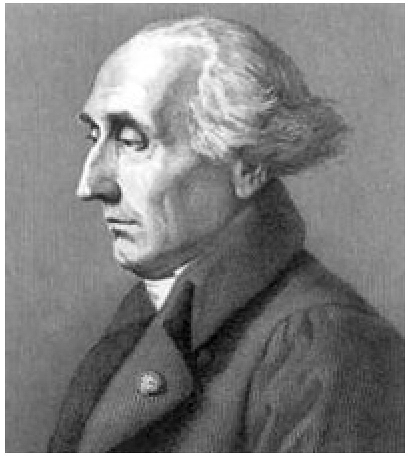
Espaço pra imagem da câmera na live

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)



Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851)

Faça uma pergunta pelo chat. Pode demorar uns dez segundos até eu ver a pergunta.

A minha sugestão é resolver alguns exercícios para aqueles acabei não tendo tempo nas últimas 7 semanas (sobre os assuntos que caem na P2), ou tirar dúvidas.

Começamos assim que alguém se manifestar no chat.

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembretes (máximos e mínimos de funções de 2 variáveis):

Ponto crítico: ponto onde as derivadas parciais de 1ª ordem são zero

Teste da segunda derivada:

Seja $D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - |f_{xy}(a, b)|^2$

- $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0 \Rightarrow f(a, b)$ é um mínimo local
- $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0 \Rightarrow f(a, b)$ é um máximo local
- $D < 0 \Rightarrow f(a, b)$ é nem mínimo nem máximo

Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$
Determine também o ponto mais alto do gráfico de f.

$f_x = 20xy – 10x - 0 - 4x^3 - 0 = 20xy – 10x - 4x^3$, $f_y = 10x^2 - 8y – 8y^3$
$f_{xx} = 20y – 10 – 12x^2$, $f_{xy} = f_{yx} = 20x$, $f_{yy} = -8 – 24x^2$

pontos críticos: $f_x = 0 = 20xy – 10x - 4x^3 = x\cdot(20y – 10 - 4x^2)$
$\Rightarrow x = 0$ ou $20y – 10 - 4x^2 = 0$
$x = 0$: $f_y = - 8y – 8y^3 = 0 \Rightarrow y = -y^3 \Rightarrow y = 0$ (ou valores imaginários)
$20y – 10 - 4x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 10y – 5 \Rightarrow f_y = 0 = 10x^2 - 8y – 8y^3 = 50y -25 - 8y – 8y^3$
=> Equação cúbica, para resolver tem que usar métodos numéricos

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembretes (máximos e mínimos de funções de 2 variáveis):

Ponto crítico: ponto onde as derivadas parciais de 1ª ordem são zero

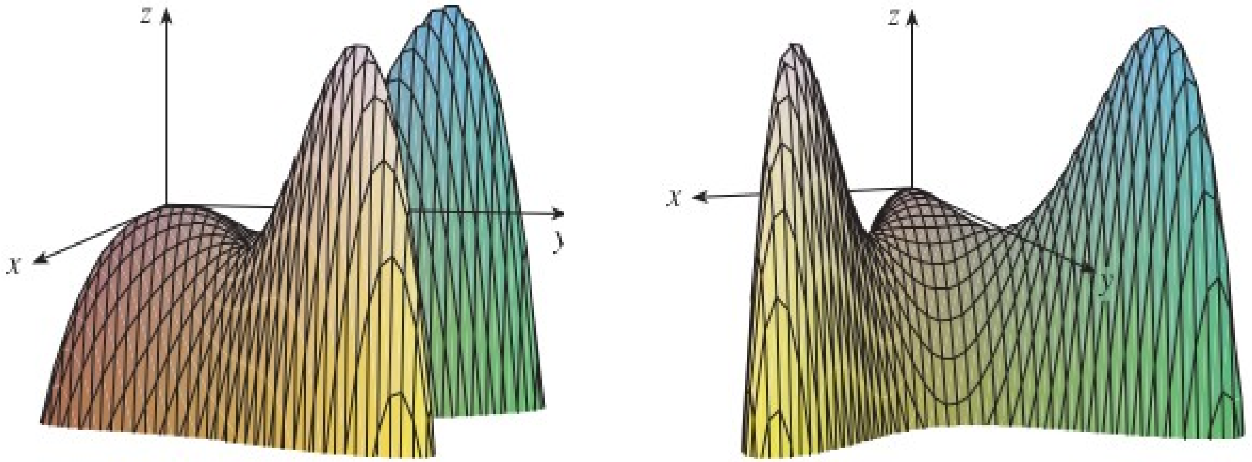
Teste da segunda derivada:
Seja $D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - |f_{xy}(a, b)|^2$
- $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0 \Rightarrow f(a, b)$ é um mínimo local
- $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0 \Rightarrow f(a, b)$ é um máximo local
- $D < 0 \Rightarrow f(a, b)$ é nem mínimo nem máximo

Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$
Determine também o ponto mais alto do gráfico de f.

$f_x = 20xy - 10x - 0 - 4x^3 - 0 = 20xy - 10x - 4x^3$, $f_y = 10x^2 - 8y - 8y^3$
$f_{xx} = 20y - 10 - 12x^2$, $f_{xy} = f_{yx} = 20x$, $f_{yy} = -8 - 24x^2$

pontos críticos: (0, 0), (?, ?)
(0, 0): $f_{xx} = -10$, $f_{xy} = f_{yx} = 0$, $f_{yy} = -8 \Rightarrow D = 80 \Rightarrow$ máximo local

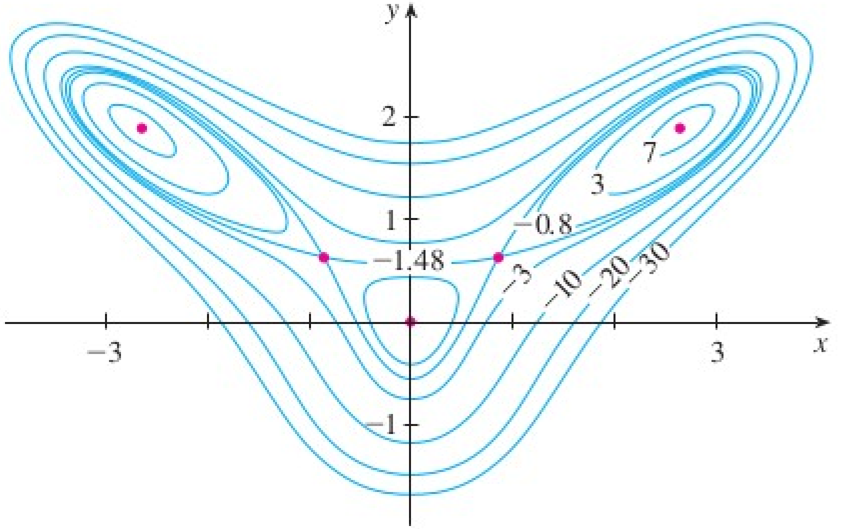
Espaço pra imagem da câmera na liveϖ



Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$
Determine também o ponto mais alto do gráfico de f.

solução

Ponto crítico	Valor de f	f_{xx}	D	Conclusões
(0, 0)	0,00	−10,00	80,00	máximo local
(±2,64, 1,90)	8,50	−55,93	2.488,72	máximo local
(±0,86, 0,65)	−1,48	−5,87	−187,64	ponto de sela



Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:

Teorema de Fubini

$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$

Calcule a integral dupla $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$.

$\int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2)\, dy\, dx = \int_0^2 [xy - y^3]_1^2\, dx = \int_0^2 [2x - 2^3 - x + 1^3]_1^2\, dx = \int_0^2 x - 7\, dx$

$= [½x^2 - 7x]_0^2 = -12$

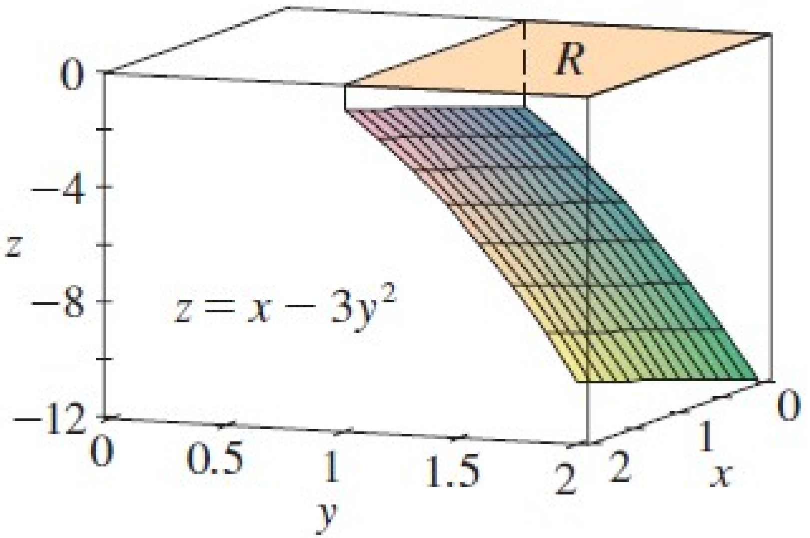
$\int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2)\, dx\, dy = \int_1^2 [½x^2 - 3xy^2]_0^2\, dy = \int_1^2 2 - 6y^2\, dy = [2y - 2y^3]_1^2 = 4 - 16 - 2 + 2$

$= -12$

Espaço pra imagem da câmera na live

Calcule a integral dupla $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.

Solução: $\iint_R (x - 3y^2)\, dA = -12$



Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:

Teorema de Fubini

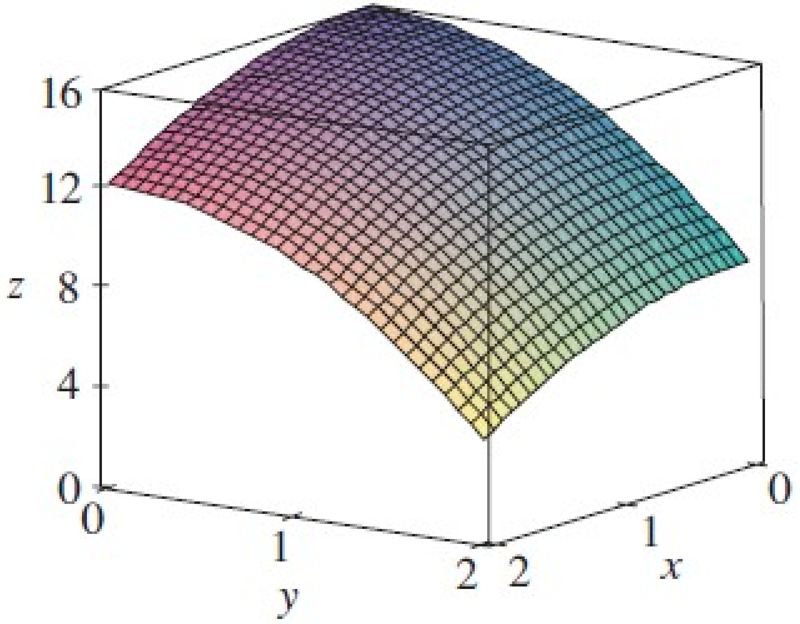
$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$

Determine o volume do sólido S que é delimitado pelo paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, pelos planos $x = 2$ e $y = 2$ e pelos três planos coordenados.

$\int_0^2 \int_0^2 16 - x^2 - 2y^2\, dy\, dx = \int_0^2 [16y - yx^2 - 2y^3/3]_0^2\, dx$

$= \int_0^2 [32 - 2x^2 - 16/3]\, dx = \int_0^2 - 2x^2 + 80/3\, dx$

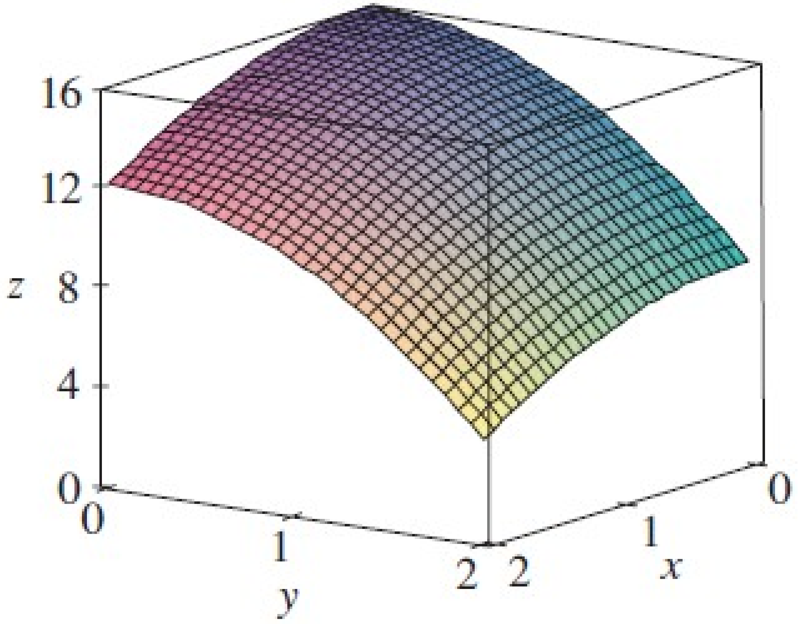
$= [-2x^3/3 + 80x/3]_0^2 = 1/3 \cdot (-16 + 160) = 48$



Espaço pra imagem da câmera na live

Determine o volume do sólido S que é delimitado pelo paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, pelos planos $x = 2$ e $y = 2$ e pelos três planos coordenados.

$V = 48$



Espaço pra imagem da câmera na live

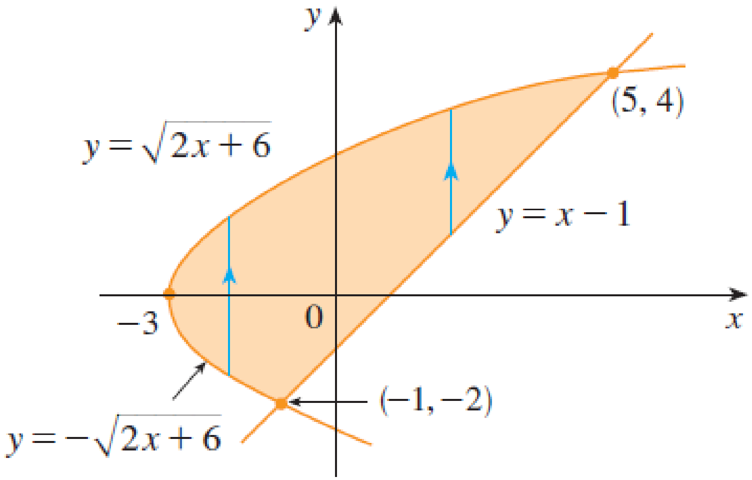
Lembrete: Região D tipo I:

$D = \{(x, y) |\ a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

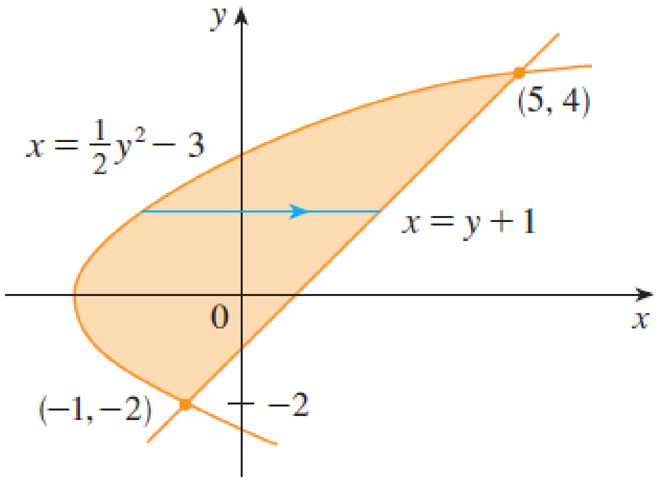
então: $\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$

Região tipo II: mesmo coisa com os papeis de x e y invertidos.

Calcule $\iint_D xy\, dA$, onde D é a região limitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$.



D como região do tipo I



D como região do tipo II

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete: Região D tipo I:

$D = \{(x, y) | \ a \leq x \leq b, \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

então: $\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$

Região tipo II: mesmo coisa com os papeis de x e y invertidos.

Calcule $\iint_D xy\, dA$, onde D é a região limitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$.

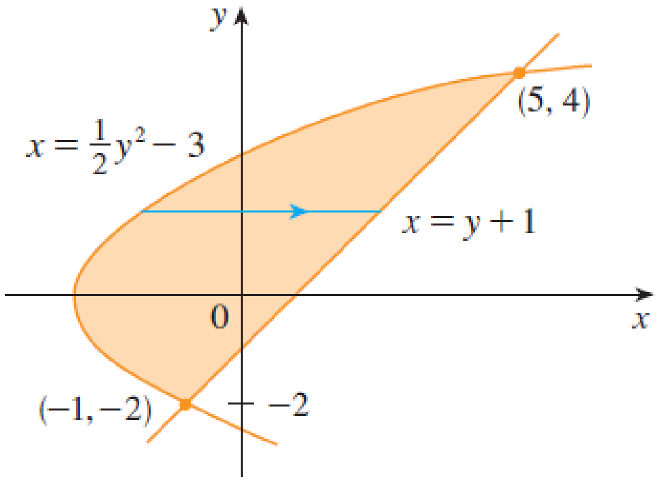
$\int_{-2}^{4}\int_{½y^2-3}^{y+1} xy\, dx\, dy = \int_{-2}^{4} [½x^2y]_{½y^2-3}^{y+1}\, dy$

$= ½\int_{-2}^{4} [(y + 1)^2y - (½y^2 - 3)^2y]\, dy$

$= ½\int_{-2}^{4} \ y^3 + 2y^2 + y - y^5/4 + 3y^3 - 9y\, dy$

$= ½\int_{-2}^{4} - y^5/4 + 4y^3 + 2y^2 - 8y\, dy$

$= ½[-y^6/14 + y^4 + 2y^3/3 - 4y^2]_{-2}^{4} = 36$

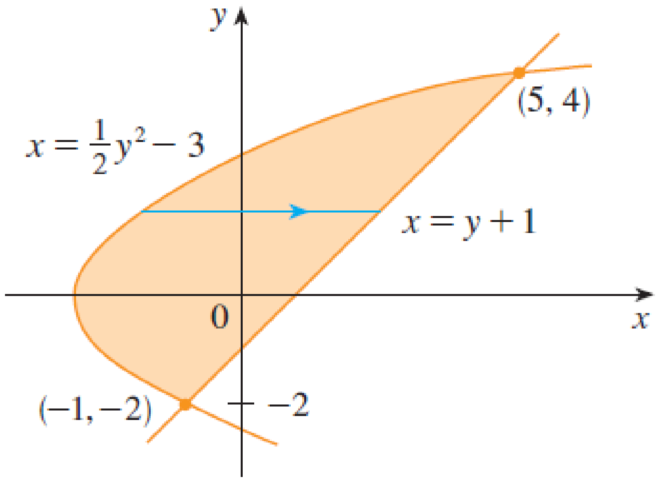


D como região do tipo II

Espaço pra imagem da câmera na live

Calcule $\iint_D xy\, dA$, onde D é a região limitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$.

solução: $\iint_D xy\, dA = 36$



D como região do tipo II

Espaço pra imagem da câmera na liveϖ

Lembrete:

Se $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo (x, y) em D, então

$mA(D) \leq \iint_D f(x, y)\, dA \leq MA(D)$

Utilize esta propriedade para estimar a integral $\iint_D e^{\text{sen } x \cos y}\, dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 2.

sen x cos y oscila entre -1 e 1
=> min de $e^{\text{sen } x \cos y}$: $e^{-1} = m$
max de $e^{\text{sen } x \cos y}$: $e^{1} = M$
$A(D) = \pi r^2 = 4\pi$

$4\pi e^{-1} \leq \iint_D e^{\text{sen } x \cos y}\, dA \leq 4\pi e$

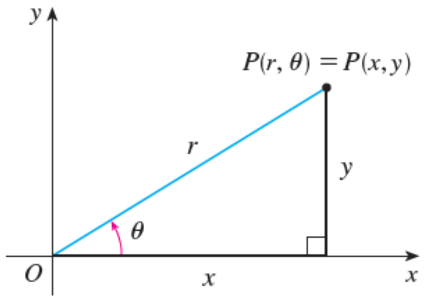
Espaço pra imagem da câmera na live

Utilize esta propriedade para estimar a integral $\iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 2.

$$4\pi/e \leq \iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA \leq 4\pi e$$

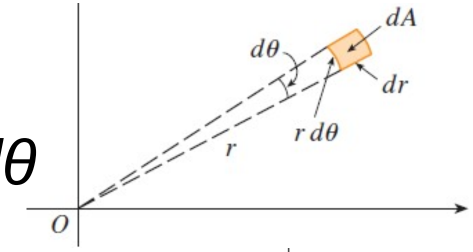
Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:
Coordenadas polares:
$r^2 = x^2 + y^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$

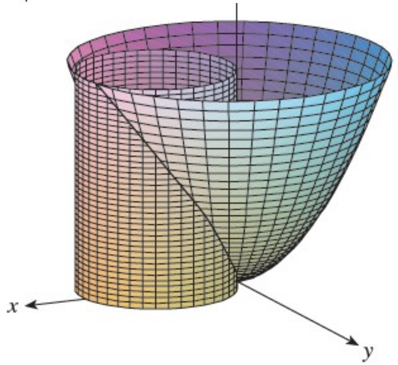


Mudança coordenadas cartesianas para coordenadas polares

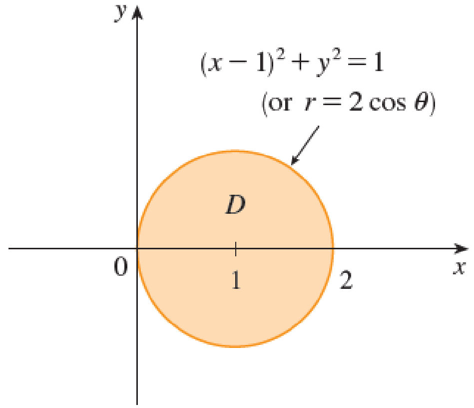
$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta$



Determine o volume do sólido que está sob o paraboloide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy e dentro do cilíndro $x^2 + y^2 = 2x$.



$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x$
em coordenadas polares: $r^2 = 2\, r\cos\theta \Rightarrow r = 2\cos\theta$



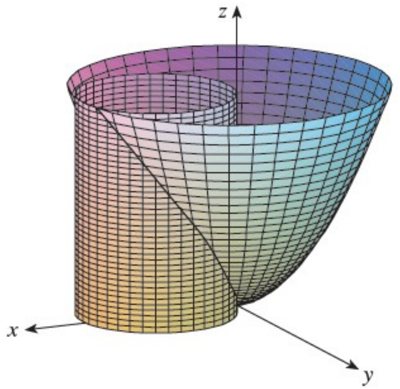
$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\, r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^3\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [r^4/4]_0^{2\cos\theta}\, d\theta$
$= ¼\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16\cos^4\theta\, d\theta = \ldots$

Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete (FUV):

$\int \cos^4 \theta = 3 \cdot \theta/8 + ¼ \cdot \text{sen } 2\theta + \text{sen } 4\theta \,/\, 32$

Determine o volume do sólido que está sob o paraboloide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy e dentro do cilíndro $x^2 + y^2 = 2x$.

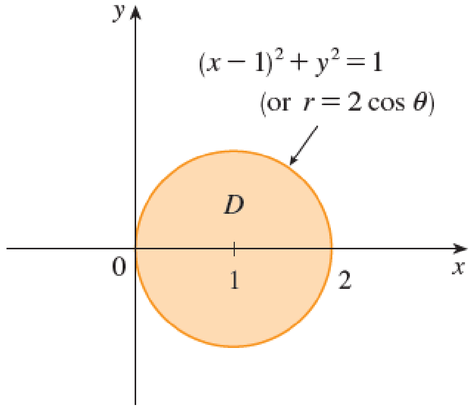


$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\, r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^3\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}[r^4/4]_0^{2\cos\theta}\, d\theta$

$= ¼ \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16 \cos^4 \theta\, d\theta = 4 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta\, d\theta$

$= 4 \cdot [3 \cdot \theta/8 + ¼ \cdot \text{sen } 2\theta + \text{sen } 4\theta \,/\, 32]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$

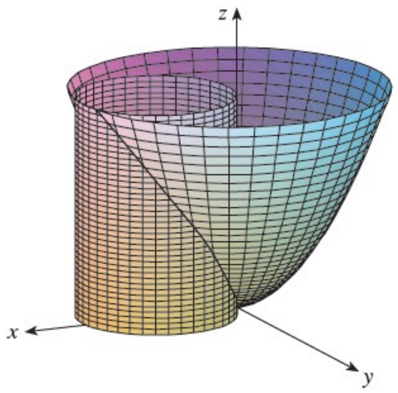
$4 \cdot [3\pi/16 + 0 + 0 \,--3\pi/16 - 0 - 0] = 3\pi/2$

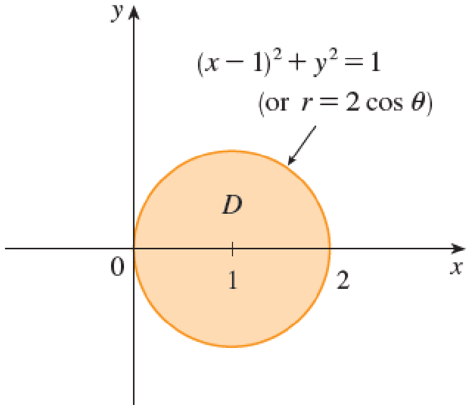


Espaço pra imagem da câmera na live

Determine o volume do sólido que está sob o paraboloide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy e dentro do cilíndro $x^2 + y^2 = 2x$.

$V = 3\pi/2$



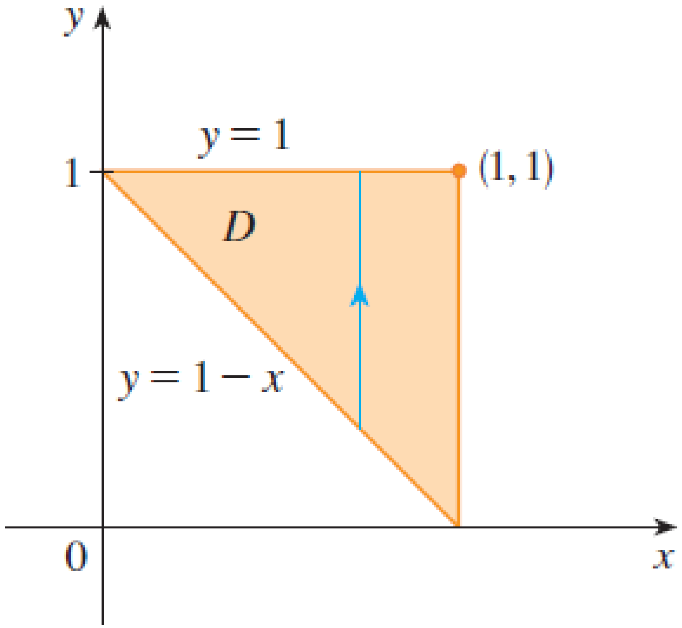


Espaço pra imagem da câmera na live

Lembrete:
Carga total de uma carga laminar com densidade de carga (por unidade de área) $\sigma(x, y)$:

$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA$$

Uma carga está distribuida na região triangular *D* desta figura de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = xy$, medida em coulombs por metro quadrado (C/m²). Determine a carga total.



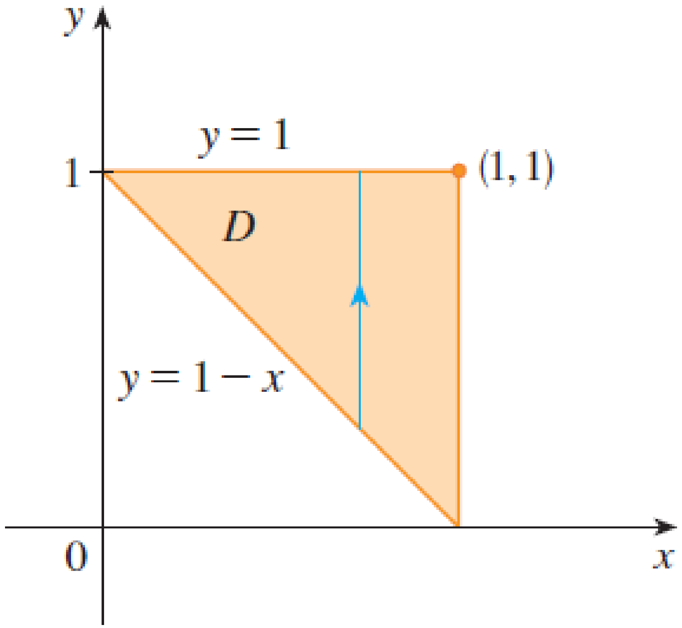
$$Q = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\, dy\, dx = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} x y^2\right]_{1-x}^1 dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\int_0^1 [x(1)^2 - x(1-x)^2]\, dx = \tfrac{1}{2}\cdot\int_0^1 [2x^2 - x^3]\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot[2x^3/3 - x^4/4]_0^1 = \tfrac{1}{2}\cdot[2/3 - 1/4] = 5/24 \text{ C}$$

Espaço pra imagem da câmera na live

Uma carga está distribuida na região triangular *D* desta figura de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = xy$, medida em coulombs por metro quadrado (C/m^2). Determine a carga total.



solução: $Q = 5/24$ C