, dx\, dy\, dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 [yz^2x^2/2]_0^1\, dy\, dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 yz^2/2\, dy\, dz$

$= \int_0^3 [y^2z^2/4]_{-1}^2\, dz = \int_0^3 3z^2/4\, dz = ¼ \cdot [z^3]_0^3 = 27/4$

Espaço pra imagem da câmera na live

Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2 \, dV$, onde B é a caixa retangular dada por $B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$.

Solução: 27/4

Espaço pra imagem da câmera na live

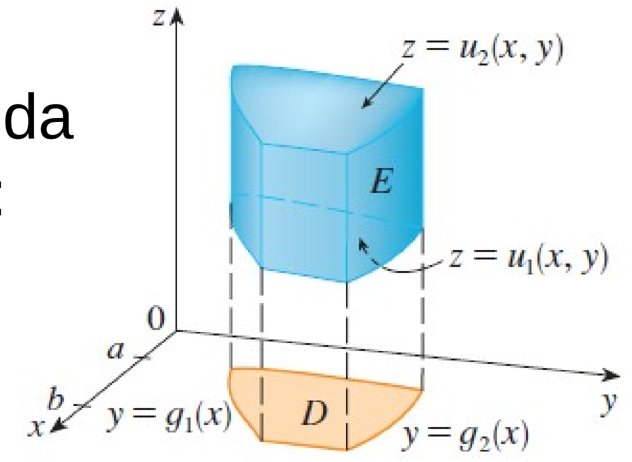
Lembrete:

Integral Tripla sobre uma região sólida genérica (tipo I com projeção tipo I):

$\iiint_E f(x, y, z)\, dV =$

$\int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} \int_{u1(x,\, y)}^{u2(x,\, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

(e 5 outras possibilidades)



Calcule $\iiint_E z\, dV$, onde E é o tetraedro sólido delimitado pelos quatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} [z^2/2]_0^{1-x-y}\, dy\, dx$

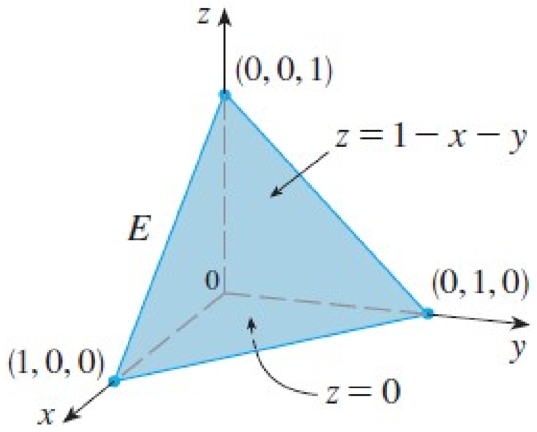
$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2/2\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2/2\, dy\, dx$

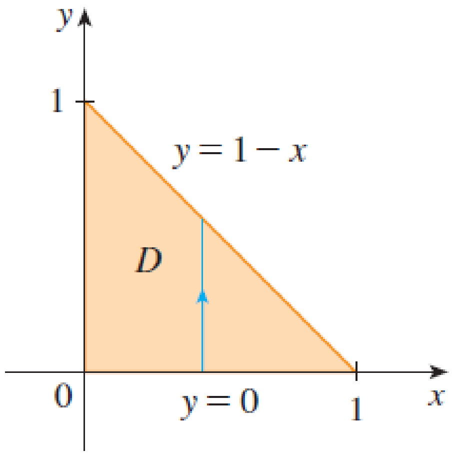
$= \int_0^1 -[(1-x-y)^3/6]_0^{1-x}\, dx$

$= \int_0^1 -1/6 \cdot [(1-x-(1-x))^3 - (1-x-0)^3]\, dx$

$= \int_0^1 1/6 \cdot (1-x)^3\, dx = -1/24 \cdot [(1-x)^4]_0^1$

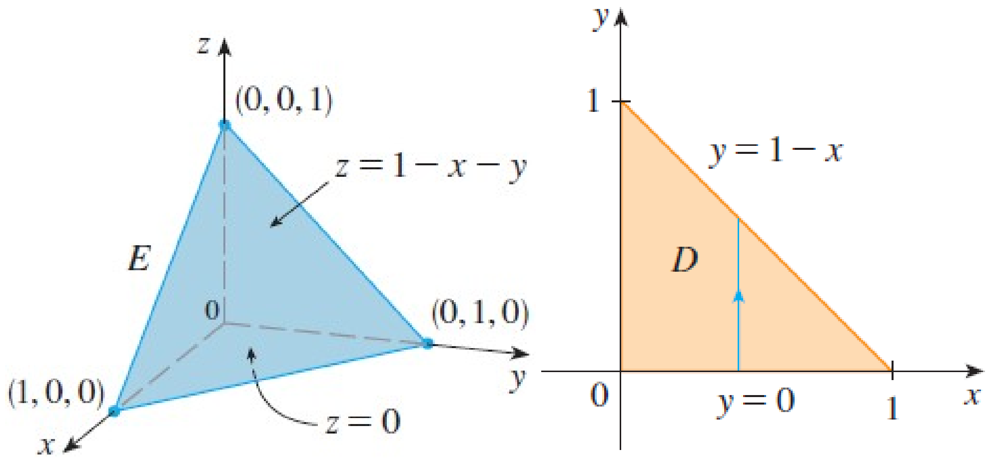
$= -1/24 \cdot [(1-x)^4]_0^1 = 1/24$





Espaço pra imagem da câmera na live

Calcule $\iiint_E z \, dV$, onde E é o tetraedro sólido delimitado pelos quatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.



Solução: 1/24

Espaço pra imagem da câmera na live

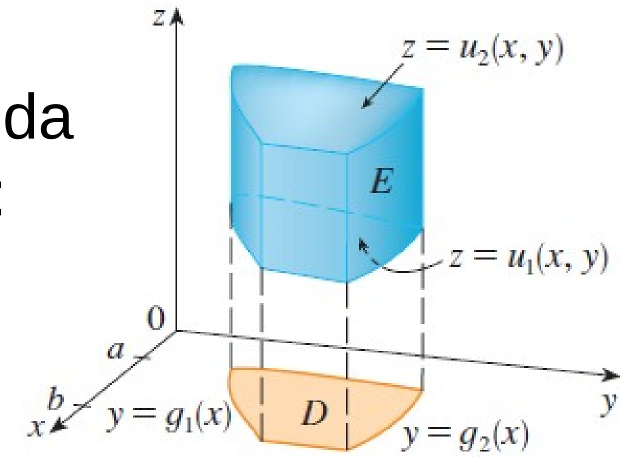
Lembrete:

Integral Tripla sobre uma região sólida genérica (tipo I com projeção tipo I):

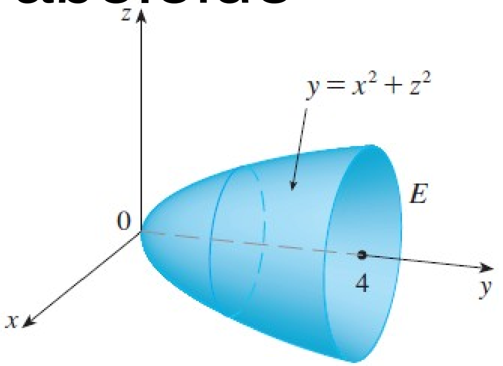
$\iiint_E f(x, y, z)\, dV =$

$\int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} \int_{u1(x,\, y)}^{u2(x,\, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

(e 5 outras possibilidades)



Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV$, onde E é a região limitada pelo paraboloide $y = x^2 + z^2$ e pelo plano $y = 4$.

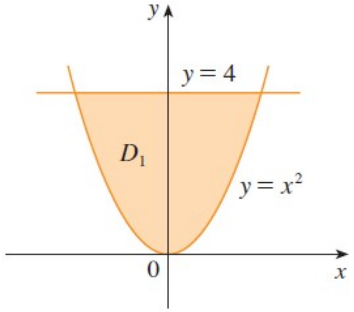


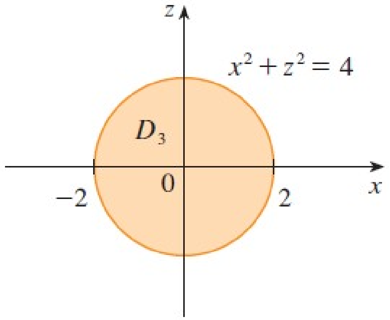
$\int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} \int_{u1(x,\, z)}^{u2(x,\, z)} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2 + z^2}\, dy\, dz\, dx$

$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[y \cdot \sqrt{x^2 + z^2}\, \right]_{x^2+z^2}^{4}\, dz\, dx$

$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[(4 - x^2 - z^2) \cdot \sqrt{x^2 + z^2}\, \right]\, dz\, dx$





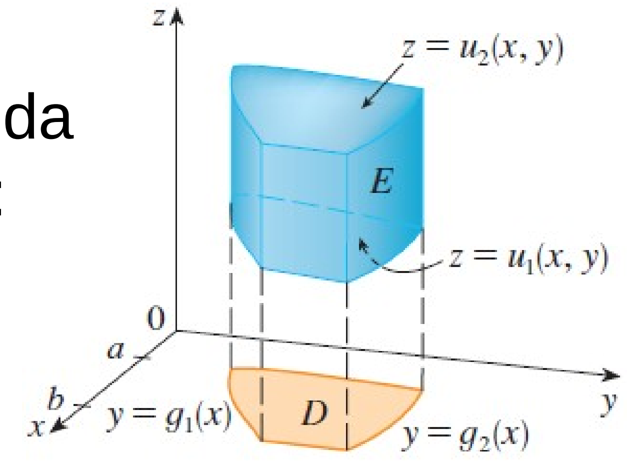
Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:
Integral Tripla sobre uma região sólida genérica (tipo I com projeção tipo I):

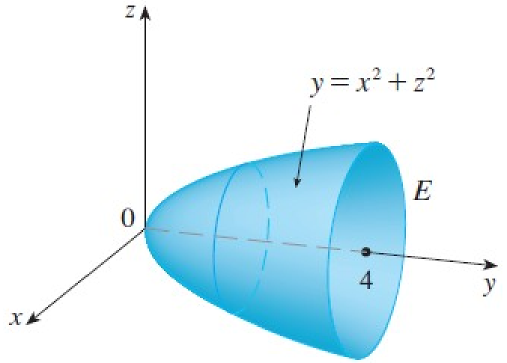
$\iiint_E f(x, y, z)\, dV =$

$\int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} \int_{u1(x,\, y)}^{u2(x,\, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

(e 5 outras possibilidades)



Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV$, onde E é a região limitada pelo paraboloide $y = x^2 + z^2$ e pelo plano $y = 4$.

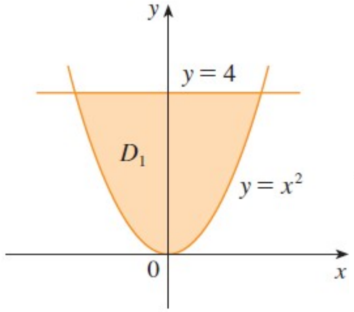


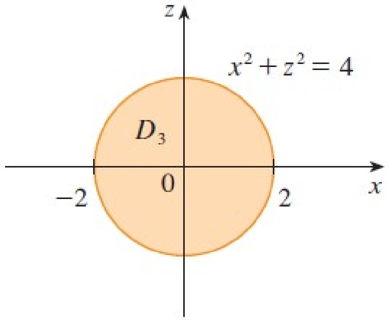
$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} [(4 - x^2 - z^2) \cdot \sqrt{x^2 + z^2}\,]\; dz\, dx$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 [(4 - r^2) \cdot r]\; r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2 - r^4)\, dr$

$= 2\pi\, [4/3 \cdot r^3 - r^5/5]_0^2 = 2\pi \cdot (32/3 - 32/5)$

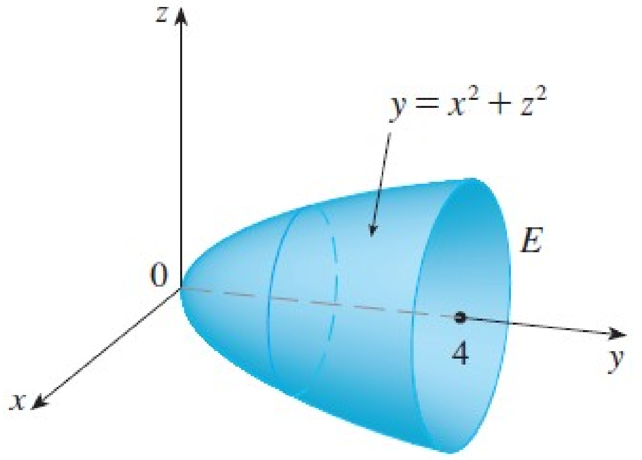
$= 2\pi \cdot 64/15 = 128\pi/15$





Espaço pra imagem da câmera na live

Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV$, onde E é a região limitada pelo paraboloide $y = x^2 + z^2$ e pelo plano $y = 4$.



Solução: $128\pi/15$

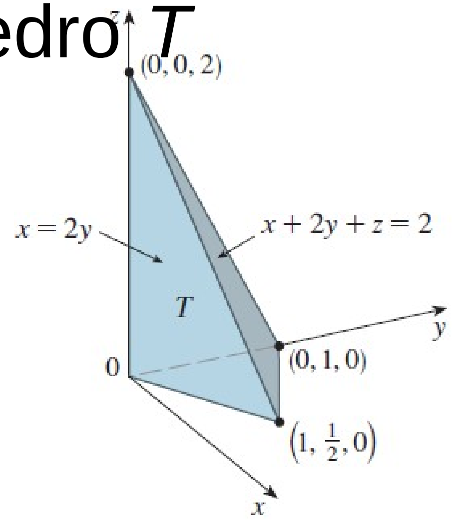
Espaço pra imagem da câmera na live

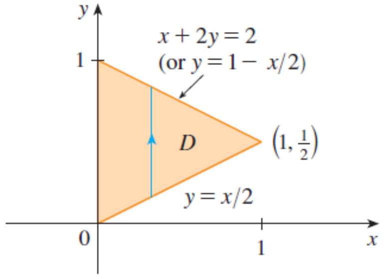
Lembrete:

Volume de E:

$$V(E) = \iiint_E dV$$

Utilize uma integral tripla para determinar o volume do tetraedro T limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.





$$V(T) = \int_0^1\int_{x/2}^{1-x/2}\int_0^{2-x-2y} 1\, dz\, dy\, dx = \int_0^1\int_{x/2}^{1-x/2} [z]_0^{2-x-2y}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1\int_{x/2}^{1-x/2} 2 - x - 2y\, dy\, dx = \int_0^1 [2y - xy - y^2]_{x/2}^{1-x/2}\, dx$$

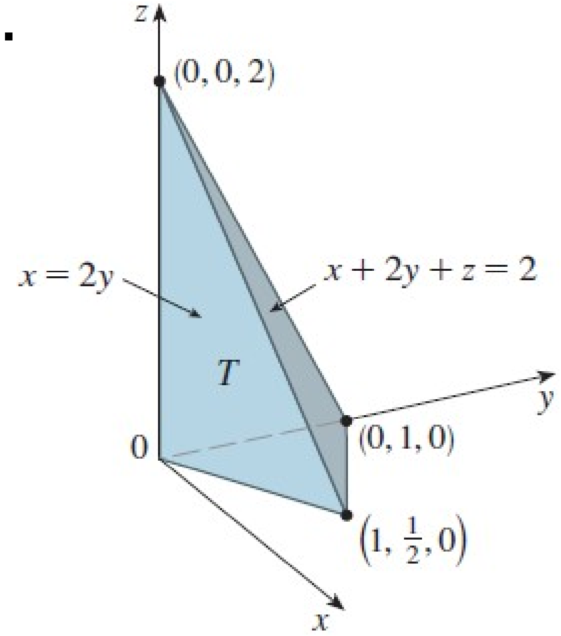
$$= \int_0^1 [2(1 - x/2) - x(1 - x/2) - (1 - x/2)^2 - 2x/2 + xx/2 + (x/2)^2]\, dx$$

$$= \int_0^1 [1 - 2x + x^2]\, dx = [x - x^2 + x^3/3]_0^1 = 1/3$$

Espaço pra imagem da câmera na live

E

Utilize uma integral tripla para determinar o volume do tetraedro T limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.



solução: 1/3

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete: centro de massa de um volume E de densidade de massa $\rho(x, y, z)$:

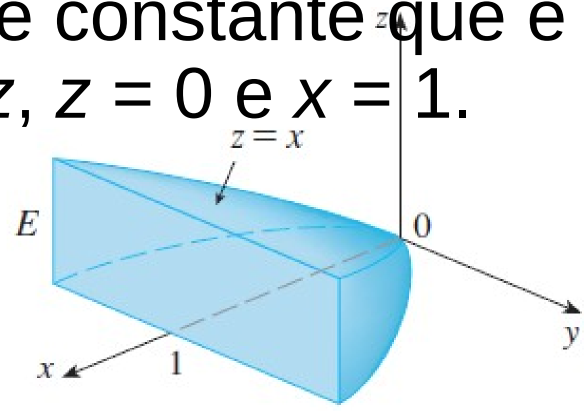
$\bar{x} = 1/m \cdot \iiint_E x\,\rho(x, y, z)\,dV$,

$\bar{y} = 1/m \cdot \iiint_E y\,\rho(x, y, z)\,dV$,

$\bar{z} = 1/m \cdot \iiint_E z\,\rho(x, y, z)\,dV$,

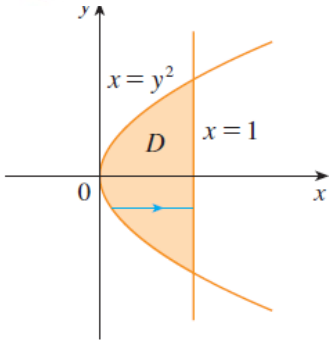
onde $m = \iiint_E \rho(x, y, z)\,dV$

Determine o centro de massa de um sólido com densidade constante que é limitado pelo cilindro parabólico $x = y^2$ e pelos planos $x = z$, $z = 0$ e $x = 1$.



$m = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} \rho\,dz\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} [\rho z]_0^x\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} \rho x\,dx\,dy$

$= \int_{-1}^{1} [\rho x^2/2]_{y^2}^{1}\,dy = \rho/2 \cdot \int_{-1}^{1} 1\text{-}y^4\,dy = \rho/2 \cdot [y - y^5/5]_{-1}^{1} = 4\rho/5$



Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete: centro de massa de um volume E de densidade de massa $\rho(x, y, z)$:

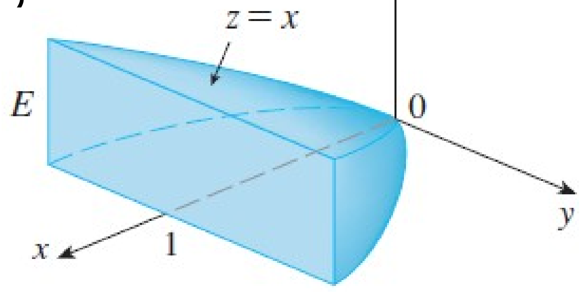
$\bar{x} = 1/m \cdot \iiint_E x\,\rho(x, y, z)\,dV$,

$\bar{y} = 1/m \cdot \iiint_E y\,\rho(x, y, z)\,dV$,

$\bar{z} = 1/m \cdot \iiint_E z\,\rho(x, y, z)\,dV$,

onde $m = \iiint_E \rho(x, y, z)\,dV$

Determine o centro de massa de um sólido com densidade constante que é limitado pelo cilindro parabólico $x = y^2$ e pelos planos $x = z$, $z = 0$ e $x = 1$.

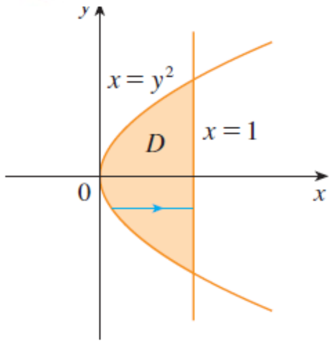


pela simetria: $\bar{y} = 0$

$\bar{x} = 5/4\rho \cdot \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_0^{x} x\,\rho\,dz\,dx\,dy = 5/4 \cdot \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} [xz]_0^{x}\,dx\,dy$

$= 5/4 \cdot \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x^2\,dx\,dy = 5/4 \cdot \int_{-1}^{1} [x^3/3]_{y^2}^{1}\,dy = 5/12 \cdot \int_{-1}^{1} 1 - y^6\,dy$

$= 5/12 \cdot [y - y^7/7]_{-1}^{1} = 5/7$



$\bar{z} = 5/4\rho \cdot \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_0^{x} z\,\rho\,dz\,dx\,dy = 5/4 \cdot \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} [z^2/2]_0^{x}\,dx\,dy = 5/8 \cdot \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x^2\,dx\,dy$

$= 5/8 \cdot \int_{-1}^{1} [x^3/3]_{y^2}^{1}\,dy = 5/24 \cdot \int_{-1}^{1} 1 - y^6\,dy = 5/14$

CdM = (5/7, 0, 5/14)

Espaço pra imagem da câmera na live

Determine o centro de massa de um sólido com densidade constante que é limitado pelo cilindro parabólico $x = y^2$ e pelos planos $x = z$, $z = 0$ e $x = 1$.

solução: (5/7, 0, 5/14)