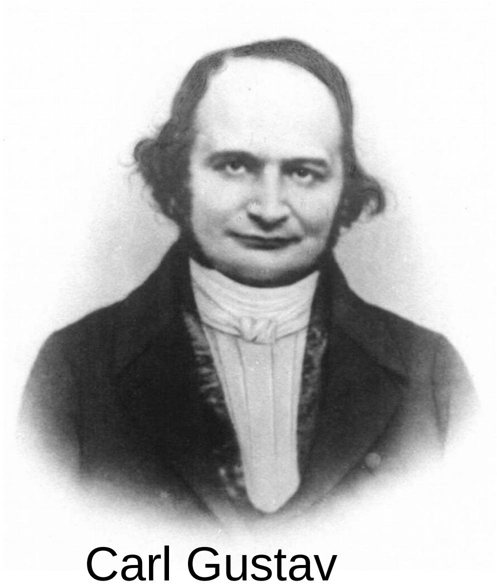
Espaço pra imagem da
câmera na live

Faça uma pergunta pelo chat.
Pode demorar uns dez segundas até eu ver a pergunta.

A minha sugestão é resolver alguns exercícios
sobre o novo assunto
Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas,
e Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas
ou tirar dúvidas pra P1

Começamos assim que alguém se manifestar no chat.



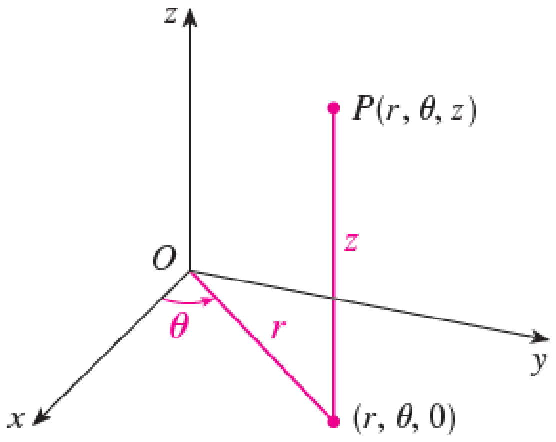
Carl Gustav
Jakob Jacobi
(1804-1851)

Espaço pra imagem da câmera na live

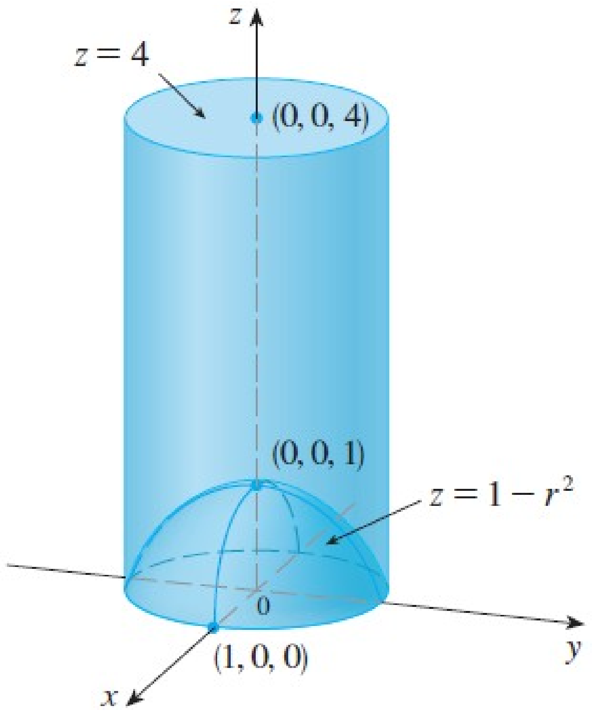
Lembrete:
Coordenadas cilíndricas:

$x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, $z = z$,

$r^2 = x^2 + y^2$, $\operatorname{tg} \theta = y/x$, $z = z$



Um sólido E está contido no cilíndro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ e acima do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilíndro, $\rho = Kr$. Determine a massa de E.

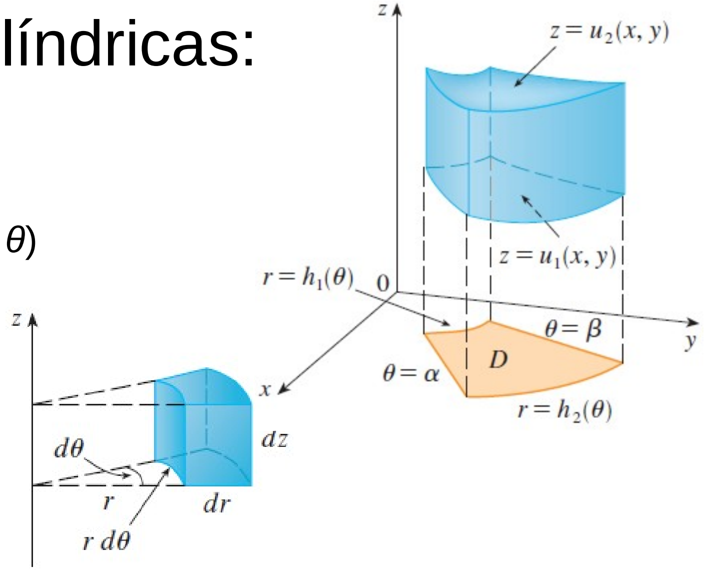


Espaço pra imagem da câmera na live

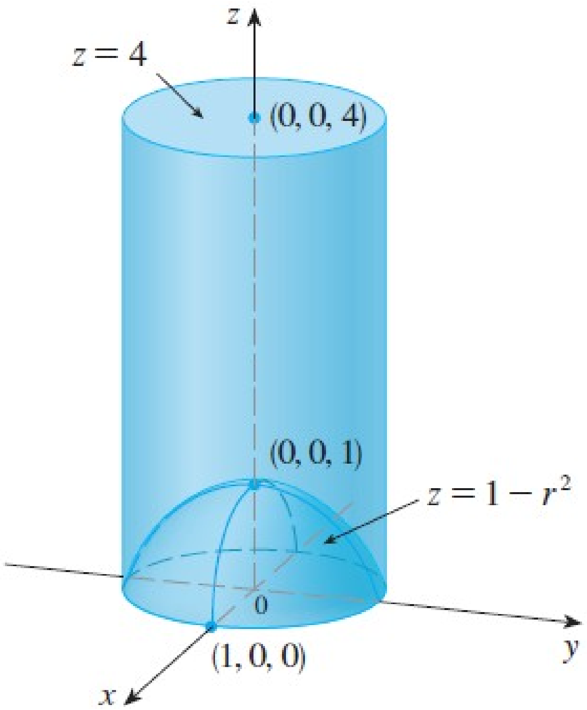
Integral tripla em coordenadas cilíndricas:

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\int_{h1(\theta)}^{h2(\theta)}\int_{u1(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)}^{u2(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\,\underbrace{r\,dz\,dr\,d\theta}_{dV}$$



Um sólido E está contido no cilíndro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ e acima do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilíndro, $\rho = Kr$. Determine a massa de E.



$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{h1(\theta)}^{h2(\theta)}\int_{u1(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)}^{u2(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^4 Kr\,r\,dz\,dr\,d\theta = K\int_0^{2\pi}d\theta \int_0^1\int_{1-r^2}^4 r^2\,dz\,dr$$

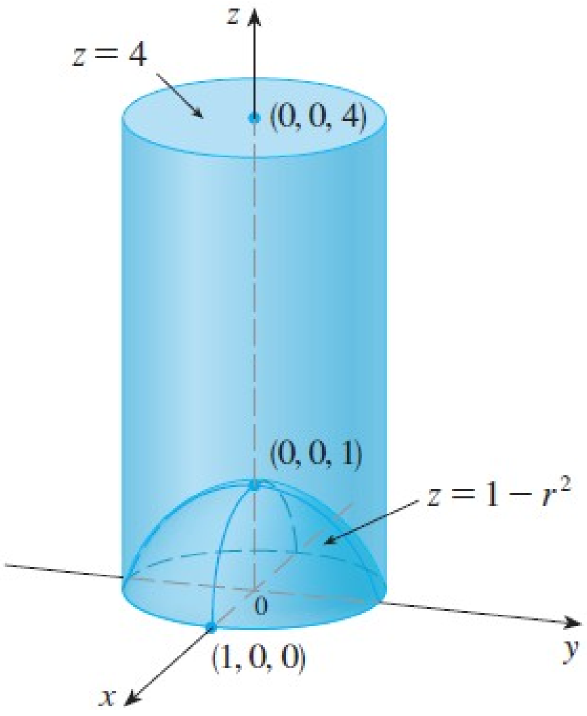
$$= 2\pi K \int_0^1 [r^2 z]_{1-r^2}^4\,dr = 2\pi K \int_0^1 [r^2(4 - 1 + r^2)]\,dr$$

$$= 2\pi K \int_0^1 3r^2 + r^4\,dr = 2\pi K\,[r^3 + r^5/5]_0^1 = 2\pi K \cdot 6/5 = 12\pi K/5$$

Espaço pra imagem da câmera na live

Um sólido E está contido no cilíndro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ e acima do paraboloide $z = 1 – x^2 – y^2$. A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilíndro, $\rho = Kr$. Determine a massa de E.

$m = 12\pi K/5$

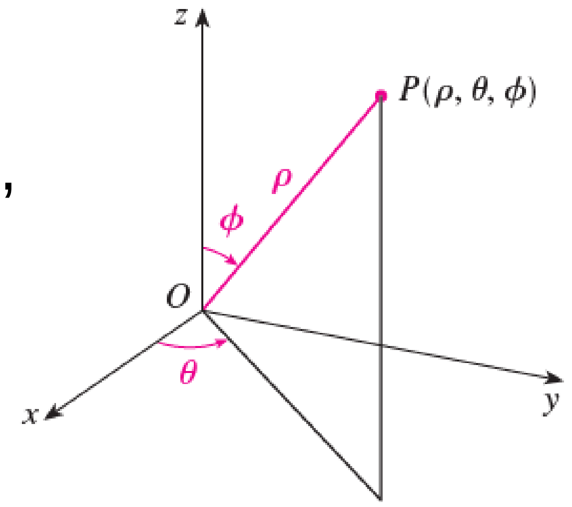


Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete: Coordenadas esféricas:

$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$,
$z = \rho \cos \phi$,

$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\operatorname{tg} \theta = y/x$,
$\operatorname{tg} \phi = \sqrt{x^2 + y^2}/z$

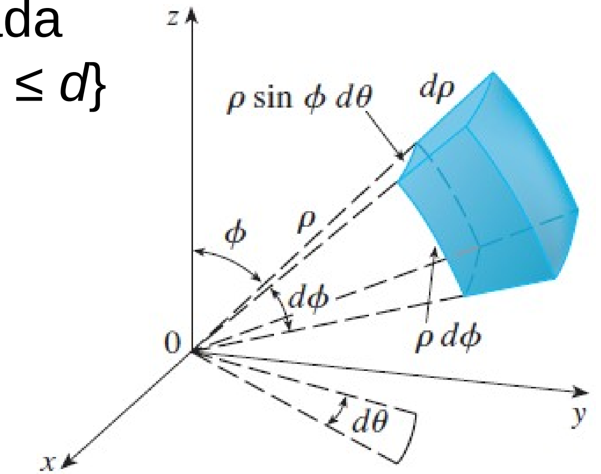


Utilize coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

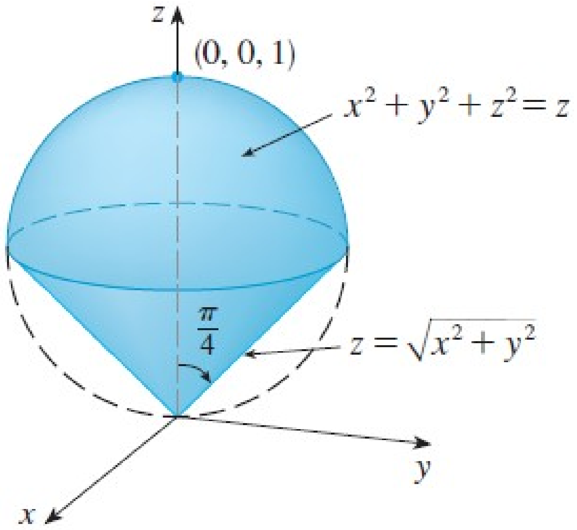
Espaço pra imagem da câmera na live

Integral tripla sobre uma cunha esférica dada por $E = \{(\rho, \theta, \phi) | \ a \le \rho \le b, \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d\}$ em coordenadas esféricas:

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV$$
$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b$$
$$f(\rho \text{ sen } \phi \cos \theta, \rho \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta, \rho \cos \phi)$$
$$\rho^2 \text{ sen } \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \longleftarrow dV$$



Utilize coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.



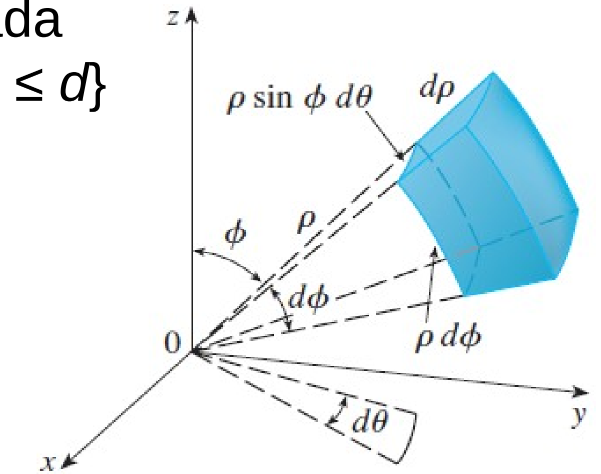
Limites em ϕ: $0, \pi/4$, em θ: $0, 2\pi$, em ρ: $0, \cos \phi$

esfera: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$
neste caso: $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - ½)^2 = (½)^2$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2 \cdot ½ \cdot z + (½)^2 = (½)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = z$
$\Rightarrow (\rho \text{ sen } \phi \cos \theta)^2 + (\rho \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta)^2 + (\rho \cos \phi)^2 = \rho \cos \phi$
$\rho^2 \text{ sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \text{ sen}^2 \phi \text{ sen}^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \phi = \rho \cos \phi \Rightarrow \rho^2 = \rho \cos \phi \Rightarrow \rho = \cos \phi$

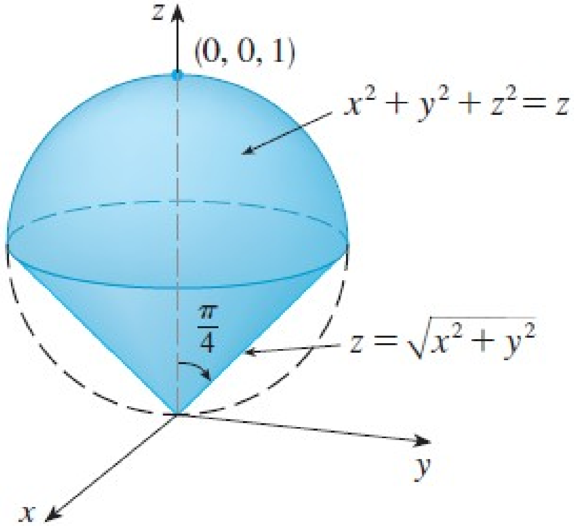
Espaço pra imagem da câmera na live

Integral tripla sobre uma cunha esférica dada por $E = \{(\rho, \theta, \phi) | \ a \le \rho \le b, \ \alpha \le \theta \le \beta, \ c \le \phi \le d\}$ em coordenadas esféricas:

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV$$
$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b$$
$$f(\rho \text{ sen } \phi \cos \theta, \rho \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta, \rho \cos \phi)$$
$$\rho^2 \text{ sen } \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \longleftarrow dV$$



Utilize coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

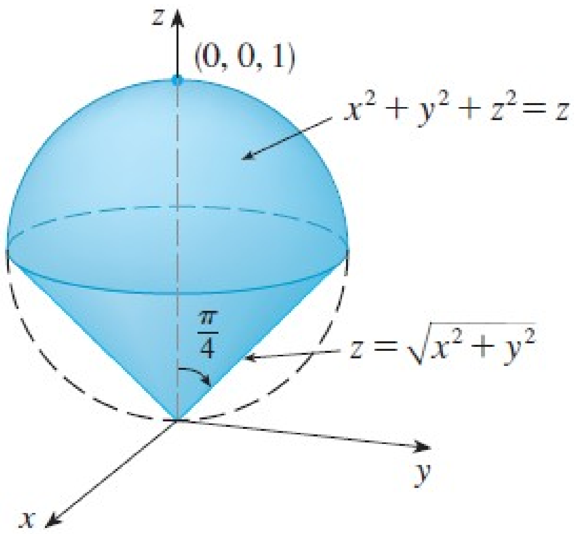


Limites em ϕ: 0, $\pi/4$, em θ: 0, 2π, em ρ: 0, $\cos \phi$

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\cos\phi} 1 \, \rho^2 \text{ sen } \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} \text{sen } \phi \, [\rho^3/3]_0^{\cos\phi} \, d\theta \, d\phi$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \text{sen } \phi \cos^3 \phi/3 \, d\phi = -2\pi \int_0^{\pi/4} -\text{sen } \phi \cos^3 \phi/3 \, d\phi$$
$$= -2\pi \, [\cos^4 \phi \, /12]_0^{\pi/4} = -2\pi/12 \, [1/4 - 1] = \pi/8$$

Espaço pra imagem da câmera na live

Utilize coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.



$V = \pi/8$

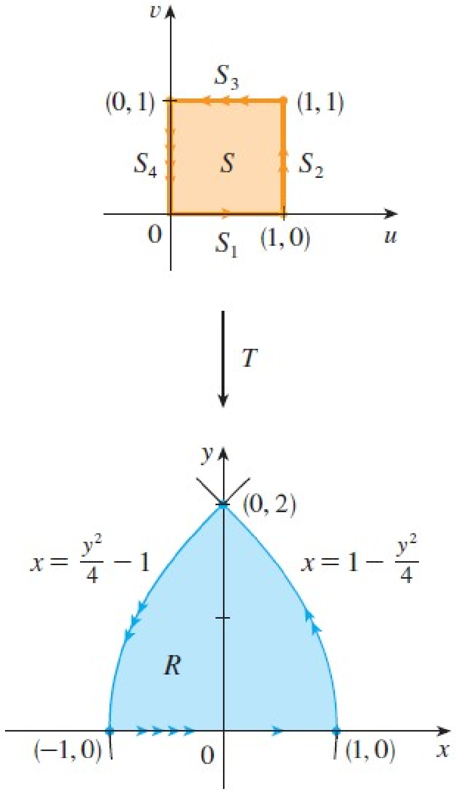
Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:
Para uma mudança de variáveis numa integral dupla T: $(u, v) \Rightarrow (x, y)$, a integral sobre uma região $S = T(R)$ é:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \underbrace{\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv}_{dA},$$

onde $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}$

Utilize a mudança de variáveis $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ para calcular a integral $\iint_R y\, dA$, onde R é a região delimitada pelo eixo x e pelas parábolas $y^2 = 4 - 4x$ e $y^2 = 4 + 4x$, $y \geq 0$



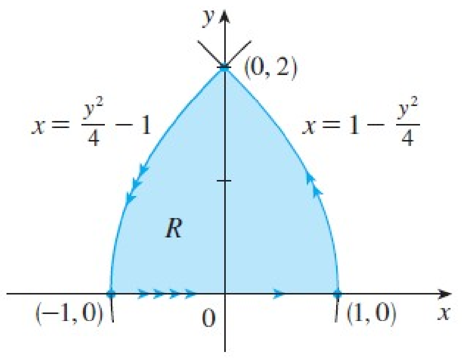
$\partial x/\partial u = 2u$, $\partial x/\partial v = -2v$, $\partial y/\partial u = 2v$, $\partial y/\partial v = 2u$
$\Rightarrow$ det jacobiana $= 4(u^2 + v^2)$

$\int_0^1 \int_0^1 2uv\, 4(u^2 + v^2)\, du\, dv = \int_0^1 \int_0^1 8(u^3v + v^3u)\, du\, dv$
$= 8\int_0^1 [u^4v/4 + v^3u^2/2]_0^1\, dv = 8\int_0^1 v/4 + v^3/2\, dv = 8[v^2/8 + v^4/8]_0^1$
$= 8/8 \cdot [v^2 + v^4]_0^1 = 2$

Espaço pra imagem da câmera na live

Utilize a mudança de variáveis
$x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ para calcular a integral $\iint_R y\, dA$, onde R é a região delimitada pelo eixo x e pelas parábolas $y^2 = 4 - 4x$ e $y^2 = 4 + 4x$, $y \geq 0$

solução: 2



Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:

Para uma mudança de variáveis numa integral tripla T: $(u, v, w) \Rightarrow (x, y, z)$, a integral sobre um vol. $S = T(R)$ é:

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dA$$

$$= \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v\, w), z(u, v\, w)) \underbrace{\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw}_{dV},$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Utilize esta fórmula para deduzir a fórmula para a integração tripla em coordenadas esféricas.

Espaço pra imagem da câmera na live

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dA$$

$$= \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v\, w), z(u, v\, w)) \underbrace{\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw}_{dV},$$

Coordenadas esféricas:

$x = \rho$ sen ϕ cos θ, $y = \rho$ sen ϕ sen θ, $z = \rho$ cos ϕ,

$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_S f(x, y, z)\ \rho^2 \text{ sen } \phi\ d\rho\, d\theta\, d\phi$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

ρ, θ, ϕ

Utilize esta fórmula para
deduzir a fórmula para a integração tripla em coordenadas esférica

$x = \rho$ sen ϕ cos θ, $y = \rho$ sen ϕ sen θ, $z = \rho$ cos ϕ

Matriz Jacobiana:

$$\begin{matrix} \text{sen } \phi \text{ cos } \theta & -\rho \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta & \rho \text{ cos } \phi \text{ cos } \theta \\ \text{sen } \phi \text{ sen } \theta & \rho\ \text{ sen } \phi \text{ cos } \theta & \rho \text{ cos } \phi \text{ sen } \theta \\ \text{cos } \phi & 0 & -\rho \text{ sen } \phi \end{matrix}$$

Espaço pra imagem da câmera na live

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dA$$

$$= \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v\ w), z(u, v\ w)) \underbrace{\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\, dv\, dw,}_{dV}$$

Coordenadas esféricas:

$x = \rho$ sen ϕ cos θ, $y = \rho$ sen ϕ sen θ, $z = \rho$ cos ϕ,

$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_S f(\mathrm{x, y, z})\ \rho^2$ sen $\phi\ d\rho\, d\theta\, d\phi$

$$\underset{\rho,\ \theta,\ \phi}{\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Utilize esta fórmula para
deduzir a fórmula para a integração tripla em coordenadas esférica

Matriz Jacobiana:

sen ϕ cos θ	$-\rho$ sen ϕ sen θ	ρ cos ϕ cos θ
sen ϕ sen θ	ρ sen ϕ cos θ	ρ cos ϕ sen θ
cos ϕ	0	$-\rho$ sen ϕ

determinante: cos $\phi \cdot (-\rho$ sen ϕ sen $\theta \cdot \rho$ cos ϕ sen θ - ρ cos ϕ cos $\theta \cdot \rho$ sen ϕ cos $\theta)$

$-\rho$ sen $\phi \cdot$ (sen ϕ cos $\theta \cdot \rho$ sen ϕ cos θ - - ρ sen ϕ sen $\theta \cdot$ sen ϕ sen θ)

= -cos $\phi \cdot (\rho^2$ sen ϕ sen^2 θ cos ϕ + ρ^2 cos ϕ cos^2 θ sen ϕ)

$-\rho^2$ sen $\phi \cdot$ (sen^2 ϕ cos^2 θ + sen^2 ϕ sen^2 θ)

= -cos ϕ ρ^2 (sen ϕ cos ϕ) - ρ^2 sen $\phi \cdot$ (sen^2 ϕ) = - ρ^2 sen ϕ valor absoluto ρ^2 sen ϕ

Espaço pra imagem da câmera na live

Utilize esta fórmula para
deduzir a fórmula para a integração tripla em coordenadas esféricas.

solução: $dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$